



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>











**COURS COMPLET**

**MATHÉMATIQUES PURES.**

**TOME PREMIER.**



*Ouvrages du même Auteur qui se trouvent chez le même  
Libraire.*

**URANOGRAPHIE, ou TRAITE ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE**, à l'usage des personnes peu versées dans les Mathématiques, des Géographes, des Marins, des Ingénieurs, etc., accompagné de planisphères; quatrième édition, considérablement augmentée, 1 vol. in-8°, avec 10 planches, 1837. Sous presse, pour paraître le 1<sup>er</sup> février 1837.

*Astronomie pratique*, usage et composition de la *Connaissance des tems*, ouvrage destiné aux Astronomes, aux Marins et aux Ingénieurs. Paris, 1830. prix, 7 fr. 50 c., et 9 fr. 50, franc de port.

*Géodésie*, ou *Traité de la figure de la Terre et de ses parties*, contenant la *Topographie*, l'*Arpentage*, le *Nivellement*, la *Géomorphie terrestre et astronomique*, la construction des *Cartes* et la *Navigation*; Leçons données à la Faculté des Sciences de Paris, 1835; prix, 7 fr. 50 c.

*Traité élémentaire de Mécanique*, adopté dans l'instruction publique, 5<sup>e</sup> édition, 1826, in-8°. Prix : 7 fr. 50 c. pour Paris, et 9 fr., franc de port.

*Éléments de Statique*, in-8°, 1810. Prix : 3 fr. pour Paris, et 4 fr., franc de port.

*Le Dessin linéaire*, destiné à l'enseignement des Ecoles primaires, quel que soit le mode qu'on y suit, 2<sup>e</sup> édition, avec 12 planches gravées en taille-douce. Paris, 1827. Prix, 8 fr., et 9 fr. 50 c. franc de port.

*La Goniométrie*, ou *Procédé pour déterminer des arcs et des angles de tous les degrés*. Paris, 1800. Prix : 1 fr. 25 c.

*Flore parisienne*, 1 vol. in-18.

SE VEND AUSSI

A Besançon, chez GASSOT, Libraire,  
rues de l'Intendance, n° 61.

# COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES PURES,

*Louis Bonfante*  
PAR L.-B. FRANCOEUR,

Professeur de la Faculté des Sciences de Paris, Chevalier de la Légion-d'Honneur, Officier de l'Université, ex-Examineur des Candidats de l'École royale Polytechnique, Membre honoraire du département de la Marine russe, Correspondant de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg, des Sociétés Philomatique, d'Encouragement pour l'industrie nationale, d'Instruction élémentaire et des Méthodes d'Enseignement, des Académies de Rouen, Cambrai, Toulouse, Lisbonne, etc.

OUVRAGE DESTINÉ AUX ÉLÈVES DES ÉCOLES NORMALE ET POLYTECHNIQUE  
ET AUX CANDIDATS QUI SE PRÉPARENT A Y ÊTRE ADMIS.

QUATRIÈME ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE.

Préférez, dans l'enseignement, les méthodes générales, attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont toujours les plus faciles.

LAVLACE, *Écoles norm.* tome IV, p. 49.

TOME PREMIER.

---

PARIS,  
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, etc.,

Quai des Augustins, n° 55.

1837. *w*





ROY WOOD  
JAMES  
YOUNG

---

---

## PRÉFACE.

---

METTRE un lecteur attentif et intelligent en état de lire tous les ouvrages qui traitent des sciences exactes, sans lui supposer d'abord aucune instruction préliminaire en Mathématiques, tel est le but que je me suis proposé dans la composition de ce Traité. Pour y parvenir, j'ai dû exposer toutes les doctrines qui constituent les Mathématiques pures, depuis les parties les plus élémentaires, l'Arithmétique et la Géométrie, jusqu'au Calcul intégral le plus composé, sans omettre aucune des théories générales qui entrent dans l'ensemble de ce plan.

Une aussi grande multitude d'objets se trouve renfermée dans deux volumes, et l'on se tromperait, si l'on jugeait que j'aie omis des doctrines utiles, ou même des détails intéressans. La lecture de l'Ouvrage pourra convaincre qu'il est aussi complet qu'on peut l'espérer, et qu'on y trouve même plus d'applications que n'en promet le cadre étroit où je me suis resserré. Mais le système de concision que j'ai adopté, m'a

permis de diminuer l'espace sans rien oublier qui soit véritablement utile, et, je l'espère, sans nuire à la clarté.

Dès long-temps je me suis convaincu que rien n'est plus contraire au but que doit atteindre celui qui écrit sur les sciences, que d'entrer, sur chaque objet, dans des développemens longs et fastidieux. L'auteur, en disant tout ce qu'il pense, empêche le lecteur de penser lui-même; l'élève devient incapable de se passer des secours de son maître; il prend l'habitude d'une pesanteur et d'une prolixité très nuisibles aux succès; enfin, l'embarras des détails l'empêche de suivre le fil des idées essentielles, et il saisit mal l'ensemble des propositions; les accessoires tiennent dans son esprit la place des choses importantes. C'est au professeur à proportionner l'étendue des développemens à la nature d'esprit de chaque étudiant. « Pour bien instruire, il ne faut pas dire tout ce qu'on sait, mais seulement ce qui convient à ceux qu'on instruit. » (LA HARPE, *Cours de littérature*, 2<sup>e</sup> part. liv. II, chap. III, 2.)

Le public parait avoir adopté ce système d'instruction; et le succès qu'ont obtenu les trois premières éditions, me confirme dans l'opinion que j'avais des avantages de la concision. Il m'eût été sans doute bien plus facile de multiplier les volumes, et les personnes

exercées à écrire sur les mêmes matières pourront apprécier les soins qu'il m'a fallu prendre pour réduire ainsi chaque chose aux dimensions nécessaires.

Je conviens qu'il y a peu d'élèves capables de comprendre cet ouvrage sans le secours d'un maître; mais dans le long exercice que j'ai fait de l'enseignement, j'ai reconnu que tous les livres de mathématiques sont dans le même cas; les avantages de la concision du style pour former l'esprit des étudiants sont incontestables, et si des difficultés en sont inséparables, c'est au professeur à les lever.

En prenant la peine de comparer cette édition aux précédentes, on reconnaîtra que je n'ai épargné aucun soin, négligé aucun conseil pour rendre ce Traité digne de l'approbation des savans et des professeurs.

Les travaux récemment publiés par Fourier, MM. Cauchy, Sturm, et les ouvrages de MM. Lefébure de Fourcy, Mayer et Choquet, m'ont conduit à étendre beaucoup la partie algébrique; et pour la mettre au niveau des connaissances actuelles, j'ai été obligé de refaire presque en entier le second volume. J'ose espérer que l'on trouvera que je ne suis pas resté au-dessous de la tâche qui m'était imposée.





# TABLE DES MATIÈRES

## CONTENUES DANS LE 1<sup>er</sup> VOLUME.

### LIVRE I<sup>er</sup>.

#### ARITHMÉTIQUE.

- CHAP. I. *Nombres entiers*, p. 1; système de numération, 1, addition 9, soustraction, 11; multiplication, 14; division, 19; diviseurs communs, 29; conditions de divisibilité, 39; preuves des quatre règles, 43.
- CHAP. II. *Nombres fractionnaires*, p. 45; fractions décimales, 55; approximations et périodes, 61; nombres complexes, système des poids et mesures, 69.
- CHAP. III. *Puissances et Racines*, p. 80; racines carrées, 81; racines cubiques, 89.
- CHAP. IV. *Rapports, équidifférences et proportions*, p. 94, règles de trois, 98, de société, 105; d'intérêt, 106, d'escompte, 108; conjointe, 108; progressions, 110; logarithmes, 114, rapports des poids et mesures, 126; table des diviseurs des nombres, 127.

### LIVRE II.

#### ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

- CHAP. I. *Calculs algébriques*, p. 128; réduction, addition et soustraction, 130, multiplication, 131; division, 136, fractions, diviseurs communs, 141.
- CHAP. II. *Équations du 1<sup>er</sup> degré, à une seule inconnue*, p. 146; remarques sur les solutions des problèmes, 156; équations à plusieurs inconnues, 160; inégalités, 169, problèmes indéterminés, 172, règle d'alliage, 170.
- CHAP. III. *Puissances et Racines des monomes*, p. 187; exposants négatifs et fractionnaires, 191; racines carrées et cubiques, 195, équations du second degré, 200.
- CHAP. IV. *Rapports, proportions*, p. 207, progressions, 209, logarithmes, 211, Règles d'intérêt, 217, annuités, 219, escompte, 211.

## LIVRE III.

## GÉOMÉTRIE

- CHAP. I. *Des lignes, des droites, angles et triangles*, p. 224, mesure des distances, 231; du cercle, mesure des arcs et des angles, 234; perpendiculaires, obliques et parallèles, 239, cordes perpendiculaires et parallèles, tangentes, 246; intersections des cercles, 249, triangles, 251; mesure des angles dans le cercle, 257; lignes proportionnelles, triangles semblables, 261; polygones, 276; figures semblables, circonférences, 283
- CHAP. II. *Surfaces du polygone et du cercle*, p. 291; comparaisons des surfaces, 299; plans et angles dièdres, 302, angles polyèdres, 309; surfaces des corps, 312, corps semblables et symétriques, 320
- CHAP. III. *Volumes*, p. 325.

## LIVRE III.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

- CHAP. I. *Application de l'Algèbre à la Géométrie*, p. 335; constructions géométriques, 340, sur les lignes en géométrie, 352
- CHAP. II. *Trigonométrie rectiligne*, sinus, cosinus, tangentes, p. 361; formules générales, 368; tables de sinus, cosinus, . . . , 374; résolution des triangles, 377; problèmes, 384.
- CHAP. III. *Équation de la ligne droite et du Cercle*, p. 392 et 403, transformation de coordonnées, 407
- CHAP. IV. *Sections coniques*, Ellipse, p. 413; hyperbole, 416; parabole, 418; section d'un cône par un plan, 420; tangentes, 423; du centre et des diamètres, 442, discussion des équ. du second degré, 456; génération des lignes courbes, 485, problèmes qui passent le second degré, 492, quelques courbes, 498
- TABLE DES CORDES, p. 506.



## ERRATA du premier Volume.

Pages	16, ligne	$19 \dots = 9 \times 16 = 7 \times 16$
20,	avant-dernière,	$(6 : 2 \times 3) \times 4$ , lisez $6 : (2 \times 3) \times 4$
31,	10, en remontant,	1, 1, 2, 2, 2, lisez 3, 1, 2, 2, 2
48,	18,	$\frac{3}{4} < \frac{1}{2}$ lisez $\frac{1}{4} > \frac{2}{7}$
54,	11, en remontant	$\frac{2}{3}$ lisez $\frac{1}{3}$
60,	dernière,	61,37729 lisez 61,377269
66,	dernière, page	43, lisez page 40
67,	4, 13 <sup>2</sup>	lisez 10 <sup>3</sup>
68,	15,	$\frac{1}{4}$ lisez $\frac{3}{4}$
77,	24, 12 . 10 . 10 $\frac{1}{4}$	lisez 12 . 18 . 10 $\frac{1}{2}$
81,	20, 5 <sup>12</sup> = 5 <sup>0.12</sup>	lisez 5 <sup>12</sup> = 5 <sup>1.12</sup>
193,	dernière,	3,78 <sup>2</sup> lisez 3 x 78 <sup>2</sup>
107,	5, en remontant,	210 jours, lisez 216 jours
134,	9, en remontant	$(10^4 + 4^2)$ lisez $(10^3 + 4^2)$
170,	2, en remontant	$\frac{a}{b^2} < \frac{b}{a}$ lisez $\frac{a}{b^2} < \frac{b}{a^2}$
189,	2, $\sqrt{\frac{a}{by}}$	lisez $\sqrt{\frac{a}{by}}$
193,	5, $c^{\frac{-p}{r}}$	lisez $c^{\frac{-p}{r}}$
194,	6, $a^{\frac{n-p}{m}}$	lisez $a^{\frac{n+p}{m}}$
211,	11, après inconnu,	ajoutez $l$ , $a$ et $q$ étant donnés
214,	6, nombres,	lisez membres

# COURS COMPLET

DE

## MATHÉMATIQUES PURES.

---

### LIVRE PREMIER.

#### ARITHMÉTIQUE.

---

##### I. DES NOMBRES ENTIERS.

---

##### *Notions préliminaires Système de Numération.*

1. Concevons une réunion de choses semblables : pour en distinguer la grandeur, et la faire apprécier par le discours aux hommes qui n'en ont aucune connaissance, on en prend une portion définie et bien connue, mais arbitraire ; cette portion se nomme UNITÉ, il faut ensuite indiquer combien de fois cette unité est contenue dans l'assemblage dont il s'agit, c'est-à-dire combien il faudrait réunir de ces unités pour produire un tout égal à cet assemblage. Cette quotité est ce qu'on nomme un NOMBRE, ou une QUANTITÉ. Ainsi, pour avoir la connaissance précise de la grandeur d'une chose, autrement que par la perception des sens, il faut d'abord acquérir, par les sens, celle d'une portion ou unité, puis celle du nombre de fois que la chose contient cette unité.

T. I.

1



Pour dénommer les différens nombres, on a inventé les mots suivans : *un* désigne l'unité ; *deux* représente la réunion d'une unité avec une autre unité ; *trois*, la réunion de deux unités avec une autre, ou celle d'une unité, plus une, plus encore une ; *trois* plus une donne *quatre*, et ainsi de suite ; l'augmentation successive d'une unité chaque fois engendre les nombres

*zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf.*

qu'on représente par les *chiffres* ou caractères

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

L'idée qu'on doit se faire, par exemple, du nombre *sept*, est *six plus un*, qui, d'après ce qu'on a dit, revient à *cinq plus deux*, ou à *quatre plus trois*, etc.

2. Cette opération par laquelle on réunit plusieurs assemblages en un seul, se nomme *addition*, on l'indique par le mot *plus*, ou par le signe  $+$ , qu'on nomme *positif*, et qui se place entre les nombres qu'on veut ajouter. Le résultat est appelé *la somme* des nombres.

Ajouter plusieurs nombres, ce n'est donc que les réunir en un seul dont on demande la grandeur, ou exprimer combien l'assemblage de plusieurs groupes d'objets identiques contient de fois une portion prise pour unité, et qui a servi de mesure à chaque groupe particulier. Ajouter 2 avec 3 et avec 4, ou trouver la somme 2 plus 3 plus 4, c'est réunir, en un seul, trois systèmes composés l'un de 2, l'autre de 3, et le dernier de 4 choses.

Le signe  $=$  mis entre deux grandeurs indique qu'elles sont égales ;  $2 + 3 + 4 = 9$ , se lit : 2 plus 3 plus 4 égalent 9 ; cette égalité, ou *équation*, exprime l'addition précédente, 2 + 3 + 4 est le premier *membre*, 9 est le second. L'inégalité entre deux quantités se désigne par le signe  $<$  ou  $>$  ; on place la plus grande du côté de l'ouverture :  $4 < 7, 9 > 3$  s'énoncent 4 plus petit que 7, 9 plus grand que 3.

Il suit des notions précédentes, que si l'on augmente ou di-

donne l'un des nombres à ajouter, le résultat sera précisément plus grand ou plus petit de la même quantité : la somme ne serait nullement changée, si l'on augmentait l'un de ces nombres ajoutés, pourvu qu'on diminuât un autre d'autant d'unités. Par exemple :  $4 + 7$  surpasse  $4 + 5$  de 2, parce que 7 surpasse 5 de 2 ; mais  $4 + 7 = 6 + 5 = 2 + 9 = 3 + 8$ .

3. Il arrive souvent que les nombres qu'on veut ajouter sont égaux entre eux, tels que  $2 + 2 + 2 + 2 = 8$  : cette espèce d'addition prend le nom de MULTIPLICATION, et s'énonce ainsi : 2 répété 4 fois, ou 4 fois 2, ou enfin 2 multiplié par 4 ; on l'écrit  $2.4$ , ou  $2 \times 4$  : les nombres 2 et 4 se nomment les *facteurs* ; 2 est le *multiplicande*, 4 le *multiplicateur*, et le résultat 8 le *produit*.

4. L'addition et la multiplication ont leurs opérations inverses. Dans l'addition,  $5 + 4 = 9$ , on demande la somme 9 des deux nombres données 5 et 4. Dans la soustraction, ce résultat 9 est donné ainsi que l'un des nombres, tel que 5, et l'on demande l'autre 4 ; c'est-à-dire qu'il faut trouver quel est le nombre 4, qui, ajouté à 5, donne la somme 9. Cette opération, qui consiste à recomposer les deux systèmes 5 et 4, qui avaient été réunis en un seul 9, revient visiblement à retrancher 5 de 9, ce qu'on marque par le signe —, qu'on énonce *moins*, et qu'on place entre les nombres, devant celui qu'on veut soustraire :  $9 - 5 = 4$ . Le signe — s'appelle aussi *négalif*.

Concluons de ce qu'on a vu pour l'addition, que, 1°. si l'on augmente seulement le nombre à soustraire d'une ou plusieurs unités, le résultat sera diminué d'autant ; 2°. si l'on augmente ou diminue les deux nombres données de la même quantité, le résultat demeurera le même ; 3°. enfin, le résultat de la soustraction de deux nombres marque la quantité dont l'un surpasse l'autre, et c'est ce qui a fait donner à ce résultat le nom de *différence*, *excès* ou *reste*.

5. Dans la multiplication, les deux facteurs sont donnés, et l'on cherche leur produit ; mais si, connaissant ce produit et l'un des facteurs, on se propose de trouver l'autre facteur, cette opération est une division. On a  $2 \times 4 = 8$  ; 8 est le résultat

cherché de la multiplication de 2 par 4. Dans la division, contraire, on donne 8 et 4, et l'on cherche 2, c'est-à-dire qu'on demande quel est le nombre qui, répété 4 fois, produit 8.

On écrit ainsi cette division,  $\frac{8}{4}$  ou  $8 : 4 = 2$ , qu'on énonce *8 divisé par 4*; 8 est le *dividende*, 4 le *diviseur*; le résultat cherché 2 est le *quotient*: en sorte que *produit* et *dividende* sont des mots qui désignent le même nombre, ainsi que *diviseur* et *multiplicateur*, et que *quotient* et *multiplicande*; seulement l'emploi de ces mots dépend du calcul que l'on a en vue.

6. Avant d'enseigner les moyens d'exécuter ces quatre opérations sur des grandeurs données, il faut former un langage propre à énoncer tous les nombres, et imaginer des caractères pour les désigner: c'est ce qu'on nomme le *système de la numération*.

Au premier abord il semble nécessaire de créer une multitude infinie de mots pour dénommer tous les nombres, et autant de caractères ou signes pour les représenter par l'écriture. Mais les inventeurs eurent une idée ingénieuse qui les dispensa de recourir à une aussi grande quantité de mots et de chiffres: cette idée consiste à grouper les nombres par dix, et à dénommer et écrire ces groupes à part. Ainsi ils sont convenus qu'un assemblage de dix unités serait appelé *dix*, ou une *dixaine*, et de nombrer les dixaines comme ils avaient fait les unités; en sorte qu'une dixaine, deux dixaines, trois dixaines..... neuf dixaines, ou ce qui équivaut *dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, septante, octante* et *nonante*, joints successivement aux neuf unités simples, permirent de compter jusqu'à *nonante-neuf unités*.

De même, ils ont fait un groupe de dix dixaines qu'ils ont appelé *cent*, ou une *centaine*, et ils ont compté une, deux, trois..... centaines, comme ils comptaient les unités et les dixaines, savoir: une centaine ou *cent*, deux centaines ou *deux cents*, trois centaines ou *trois cents*..... *neuf cents*. Ces dénominations permirent donc de compter jusqu'à *neuf cent*

huit-cent-neuf unités, en joignant ensemble les nombres formés de centaines, de dizaines et d'unités.

Dix centaines furent ensuite appelées *un mille*, et l'on forma les énonciations *deux mille, trois mille..... neuf mille*, selon la même méthode d'analogie.

Pour transporter cette heureuse invention dans l'écriture, on convint qu'un *chiffre placé à la gauche d'un autre, vaudrait dix fois plus que s'il occupait la place de ce dernier*. De là on conclut qu'on mettrait au premier rang à droite les unités simples; au rang suivant à gauche, les dizaines; à la troisième place, les centaines; à la quatrième, les mille, etc. Ainsi l'expression 23 représente deux dizaines et trois unités, ou vingt-trois; de même 423 équivaut à l'énoncé quatre cent vingt-trois. Et comme le nombre peut n'avoir pas d'unités, ou de dizaines, etc., on emploie le chiffre 0, qui n'a par lui-même aucune valeur, mais qu'on écrit à la place des chiffres qui manquent, pour conserver aux autres leur rang. Par exemple, 20, 400, 507, valent vingt, quatre cents, cinq cent sept.

Il convient d'ajouter que l'usage a prévalu, pour énoncer les nombres représentés par 11, 12, 13, 14, 15, 16, de dire *onze, douze, treize, quatorze, quinze et seize*, au lieu de dire dix-un, dix-deux, ... dix-six, comme on devrait le faire d'après la convention générale, ainsi qu'on dit dix-huit, vingt-un, trente-deux, etc..... Au lieu de septante, octante et nonante, on dit plus ordinairement *soixante-dix, quatre-vingt et quatre-vingt-dix*, énoncés moins conformes aux règles que nous avons indiquées, et cependant plus usités.

Cela posé, lorsqu'on aura écrit un nombre quelconque, tel que 537, pour l'augmenter de 1, il suffit visiblement d'ajouter 1 au chiffre à droite, on a  $537 + 1 = 538$ : de même  $538 + 1 = 539$ . Si ce chiffre à droite est un 9, on le remplacera par un zéro, en faisant frapper l'augmentation de 1 sur le chiffre du second rang:  $539 + 1 = 540$ , car  $530 + 9 + 1 = 530 + 10 = 540$ ; et si le chiffre du second ordre est lui-même un 9, alors on remplacera ces deux chiffres 9 par des zéros, en augmentant de 1 le chiffre du troisième rang:  $2599 + 1 = 2600$ ; car



$2500 + 99 + 1 = 2500 + 100$ , et ainsi de suite :  $12999 + 1 = 13000$ ;  $509 + 1 = 510$ ;  $10999 + 1 = 11000$ . Tout nombre étant engendré par l'addition répétée de l'unité, il résulte de là qu'on peut écrire tous les nombres à l'aide de dix caractères (\*).

(\*) Le même principe peut servir à écrire tous les nombres avec plus ou moins de dix caractères; par exemple, si l'on n'a que les quatre chiffres 0, 1, 2 et 3, il faudra qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre vaille quatre fois plus que s'il occupait la place de ce dernier : alors 10 exprimera quatre, 11 cinq, 12 six, 13 sept, 20 huit, 21 neuf, 200 trente-deux, etc.

Lorsqu'un nombre est écrit dans cette hypothèse, on éprouve, pour l'énoncer, plus de difficulté que dans le système décimal, parce qu'il n'y a plus de concordance avec le langage, par exemple, pour lire (3120), on observera que le 2 vaut  $4 \times 2008$ , le 1 vaut  $1 \times 4 \times 4$  ou 16, le 3 vaut  $3 \times 4 \times 4 \times 4$  ou 192 : ainsi (3120) base 4, vaut  $8 + 16 + 192$ , ou 216. De même si la base est 5, c'est-à-dire si l'on ne se sert que des cinq chiffres, 0, 1, 2, 3 et 4, chaque chiffre vaudra cinq fois plus que s'il occupait la place à sa droite; par exemple (4123), exprimé dans ce système à cinq chiffres, vaut  $3 + 2 \times 5 + 1 \times 25 + 4 \times 125$ , ou  $3 + 10 + 25 + 500$ , ou enfin 538.

Donc il faut, en général, former les puissances successives de la base, et multiplier le chiffre du second rang par la base, celui du troisième par le carré de la base, celui du quatrième par le cube, etc.; en ajoutant ces produits, on a la valeur de la quantité proposée. Ainsi (20313) base 4 = 567, (4010) base 5 = 505, (35151) base 6 = 5035 = 6814 base 9.

Si l'on fait attention au calcul ci-dessus, on verra qu'on peut aussi le faire comme il suit : prenons pour exemple (4123) base 5; multiplions le chiffre 4 par 5, et ajoutons le 1 qui est à droite, nous aurons 21, multiplions 21 par 5, et ajoutons le 2 du second rang, nous aurons 107, enfin multiplions par 5, et ajoutons 3, il viendra 538 pour la valeur cherchée. Il est en effet évident que par là le chiffre 4 a été multiplié trois fois consécutives par 5, que le 1 l'a été deux fois, et le 2 une fois : l'ordre des opérations est ici différent; mais elles sont au fond les mêmes que ci-dessus, et elles conduisent plus facilement au résultat.

Réciproquement cherchons les chiffres qui expriment le nombre 538 dans le système qui a cinq caractères : pour cela, supposons ce résultat connu et tel que (4123), il s'agit de ce qu'on a dit ci-dessus, qu'en formant

$$4 \times 5 + 1 = 21, \text{ puis } 21 \times 5 + 2 = 107, \text{ enfin, } 107 \times 5 + 3 = 538,$$

le calcul doit reproduire le nombre proposé. Donc, si l'on divise 538 par 5, le reste 3 sera le chiffre du premier rang, et le quotient 107 sera la valeur



7. Que la numération parlée ait précédé la numération écrite, c'est ce qui n'est point douteux, du moins pour les petits nombres. Mais dans celle-ci, il était si facile de s'élever à des nombres immenses par la seule juxta-position des chiffres les uns près des autres, et les opérations de l'Arithmétique ont dû produire ces résultats considérables, qu'on n'a pas tardé à re-

des autres chiffres. De même, divisant 107 par 5, le reste 2 sera le chiffre du second rang, et le quotient 21 la valeur des autres chiffres, et ainsi de suite. Il est clair qu'ici on ne fait que décomposer les opérations qu'on avait faites.

Donc, en général, pour traduire un nombre donné d'un système de numération dans un autre, il faut diviser ce nombre par la nouvelle base, puis diviser le quotient par cette base, puis ce second quotient encore par la base, etc., jusqu'à ce qu'on tombe sur un quotient moindre que cette base. La suite des restes écrits successivement à partir de la droite, dans l'ordre où on les a obtenus, formera l'expression cherchée, le dernier quotient sera le chiffre de l'ordre le plus élevé. Ainsi pour écrire 567 avec 4 caractères, je divise 567 par 4, et j'obtiens le quotient 141 et le reste 3 : je divise encore 141 par 4 ; il vient 35 au quotient, et le reste 1 ;  $\frac{35}{4}$  donne 8 et le reste 3, enfin,  $\frac{8}{4} = 2$ , le reste est 0. Rassemblons les restes successifs 3, 1, 3, 0, et le dernier quotient, écrits en ordre renversé, et nous aurons (20313) base 4 = 567 base 10.

On verra de même que, dans les systèmes à 6, 9 et 12 caractères, le nombre 5036 est exprimé par (35151), (6814) et (2ab7) ; on désigne ici par *a* et *b* les nombres dix et onze dans le système duodécimal. Ce dernier système présente des avantages marqués sur le decimal, à cause du grand nombre de diviseurs de 12 ; mais il serait trop difficile de l'établir maintenant, parce qu'il faudrait changer entièrement nos usages, et même les dénominations auxquelles nous sommes familiers dès l'enfance. V. l'Arith. polit. de Buffon, chap. XXVII.

Tout ce qu'on vient de dire peut être exprimé plus simplement en caractères algébriques. Soient *i*, *h*, *g*, . . . *c*, *b*, *a*, les chiffres consécutifs, en nombre *n*, qui expriment un nombre *N*, dans un système de numération dont la base est *x*, c'est-à-dire que chaque chiffre vaut *x* fois plus que s'il occupait la place qui est à sa droite ; on a

$$N = ix^{n-1} + hx^{n-2} + \dots + cx^2 + bx + a,$$

équation d'où l'on tire tous les théorèmes énoncés dans cette note.

connaître que l'écriture des nombres n'avait besoin d'aucune modification pour s'appliquer à tous les besoins, tandis que le langage adopté p. 4 ne suffisait pas pour énoncer les quantités quand leur grandeur était exprimée par plus de quatre chiffres. Et observez que si l'on eût continué de donner à chaque place occupée par un chiffre une dénomination particulière, ainsi qu'on l'a fait jusqu'à quatre chiffres, unités, dixaines, centaines et mille, on serait retombé dans l'inconvénient d'employer une multitude infinie de mots, puisqu'il pouvait y avoir une multitude infinie de chiffres contigus. Voici le parti auquel on s'arrêta pour éviter cet inconvénient.

On convint de séparer les chiffres par groupes de trois en trois (\*), en commençant par la droite ; puis d'énoncer chaque tranche à part, comme si elle était seule, en ajoutant seulement à chacune un mot propre à la dénommer. Ces tranches successives sont appelées *unités*, *mille*, *millions*, *billions* ou *milliards*, *trillions*, etc. Ainsi pour énoncer le nombre suivant,

trillions,	bill.	mill.	mille,	unités
12,	453,	227,	539,	804,

on appellera chaque tranche respective des noms trillions, billions, etc., après avoir énoncé la valeur numérique de chacune ; ainsi on lira 12 trillions, 453 billions, 227 millions, 539 mille, 804 unités.

Comme il pourrait y avoir une infinité de tranches, il est clair qu'on aurait encore besoin, pour l'énonciation, d'une infinité de mots, et que la difficulté n'est que reculée. Mais ce langage permettant d'appeler des quantités d'une grandeur immense, et qui dépassent tous ceux qu'on peut employer, la convention satisfait à tous les besoins. D'ailleurs quand un

---

(\*) On aurait également pu composer les tranches de 2 ou de 4 chiffres, mais, dans un nombre donné, il y aurait eu plus de tranches dans un cas et moins dans l'autre, qu'en les formant de 3 chiffres. En examinant les limites des nombres qui sont d'un usage plus fréquent, il est aisé de voir qu'on a pris un milieu convenable entre ces partis.

nombre excède une certaine limite, l'énoncer ne sert à rien, et n'en peut faire concevoir la grandeur.

Cette idée admirable d'attribuer aux chiffres des *valeurs de position*, indépendamment de leur valeur propre, est si simple, qu'il ne faut pas s'étonner qu'elle soit venue à l'esprit des Indiens, qui nous l'ont transmise par le secours des Arabes ; mais bien plutôt qu'il y ait eu des nations puissantes et éclairées qui ne les aient pas eues, ou du moins adoptées des peuples voisins. Les Romains, dont le système de numération parlée était conforme au nôtre, avaient un mode d'écriture très différent. Les Grecs avaient aussi leur système de chiffres tout-à-fait distinct (\*).

### *De l'Addition.*

8. Pour ajouter deux nombres, tels que 5 et 4, nous avons vu (2) qu'il faut ôter à l'un de ces nombres successivement chacune des unités dont il est composé pour les joindre à l'autre, opération qui revient à ceci :

(\*) Les Romains représentaient ainsi les nombres.

I un.	L cinquante.	C cent
II deux.	X dix.	D ou IJ cinq cents
III trois, etc.	V cinq.	M ou CII mille.

Ces caractères suffisaient pour exprimer les nombres ; on ajoutait les valeurs propres à chaque chiffre, quand ces valeurs allaient en décroissant de grandeur numérique de gauche à droite ; mais si un chiffre était précédé d'un autre qui fût moindre, la valeur de celui-ci devait au contraire être soustraite. En voici quelques exemples

VI six. XVI seize. LX soixante. CX cent-dix. DC six cents.  
 IV quatre. XIV quatorze. XL quarante. XC nonante. CD quatre cents.

On changeait aussi les unités en mille en mettant un trait au-dessus des chiffres, on écrivait ainsi 10000,  $\bar{X}$  ou CCICD ; 100000,  $\bar{C}$  ou CCCICD, 2000000 MM.

Le système de la numération écrite des Grecs était aussi mal imaginé que

$$5 + 4 = 6 + 3 = 7 + 2 = 8 + 1 = 9.$$

Mais on sent que, pour des nombres un peu grands, ce procédé serait impraticable; nous ne les prescrivons donc que pour des nombres d'un seul chiffre, et nous supposons même que l'habitude a appris à connaître de suite le résultat,  $5 + 4 = 9$ ,  $3 + 8 = 11$ , et tous les autres de même sorte.

Pour trouver la somme des deux nombres 24 et 37, décomposons-les d'abord en  $20 + 4$  et  $30 + 7$ ; la somme cherchée est  $20 + 30 + 4 + 7$ . Or, les deux premières parties reviennent visiblement à 2 dizaines plus 3 dizaines, ou 5 dizaines; ainsi la somme est  $50 + 11$ , ou  $50 + 10 + 1$ , ou enfin  $60 + 1 = 61$ .

On voit qu'il faut réunir séparément les dizaines et les unités des nombres proposés; ce raisonnement est général.

Par exemple, prenons  $3731 + 349 + 12487 + 54$ , en faisant séparément la somme des unités, puis des dizaines, des centaines, etc., on aura 15 mille + 14 centaines + 20 dizaines + 21 unités, ou  $15000 + 1400 + 200 + 21$ , mais, opérant de même sur ces derniers nombres, on a 16 mille + 6 centaines + 2 dizaines + 1, ou 16621. Ce calcul se fait plus commodément en écrivant, comme on le voit ci-contre, les nombres les uns au-dessous des autres, et faisant correspondre, dans une même colonne ver-

$$\begin{array}{r} 3731 \\ 349 \\ 12487 \\ 54 \\ \hline 16621 \end{array}$$

celui des Romains; les unités, dizaines, centaines étaient désignées par les lettres consécutives de l'alphabet; savoir

m vaut 1	l vaut 10	c vaut 100
$\bar{a}$ 2	$\bar{u}$ 20	$\bar{d}$ 200
$\bar{b}$ 3	$\bar{x}$ 30	$\bar{t}$ 300
$\bar{c}$ 4	$\bar{m}$ 40	$\bar{q}$ 400
$\bar{e}$ 5	$\bar{v}$ 50	$\bar{q}$ 500
$\bar{f}$ 6	$\bar{z}$ 60	$\bar{x}$ 600
$\bar{z}, \bar{z}$ 7	$\bar{o}$ 70	$\bar{d}$ 700
$\bar{s}$ 8	$\bar{o}$ 80	$\bar{c}$ 800
$\bar{t}, \bar{o}$ 9	$\bar{c}$ 90	$\bar{d}$ 900

Les mille se denotent par un arcant sous les lettres. Pour donner un exemple de ces chiffres  $\text{mccc}$  signifiait  $1 + 3 + 100 + 1 + 50$ , ou 144. De même,  $\text{mccclxxv}$  = 1605,  $\text{Lxxv}$  = 1525. V. Delandier, Arithmétique universelle, T. 2.

ticale, les chiffres du même ordre. La somme des nombres de chaque colonne doit être écrite au bas, si elle ne passe pas 9; autrement on n'en pose que les unités, et on réserve les dizaines pour les ajouter, comme simples unités, avec les nombres de la colonne qui suit à gauche, ce qui détermine à commencer le calcul par la colonne à droite.

Voici plusieurs exemples d'addition.

Pour le premier, on fera ainsi le calcul :  $3 + 8$  font 11,  $11 + 7$  valent 18,  $18 + 7$  égalent 25, somme des unités  $3 + 8 + 7 + 7$  : on posera 5 sous le trait, au premier rang à droite, et on joindra les 2 dizaines à la colonne suivante : puis on dira 2 plus 8 font 10, plus 1 font 11, plus 8 valent 19, plus 2 font 21; on pose 1, et on retient 2 pour joindre aux centaines.  $2 + 7 = 9$ ,  $9 + 3 = 12$ ...; on a 26 centaines, on pose 6 et on retient 2; enfin on trouve 24 à la 4<sup>e</sup> colonne : on pose le 4 et on avance le 2, c'est-à-dire qu'on écrit 24 mille. La somme est 24 615.

$$\begin{array}{r} 5\ 783 \\ 4\ 318 \\ 5\ 987 \\ 8\ 527 \\ \hline 24\ 615 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 77\ 256 \\ 7\ 388 \\ 9\ 763 \\ 90\ 257 \\ \hline 181\ 164 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10\ 376\ 786 \\ 789\ 632 \\ 589 \\ 73 \\ \hline 11\ 167\ 080 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5\ 784\ 201 \\ 749\ 832 \\ 14\ 378\ 539 \\ \hline 20\ 912\ 572 \end{array}$$

### De la Soustraction.

9. L'habitude d'additionner suffit pour trouver la différence entre les nombres simples, par exemple, le nombre qui, ajouté à 3, donne 7 pour somme, est 4 : ainsi  $7 - 3 = 4$ . On peut aussi parvenir au résultat, en ôtant de 7 autant d'unités que 3 en contient;  $7 - 3 = 6 - 2 = 5 - 1 = 4$ . Accordons par conséquent qu'on sache faire la soustraction des petits nombres.

Prenons cet exemple plus composé,  $695 - 243$ . Il est visible que, si l'on connaissait le nombre qui ajoute à 243 donne 695 pour somme, 3 + les unités de ce nombre, 4 + ses dizaines; 2 + ses centaines devraient reproduire 695; on écrira donc les nombres proposés comme

$$\begin{array}{r} 695 \\ 243 \\ \hline 452 \end{array}$$



pour l'addition, le plus petit en-dessous; puis on retranchera chaque chiffre inférieur de celui qui est au-dessus : on dira  $5 - 3 = 2$ ,  $9 - 4 = 5$ ,  $6 - 2 = 4$ , et 452 sera la différence cherchée.

Mais il peut arriver que le chiffre inférieur surpasse le supérieur. Dans l'exemple ci-contre, on ne peut ôter 8 de 7. Il est clair qu'alors 36 147 devant être la somme de 19 328 + le nombre cherché, en faisant la somme de la 1<sup>re</sup> colonne, 8 + les unités inconnues, ont donné, non pas 7, mais 17 pour somme; et qu'on a retenu la dizaine pour la joindre à la colonne suivante. On doit donc dire, non pas  $7 - 8$ , mais  $17 - 8 = 9$ , et écrire ce chiffre 9 au rang des unités. Mais, en continuant l'addition, la colonne suivante est formée de la dizaine retenue, des chiffres 4, 2, et des dizaines cherchées; et ajoutant celles-ci à 2 et à la retenue 1, on doit produire 4 : il ne faut donc pas dire  $4 - 2$ , mais  $4 - 3 = 1$ , qu'on posera aux dizaines. De même pour les centaines, au lieu de  $1 - 3$ , on dira  $11 - 3$  reste 8, qu'on posera; mais on retiendra 1 pour ajouter au 9 suivant; ainsi  $6 - 10$ , ou plutôt  $16 - 10 = 6$ , et on retiendra 1;  $3 - 2 = 1$ .

En général, lorsque le chiffre supérieur sera le plus faible, on l'augmentera de dix, puis on retiendra un pour le joindre au chiffre inférieur qui est à la gauche. On remarquera qu'en effet le nombre supérieur est augmenté par là de 10, mais qu'on augmente pareillement l'inférieur de 10, ce qui n'altère nullement la différence (n° 4).

Pareillement, dans l'exemple ci-contre, on dira :  $9 - 3 = 6$ ,  $2 - 7$  ne se peut;  $12 - 7 = 5$ , et je retiens 1;  $4 - 6$  (au lieu de  $4 - 5$ ) ne se peut,  $14 - 6 = 8$ , et je retiens 1;  $0 - 9$  (au lieu de  $0 - 8$ ) ne se peut,  $10 - 9 = 1$ ;  $0 - 8$  ne se peut;  $10 - 8 = 2$ , etc

Voici quelques autres exemples de soustraction.

3 000	6 000	6 000	150 001	3 375 831
1 296	4 000	5 999	76 385	106 943
1 704	2 000	1	73 616	3 168 888



10. Lorsqu'on veut retrancher un nombre de l'unité suivie d'autant de zéros que ce nombre a de chiffres, c'est-à-dire de 1000... il faut retrancher le chiffre des unités de 10, et les autres chiffres de 9. Ainsi,  $1000 - 259$ , se trouve en disant  $10 - 9 = 1$ ; puis  $9 - 5 = 4$ ;  $9 - 2 = 7$ , et on a  $1000 - 259 = 741$ . De même  $1\ 000\ 000 - 279\ 953 = 720\ 047$ . Ce calcul est si facile, qu'il mérite à peine d'être compté pour une opération; on s'en sert pour réduire toute soustraction à une addition; voici comment.

Soit demandée la différence  $3487 - 259$ . Il est clair qu'en décomposant  $3487$  en  $2487 + 1000$ , la différence avec  $259$  n'est pas changée, et on aura  $2487 + 1000 - 259$ , ou  $2487 + 741 = 3228$ . Ainsi, au lieu de soustraire  $259$ , on a réellement ajouté  $741$ . On voit donc qu'on peut retrancher un nombre d'un autre, en soustrayant le 1<sup>er</sup> de 1 suivi d'autant de zéros qu'il a de chiffres, et ajoutant le résultat au 2<sup>e</sup> nombre donné, pourvu qu'on retranche ensuite une unité de l'ordre immédiatement supérieur à celui du nombre à soustraire. On indique cette dernière soustraction par  $\bar{1}$  placé à l'ordre de chiffres dont on vient de parler; ainsi l'opération ci-dessus revient à  $3487 - 259 = 3487 + \bar{1}741$ , calcul qu'on effectue comme on le voit ci-contre. Observez que  $\bar{1}741$ , ajouté au nombre  $259$ , donne zéro, ou  $\bar{1}741 + 259 = 0$ . La quantité  $\bar{1}741$  est ce qu'on nomme le *complément arithmétique* de  $259$ . En général, pour former le *complément arithmétique* d'un nombre, il faut retrancher tous ses chiffres de 9, et celui des unités de 10, puis placer  $\bar{1}$  à gauche. Le complément d'un nombre ajouté à ce nombre donne zéro pour somme. Au lieu de retrancher un nombre, on peut ajouter son complément arithmétique.

Lorsqu'il y a plusieurs additions et soustractions successives, l'usage des compléments peut présenter des avantages; par exemple,  $32731 + 5729 - 371 - 4834$ , prend la forme ci-contre, attendu que les compléments de  $371$  et  $4834$  sont  $1629$  et

32 731	32 731
5 729	5 729
7 629	— 371
75 166	— 4 834
33 255	Reste 33 255

15166. Nous recommandons toutefois d'éviter l'emploi du complément, et de s'exercer à faire les additions et soustractions colonne par colonne. C'est ainsi que, dans notre exemple, après avoir dit  $9 + 1 = 10$ ,  $4 + 1 = 5$ , on retranchera 5 de 10 et on posera 5 au rang des unités du reste; puis  $3 + 2 = 5$ ,  $7 + 3 = 10$ ;  $5 - 10$  ne se peut; donc  $15 - 10 = 5$ , qu'on pose aux dizaines, en retenant 1 pour joindre aux centaines soustractives, etc.

### De la Multiplication.

11. Nous écrivons le multiplicande le premier; ainsi  $4 \times 5 \times 2$  signifie qu'on répètera 4 cinq fois, et que le produit 20 devra être pris 2 fois.

Puisque  $4 \times 5$  n'est autre que  $1 + 1 + 1 + 1$  répété 5 fois, il suffit de prendre chaque unité 5 fois, ou  $5 + 5 + 5 + 5$ , expression qui revient à 5 répété 4 fois: ainsi,  $4$  fois 5 est égal à 5 fois 4, ou  $4 \times 5 = 5 \times 4$ . Ce raisonnement peut être présenté sous la forme d'un tableau A, composé de 5 lignes, dont chacune contient 4 unités. Il est clair que le nombre des unités est 4 répété 5 fois. Mais, en renversant le tableau, comme on le voit en B, on trouve 5 répété 4 fois; le nombre des unités étant nécessairement le même dans les deux cas, le produit de  $4 \times 5$  est le même que celui de  $5 \times 4$ .

Soit aussi  $5 \times 4 \times 2$ , comme 5 répété 4 fois est.....  $5 + 5 + 5 + 5$ , il reste à prendre 2 fois ce résultat, ou...  $10 + 10 + 10 + 10$ , ou 10 répété 4 fois. Donc  $5 \times 4 \times 2 = 5 \times 2 \times 4$ . On peut donc changer de place les deux derniers facteurs, comme on a vu qu'on pouvait échanger les deux premiers entre eux. Ainsi,

$$5 \times 4 \times 2 = 4 \times 5 \times 2 = 5 \times 2 \times 4 = 2 \times 5 \times 4 = 2 \times 4 \times 5 = 4 \times 2 \times 5,$$

On voit donc qu'on peut intervertir de toutes les manières possibles l'ordre des facteurs sans altérer le produit.

Démontrons ce théorème pour plus de trois facteurs : par exemple , pour  $4 \times 5 \times 3 \times 2 \times 9$ .

Le facteur 9 ayant la dernière place dans le premier produit , prouvons qu'on peut le placer où l'on veut , et d'abord à l'avant-dernier rang , savoir  $4 \times 5 \times 3 \times 2 \times 9 = 4 \times 5 \times 3 \times 9 \times 2$ . En effet , les trois premiers facteurs  $4 \times 5 \times 3$  donnent 60 , et il faut prouver que  $60 \times 2 \times 9 = 60 \times 9 \times 2$  , et c'est ce qui vient d'être démontré. De même dans le produit  $4 \times 5 \times 3 \times 9$  , on peut faire passer le 9 avant le 3 , savoir  $4 \times 5 \times 9 \times 3$  , et ainsi de suite. D'où l'on voit que , sans changer le produit , on peut faire occuper successivement toutes les places au dernier facteur 9 , les autres facteurs restant dans le même ordre

Mais à son tour le nouveau facteur terminal 2 peut être mis à tel rang qu'on veut dans chacun de ces résultats , savoir ,  $4 \times 5 \times 9 \times 3 \times 2 = 4 \times 5 \times 9 \times 2 \times 3 = 4 \times 5 \times 2 \times 9 \times 3 = \text{etc.}$ . Donc en définitive la place de chaque facteur est arbitraire.

12. Lorsqu'il arrive qu'un nombre se multiplie lui-même plusieurs fois consécutives , comme  $3 \times 3 \times 3 \times 3$  , on dit qu'il est élevé à une *Puissance* , dont le degré est marqué par le nombre de facteurs , qu'on appelle *Exposant*. Ici 3 est élevé à la quatrième puissance , ce qu'on indique par  $3^4 = 81$  ; 4 est l'exposant ou le degré. De même  $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ . On donne aussi à la deuxième puissance le nom de *Carré* , et à la troisième le nom de *Cube*.  $7^2$  ou  $7 \times 7 = 49$  est le carré de 7 ;  $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$  est le cube de 7.

Le nombre qui se multiplie ainsi lui-même , ou qui est affecté d'un exposant , se nomme *Racine* ; ainsi 7 est la *racine carrée* , ou *seconde* de 49 , la *racine cubique* ou *troisième* de 343 , la *quatrième* de 2401 , etc. Ces racines s'indiquent par le signe radical  $\sqrt{\phantom{x}}$  , et on place , dans les branches , le nombre qui en marque le degré.

$$7^3 = 343 , \text{ d'où } 7 = \sqrt[3]{343} ; 5^4 = 625 , \text{ d'où } 5 = \sqrt[4]{625} .$$

Lorsqu'il s'agit de la racine 2<sup>e</sup> , on se dispense ordinairement

d'en indiquer le degré, et d'écrire le chiffre 2 sur le *radical*; en sorte que  $\sqrt{\phantom{x}}$  et  $\sqrt[2]{\phantom{x}}$  sont la même chose :  $8^2 = 64$ , donc  $8 = \sqrt{64}$ , 8 est dit la racine, ou la racine carrée de 64.

13. Puisque pour multiplier un nombre (n° 3), il suffit de l'ajouter autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, on voit que, 1°. si l'on multiplie l'un des facteurs par 2, 3, 4... le produit est lui-même multiplié par 2, 3, 4... En effet, si, au lieu de  $3 \times 5$ , je prends  $12 \times 5$ , chaque fois que j'ajouterai 12 au lieu de 3, je prendrai le quadruple de 3, c'est-à-dire que j'aurai pris de trop le triple de 3; le résultat sera donc composé de produit  $3 \times 5$  quadruplé : ainsi,  $12 \times 5$  est quadruple de  $3 \times 5$ , parce que 12 est quadruple de 3. Et aussi pour multiplier 12 par 5, on peut, si l'on veut, multiplier 3 par 5, et ensuite le produit 15 par 4, parce que  $12 = 3 \times 4$ .

De même si l'on divise l'un des facteurs par 2, 3, 4..., le produit sera divisé aussi par 2, 3, 4.

2°. Si l'on multiplie l'un des facteurs, et qu'on divise l'autre par un même nombre, le produit n'est pas changé :  $14 \times 8 = 9 \times 16$ , 14 est double de 7, et 16 l'est de 8.

3°. Lorsque les facteurs sont terminés à droite par des zéros, on peut les supprimer, pourvu qu'à la suite du produit on en mette un pareil nombre. Ainsi  $300 \times 20$  devient  $3 \times 2$ , en ôtant les trois zéros, qu'on restituera à la suite du produit 6; on aura  $300 \times 20 = 6000$ . En effet,  $300 \times 20 = 3000 \times 2$ , car 300 est décuplé (n° 6), et 20 est divisé par 10. Or, dans l'addition de 3000 à lui-même, on voit que les trois zéros demeurent dans la somme comme provenant des trois premières colonnes; la suivante donne  $3 \times 2 = 6$ ; donc 6000 est le produit demandé.

14. Il s'agit maintenant de pratiquer la multiplication de deux nombres donnés, il se présente trois cas.

1<sup>er</sup> CAS. Les deux facteurs n'ayant qu'un seul chiffre chacun. La table suivante, qui est due à Pythagore, se forme en écrivant sur une ligne horizontale les 9 premiers nombres, puis ajoutant chacun d'eux 9 fois successives, on écrit ces produits dans une même colonne verticale. Par exemple,  $4 + 4 = 8$ ,  $8 + 4 = 12$ ,  $12 + 4 = 16$ ,  $16 + 4 = 20$ ,  $20 + 4 = 24$ , etc.



*Table de Pythagore.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Veut-on trouver le produit  $7 \times 5$ , il suit de la génération des divers nombres de ce tableau qu'on cherchera 7 dans la première ligne, et qu'on descendra dans la colonne verticale correspondante, jusqu'à la case qui est dans la ligne horizontale dont 5 est le chiffre initial, cette case porte 35, et on a  $7 \times 5 = 35$ . Il importe de se rendre familiers les produits des nombres simples, afin de ne pas être forcé, chaque fois qu'on veut les obtenir, de recourir à cette table, qui n'est elle-même formée que par des additions successives.

S'il fallait, ainsi que l'exige la définition (3), ajouter le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, l'opération deviendrait presque impraticable pour les grands nombres. Voyons comment on peut la réduire à la multiplication des nombres simples.

2<sup>e</sup> cas. Le multiplicateur n'ayant qu'un seul chiffre. Pour multiplier 2967 par 4, j'imagine, pour un moment, qu'on veuille en effet exécuter l'addition de 2967 pris 4 fois, ainsi qu'elle est faite ci-après. La colonne des unités ne contiendra que le chiffre 7 écrit verticalement 4 fois, ainsi cette somme

sera  $7 \times 4$  ou 28; on posera 8, et on retiendra 2 pour joindre à la colonne des dizaines, formée du chiffre 6 écrit 4 fois. Il faut donc dire  $6 \times 4 = 24$ , et ajoutant la retenue 2, on a 26 : ainsi on posera 6 et on retiendra 2, etc. Cette opération revient donc à multiplier chacun des chiffres du multiplicande par le multiplicateur, en commençant par la droite : on écrit les unités de chaque produit au-dessous du chiffre qui l'a donné, et on retient les dizaines pour les joindre au produit suivant. Ce procédé n'est, à proprement parler, que l'addition même, excepte qu'on se dispense d'écrire plusieurs fois le nombre à ajouter.

$$\begin{array}{r} 2 \ 967 \\ 2 \ 967 \\ 2 \ 967 \\ 2 \ 967 \\ \hline 11 \ 868 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \ 967 \\ 9 \\ \hline 11 \ 868 \end{array}$$

3<sup>e</sup> CAS. Les deux facteurs étant composés de plusieurs chiffres.

Multiplier 2327 par 532, c'est répéter 2327, 2 fois, 30 fois, 500 fois, et ajouter le tout.

1<sup>o</sup>. On multipliera d'abord 2327 par 2, comme on vient de le dire; 2<sup>o</sup>. pour former le produit par 30, on multipliera 2327 par 3, et on ajoutera un zéro à droite du produit, d'après ce qu'on a vu (13, 3<sup>o</sup>.); enfin, pour répéter 500 fois 2327, on multipliera par 5, et on ajoutera deux zéros. L'opération prend donc la disposition ci-dessus, dans laquelle on observe que, comme les zéros n'influent en rien sur l'addition, on s'en dispense de les écrire : alors le produit par 3 a été simplement reculé d'un rang vers la gauche, et le produit par 5 de deux rangs. On voit donc qu'il faut multiplier l'un des facteurs tour à tour par chacun des chiffres de l'autre. Chaque produit partiel doit être écrit de manière que ses unités soient placées au même ordre que le chiffre du multiplicateur qui les a données : on ajoute ensuite le tout.

$$\begin{array}{r} 2 \ 327 \\ 532 \\ \hline 4 \ 654 \quad \text{par 2} \\ 69 \ 81 \quad \text{par 3} \\ 1163 \ 5 \quad \text{par 5} \\ \hline 1 \ 237 \ 964 \end{array}$$

La multiplication des nombres composés dépend ainsi du cas où le multiplicateur n'a qu'un chiffre, et celle-ci dépend à son tour du cas où chaque facteur n'a qu'un seul chiffre, c'est-à-dire de la table de Pythagore. Comme il convient d'être très exercé à la pratique de cette opération, nous en mettrons ici quelques exemples.



$$\begin{array}{r}
 886 \ 633 \\
 777 \\
 \hline
 6 \ 206 \ 431 \\
 62 \ 063 \ 31 \\
 620 \ 643 \ 1 \\
 \hline
 688 \ 913 \ 841
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 53 \ 687 \\
 908 \\
 \hline
 429 \ 496 \\
 48 \ 318 \ 3 \\
 \hline
 48 \ 747 \ 796
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5 \ 554 \ 444 \\
 29 \ 765 \\
 \hline
 27 \ 772 \ 220 \\
 333 \ 266 \ 64 \\
 3 \ 888 \ 110 \ 8 \\
 49 \ 989 \ 996 \\
 388 \ 811 \ 08 \\
 \hline
 443 \ 050 \ 225 \ 660
 \end{array}$$

Quant au nombre de chiffres qui composent le produit, supposons qu'on ait à multiplier 3687 par 968; la facteur 968 est  $> 100$  et  $< 1000$ ; ainsi le produit est entre 368700 et 3687000, c'est-à-dire qu'il a 6 ou 7 chiffres. En général le produit de deux nombres est formé d'autant de chiffres qu'il y en a dans les deux facteurs, ou un chiffre de moins. Quand on a 3, 4, ... facteurs, le même raisonnement donne des limites de la grandeur du produit et du nombre de chiffres qui le composent (\*).

### De la Division

15. De même que la multiplication n'est que l'addition répétée du même nombre, on peut considérer la division comme une soustraction répétée, le quotient marquant combien de fois on peut ôter le diviseur du dividende. Si on veut diviser 8 par 2, et qu'on retranche d'abord 2 de 8, puis 2 du reste 6, 2 du reste 4, et enfin 2 de 2, on arrive au reste zéro; 2 ayant pu être soustrait 4 fois de 8, on peut regarder 8 comme composé de 4 fois 2; et par conséquent 4 est le quotient. Il suit de là que le quotient qui marque combien de fois un nom-

(\*) Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  la quotité des chiffres de divers facteurs,  $a, b, c, \dots$ , dont le nombre est  $n$ ; il est clair que  $a < 10^\alpha, b < 10^\beta, c < 10^\gamma \dots$ ; le produit est  $< 10^{\alpha+\beta+\gamma}$ , ou  $abc \dots < 10^m$ , en posant  $m = \alpha + \beta + \gamma$ . D'ailleurs,  $a > 10^{\alpha-1}, b > 10^{\beta-1}, c > 10^{\gamma-1} \dots$ , d'où  $abc \dots > 10^{\alpha+\beta+\gamma-\dots-n}$  ou  $abc \dots > 10^{m-n}$  donc le produit  $abc \dots$  est compris entre  $10^{m-n}$  et  $10^m$ ; il ne peut avoir au-delà de  $m$  chiffres, mais il en a plus de  $m-n$ . Ainsi le produit ne peut avoir plus de chiffres que les facteurs proposés écrits successivement comme s'ils ne formaient qu'un seul nombre, mais il en a plus que cette quotité moins le nombre des facteurs.

bre est répété pour former un produit, indique aussi le nombre de fois que le diviseur est contenu dans le dividende ; ou, ce qui équivaut, le dividende contient le diviseur autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient. Donc si l'on veut former 2 parts égales dans 8 unités, il faut diviser 8 par 2, le quotient 4 exprime la grandeur de chaque part.

Le dividende n'étant autre chose que le produit d'une multiplication dont le diviseur et le quotient sont les deux facteurs, il suit de la définition et des propriétés connues (n° 13) que, 1°. on ne change pas le quotient lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un même nombre le dividende et le diviseur :  $36 : 9$  donne le même quotient que  $72 : 18$  et que  $12 : 3$ .

2°. Si le dividende et le diviseur sont terminés à droite par des zéros, on peut en supprimer à chacun un égal nombre sans altérer le quotient :  $6000 : 200$ , et  $60 : 2$  donnent le même quotient 30. (Voy. p. 16)

3°. Si l'on multiplie seulement le dividende, le quotient sera multiplié par le même nombre ; si l'on multiplie le diviseur, le quotient sera divisé. Qu'il s'agisse, par exemple, de diviser 24 par 3, le quotient sera 8, ou  $24 : 3 = 8$ , mais si l'on double 24, ce quotient sera doublé,  $48 : 3 = 16$  ; et si l'on double 3, le quotient sera réduit à moitié,  $24 : 6 = 4$ . Enfin  $48 : 6 = 8$ , c'est-à-dire que le quotient reste le même quand on double le dividende et le diviseur.

4°. Lorsqu'on veut exécuter plusieurs divisions successives, l'ordre dans lequel on les doit effectuer est arbitraire ; on peut même n'en faire qu'une seule, en prenant pour diviseur le produit de tous les diviseurs. Si l'on veut, par exemple, diviser 24 par 2, et ensuite le quotient 12 par 3 ; on obtient 4 pour résultat ; mais si l'on eût divisé par 3 d'abord, et ensuite par 2, ou bien si l'on eût divisé 24 par  $2 \times 3$  ou 6, on aurait obtenu de même 4. Cela résulte de ce que la division par 2 et par 3 revient à supprimer tour à tour les facteurs 2 et 3 dans 24, qui est le produit de  $2 \times 3 \times 4$ , ou de  $3 \times 2 \times 4$ . Par la même raison,  $(6 \times 4) : (3 \times 2) = (6 : 3) \times (4 : 2) = (6 : 2 \times 3) \times 4$ .

16. Le quotient de  $35 : 7$  est 5, puisque  $35 = 7 \times 5$  ; mais

si l'on veut diviser 38 par 7, on décomposera 38 en  $35 + 3$ , ou  $38 = 7 \times 5 + 3$ , la division ne se fait plus exactement : 35 est seulement le plus grand produit de 7 contenu dans 38, et 3 est le reste de cette division.

Si l'on forme tous les produits consécutifs d'un nombre par 1, 2, 3, ... les résultats sont tous *divisibles* par ce nombre, ou en sont les *multiples*. C'est ainsi que 35 est multiple de 7, ou divisible par 7, tandis que 38 ne l'est point.

En prenant pour dividende et diviseur deux nombres quelconques, on doit donc dire que *le quotient, multiplié par le diviseur, donne un produit qui, ajouté au reste, forme le dividende*. Le reste est d'ailleurs moindre que le diviseur, puisque, si celui-ci y était encore contenu, le produit du diviseur par le quotient ne donnerait pas le plus grand multiple du diviseur contenu dans le dividende.

En multipliant toute l'équation  $38 = 7 \times 5 + 3$ , par un nombre tel que 4, on a  $152 = 28 \times 5 + 12$  : le quotient de la division de 152 par 28, et celui de 38 par 7, est également 5 ; mais le reste 3 est devenu quadruple. *En multipliant le diviseur et le dividende par un même facteur, le quotient n'est pas changé, et le reste est multiplié par ce facteur.*

Soient 34 et 24, deux nombres qui, divisés par 5, donnent le même reste 4, leur différence 10 doit être multiple de 5, car  $34 = 6 \times 5 + 4$ ,  $24 = 4 \times 5 + 4$ , et retranchant ces deux équations, on a  $10 = 2 \times 5$ .

17. La table de Pythagore sert à trouver le quotient, lorsqu'il n'est exprimé que par un seul chiffre, aussi bien que le diviseur. Veut-on diviser 35 par 7, par exemple, on descendra, dans la colonne verticale du nombre 7, jusqu'à la case qui contient 35 ; elle répond à la ligne horizontale qui commence par 5, en sorte que  $35 = 7 \times 5$  ; donc 5 est le facteur ou le quotient cherché.

Pour diviser 65 par 9, comme on ne trouve pas 65 dans la 9<sup>e</sup> colonne, mais 63 et 72, on a  $65 = 7 \times 9 + 2$  : on voit que 7 est le quotient, et 2 le reste. Il faut se rendre ces divisions très familières, afin de ne pas être obligé de consulter la table de Pythagore pour les exécuter.

18. Venons-en aux divisions composées.

1<sup>er</sup> cas. Le diviseur n'ayant qu'un seul chiffre. Soit proposé de diviser 40 761 par 7, c'est-à-dire de trouver un nombre qui, multiplié par 7, reproduise 40 761. Si ce nombre était connu, on le vérifierait en le multipliant par 7, les unités devraient donner le produit 1; en retenant les dizaines pour les joindre au produit suivant, on trouverait de même 6 aux dizaines; le produit des centaines donnerait 7; enfin celui des mille, 40. Le quotient n'a point de dizaines de mille, puisque  $10\,000 \times 7$  donne 70 000, qui surpasse 40 761. Concluons de là que 40 contient le produit de 7 par le chiffre des mille du quotient, et en outre la retenue faite sur les centaines. Le

$$\begin{array}{r} 40.761 \\ 35 \overline{) 57} \\ 56 \phantom{00} \\ \hline 16 \phantom{00} \\ 14 \phantom{00} \\ \hline 21 \phantom{00} \\ 21 \phantom{00} \\ \hline 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 5823 \end{array} \right.$$

plus grand multiple de 7 contenu dans 40 est 35 ou 7 fois 5, et 40 est compris entre les produits de 7 par 5 et par 6; si l'on multiplie 7 par 5000 et par 6000, l'un des produits sera donc moindre, et l'autre plus grand que 40 761; ainsi le quotient est entre 5000 et 6000, c'est-à-dire que le chiffre des mille est 5, donné par le plus grand multiple de 7 contenu dans 40. En retranchant de 40 ce multiple 35, le reste 5 est la retenue faite, dans la multiplication par 7, sur les centaines du quotient. Si donc on joint à ce reste 5 les autres chiffres 761 du dividende, 5761 sera le produit par 7 des parties inconnues du quotient; et pour trouver celles-ci, il ne s'agira que de diviser 5761 par 7, question semblable à la proposée, et qui permet le même raisonnement.

On divisera donc par 7 les centaines 57, ou plutôt le plus grand multiple de 7 renfermé dans 57: le quotient 8 sera le chiffre des centaines du quotient, qu'on posera à droite du 5 qui en est les mille. Observez qu'il est inutile de descendre, près du reste 5, toute la partie 761 du dividende, et que, pour former le dividende partiel 57, il suffisait de descendre près du 5 le chiffre 7 des centaines. En multipliant 8 par 7, et ôtant le produit 56 de 57, le reste 1 est la retenue qui provient des dizaines, en sorte que, si l'on joint 61 à ce reste, 161 est le pro-



deut par 7 des dizaines et des unités du quotient : pour les obtenir, il faut donc diviser 161 par 7, et ainsi de suite. Le quotient demandé est 5823.

On voit qu'on trouve tour à tour chaque chiffre du quotient, en commençant par l'ordre le plus élevé, et qu'il faut sans cesse descendre près du reste le chiffre qui suit dans le dividende, puis prendre le plus grand multiple du diviseur qui est contenu dans le nombre ainsi formé.

Lorsqu'on s'est exercé à ce calcul, on ne tarde pas à reconnaître que, dans une opération aussi simple, il est inutile d'écrire chaque produit à soustraire, parce que la soustraction se fait de suite. Ainsi, après avoir trouvé que  $40 : 7$  donne le chiffre 5 des mille du quotient, on prend 5 fois 7, et on retranche le produit 35 de 40 ; le reste 5 s'écrit sous le 0 du dividende ; on y joint le 7 des centaines, et on divise 57 par 7, etc. L'opération se réduit alors à la forme que nous lui avons donnée ci-contre. Il est même remarquable qu'on peut encore l'abréger, en n'écrivant pas chaque reste pour le joindre au chiffre qui suit dans le dividende : par exemple,  $40 : 7$  donne 5, qu'on écrit sous 40 ; le produit 7 fois 5 ou 35, se retranche de 40, et l'on conserve dans la mémoire le reste 5, pour le joindre au 7 des centaines ;  $57 : 7$  donne 8, qu'on écrit sous les 7 centaines :  $7 \times 8 = 56$ , qui, ôté de 57, donne le reste 1 ; ce 1, joint au 6 dizaines, donne 16 ;  $16 : 7 = 2$ , etc. Ce calcul a la forme très simple que nous avons indiquée ici.

Voici d'autres exemples de ces divisions.

$$\begin{array}{r} 12 \ 538 \\ 6 \ 269 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ - \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 8 \ 765 \\ 1 \ 753 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ - \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 97 \ 587 \\ 13 \ 941 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 7 \\ - \end{array} \right.$$

2<sup>e</sup> cas. *Le diviseur ayant plusieurs chiffres.* Proposons-nous de diviser 1916 par 329. Puisque  $329 \times 10 = 3290$ , qui surpasse le dividende 1916, le quotient est moindre que 10 : ainsi le quotient n'a qu'un seul chiffre ; supposons-le connu, et on le trouvera facilement en faisant les produits successifs de 329 par

1, 2, 3, ... jusqu'à ce que ce produit soit 1916, ou que la différence avec 1916 soit moindre que 329. Soit 5 ce quotient.

1916 étant  $= 329 \times 5 +$  le reste, si l'on multiplie par 5 les unités 9, les dizaines 2 et les centaines 3, et qu'on ajoute le reste, on devra reproduire 1916. Le calcul indiqué ci-contre prouve que les centaines 19 du dividende sont formées, 1°. du produit 15 des centaines 3 du diviseur par le quotient supposé 5, 2°. de la retenue 1 faite sur les dizaines; 3°. de la partie 3 qui provient de l'addition du reste 271.

329	5	1645
Produit.		271
Reste		1916

Il suit de là que, si l'on pouvait ôter de 19 ces deux retenues, le reste 15 serait le produit exact des centaines 3 du diviseur par le chiffre du quotient; et la division de 15 par 3 serait connaître ce chiffre. Mais comme on ne peut ôter de 19 la double retenue qu'on ne connaît pas d'abord, on divise 19 par 3, prenant ainsi pour dividende *un nombre trop grand*: le quotient qu'on trouve peut être fautif; mais il ne peut pêcher que par excès. Dans notre exemple,  $19 : 3$  donne 6; mais comme on trouve que  $6 \times 329 = 1974 > 1916$ , on reconnaît que le quotient supposé est trop fort: on essaie 5; et le produit  $5 \times 329$  est  $1645 < 1916$ , ce qui prouve que 5 n'est pas trop fort, et que par conséquent 5 est le quotient cherché. Otant 1645 de 1916, on trouve le reste 271.

Concluons de là que si le quotient est  $< 10$ , c'est-à-dire n'a qu'un seul chiffre, *il faut supprimer, à droite du dividende et du diviseur, un égal nombre de chiffres, et diviser les parties qui restent; le quotient sera celui qu'on cherche, ou le surpassera; la multiplication servira ensuite à le vérifier (\*)*. Voici quel-

(\*) C'est surtout lorsque le deuxième chiffre vers la gauche du diviseur surpasse 5, que la tentative conduit à poser un quotient trop fort; car, dans la multiplication du diviseur par le quotient pour reproduire le dividende, le produit du premier chiffre à gauche du diviseur doit être ajouté aux dizaines qui ont été retenues. Pour  $1435 : 287$ , par exemple, si l'on dit 14 : 2 donne 7, ce 7 sera trop grand, attendu qu'en multipliant 287 par 7, le produit  $2 \times 7$  des centaines devrait être accru de la retenue 6, provenant de  $87 \times 7$ . Mais si l'on suppose 5 pour quotient, comme  $8 \times 5$  donne 4 à re-



ques exemples de ce calcul. Dans le 1<sup>er</sup>, on divise 72 par 8, mais on trouve, par la multiplication, que le quotient est trop fort, et on le réduit à 8.

$$\begin{array}{r} \text{Produit. } 72 \begin{array}{l} 320 \\ 66 \end{array} \begin{array}{l} 952 \\ 368 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 8 \begin{array}{l} 360 \\ 8 \end{array} \\ \text{Quotient} \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{r} 386 \begin{array}{l} 782 \\ 292 \end{array} \begin{array}{l} 661 \\ 121 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 99 \begin{array}{l} 887 \\ 3 \end{array} \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{r} 823 \begin{array}{l} 945 \\ 742 \end{array} \begin{array}{l} 284 \\ 661 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 82 \begin{array}{l} 476 \\ 9 \end{array} \end{array} \right. \end{array}$$

Proposons nous maintenant de diviser 191 687 par 329. Je separe vers la gauche du dividende la partie 1916, qui soit assez grande pour conteur le diviseur 329, je fais la division de 1916 par 329, en suivant la règle précédente : le quotient est 5, donnant le produit 1645 et le reste 271 ; j'écris ces nombres ainsi qu'on le voit ci-contre : ce nombre 5 est le premier chiffre du quotient, et designe les centaines, ou 500, attendu que 1916 exprime aussi des centaines. En effet, puisque 1916 est compris entre 5 et 6 fois le diviseur 329, cette partie 1916 étant des centaines, le dividende proposé est lui-même compris entre 500 et 600 fois 329 (n° 13, 3<sup>e</sup>.), donc le quotient cherche est composé de 500 + des dizaines et des unités, qu'il s'agit maintenant de trouver.

$$\begin{array}{r} 1916.87 \left\{ \begin{array}{l} 329 \\ 1645 \\ \hline 2718 \\ 1632 \\ \hline 867 \\ 658 \\ \hline 209 \end{array} \right. \end{array}$$

1<sup>er</sup> Reste . 2718  
2<sup>e</sup> Reste . 1632  
3<sup>e</sup> Reste . 867  
4<sup>e</sup> Reste . 658  
5<sup>e</sup> Reste . 209

teur, et que 14 — 4 divisé par 2 donne en effet 5, il est clair que 5 est le quotient cherche

Observet que, si l'on remplace 287 par 300, le quotient  $\frac{1435}{300}$  sera trop faible, puisque, ayant augmenté le diviseur, il est contenu moins de fois dans le dividende 1435. Si l'on veut éviter de longues tentatives, quand le deuxième chiffre vers la gauche du diviseur surpassera 5, on ajoutera 1 au premier chiffre, pour obtenir le quotient supposé ; mais lorsque ensuite on voudra vérifier ce quotient par la multiplication, il faudra rétablir le diviseur tel qu'il était. L'erreur, s'il y en a, consiste alors à donner un chiffre trop faible pour quotient, et cette erreur est manifestée par un reste qui surpasse le diviseur. Dans le cas que nous considérons dans cette note, il y a quelquefois de l'avantage à doubler, ou tripler, .. le dividende et le diviseur, afin d'amener le deuxième chiffre de celui-ci à être  $\leq 5$ . Le quotient n'est point altéré par ce calcul n° 15, 1<sup>o</sup>.)

## ARITHMÉTIQUE.

~~Dividende~~ du dividende le produit de 329 par 500, partie  
du quotient, c'est-à-dire en ôtant 1645 de 1916, et joi-  
nant la partie 87 qu'on avait séparée, il est clair  
que 2718 est le produit de 329 par les dizaines et les  
unités du quotient, plus le reste : d'où il suit que, si  
on divise 2718 par 329, on devra obtenir au quotient ces  
dixaines et ces unités.

À cette question, semblable à la proposée, le même raison-  
nement s'applique, et l'on est conduit à la même conséquence.  
Séparons donc le premier chiffre à droite 7, c'est-à-dire descen-  
dons seulement le 8 à la droite du premier reste 271, ce qui  
donnera 2718 à diviser par 329 : le quotient 8 est, par la même  
raison que ci-dessus, le chiffre des dizaines ; du dividende partiel  
2718, ôtant le produit  $329 \times 8 = 2632$ , le reste 86 provient du  
produit de 329 par les unités, plus l'excès du dividende total  
sur un multiple exact. Enfin, si l'on divise 867 par 329, on  
obtient les unités 2, et le reste 209. C'est le même calcul qui  
se reproduit sans cesse, et qui donne tour à tour les divers  
chiffres du quotient, en vertu d'un raisonnement qui diffère  
peu de celui qu'on a fait dans le cas où le quotient n'a qu'un  
seul chiffre.

Donc, pour faire une division, il faut séparer, vers la gauche  
du dividende, les chiffres nécessaires pour contenir le diviseur,  
diviser cette partie par le diviseur ; le quotient n'aura qu'un  
seul chiffre, qui sera le premier des chiffres à gauche du quo-  
tient cherché, et son ordre sera le même que celui des unités du  
dividende partiel. On multipliera ce quotient par le diviseur ;  
on retranchera le produit du dividende partiel ; à la droite du  
reste, on descendra le chiffre suivant dans le dividende pro-  
posé, et on recommencera la même opération, qui donnera le  
second chiffre du quotient, de même ordre que le chiffre des-  
cendu. On continuera ce calcul jusqu'à ce que tous les chiffres  
du dividende soient épuisés.

Si l'un des dividendes partiels ne contient pas le diviseur, il  
se faudra pas oublier de mettre un zéro au quotient ; puis on  
descendra un second chiffre du dividende.

Au lieu d'écrire chaque produit et de soustraire, il est plus court d'effectuer à la fois la multiplication et la soustraction. Par exemple, lorsqu'il a fallu multiplier 329 par 5 et ôter de 1916, voici comment on a pu opérer :  $5 \times 9 = 45$  unités, qu'on ne peut ôter des 6 unités du dividende 1916 ; mais ajoutez 4 dizaines à ce 6, et dites  $46 - 45 = 1$ , que vous poserez sous 6. Comme 1916 aura par là été augmenté de 40, pour ne pas altérer la différence cherchée, il faudra de même ajouter 40 au nombre à soustraire, c'est-à-dire retenir 4 dizaines, qu'on joindra au produit suivant  $2 \times 5 = 10$  ; on a donc 14 à ôter de 1 dizaine ; on dit de 21 ôtez 14, il reste 7, qu'on écrit sous 1, et on retient les deux dizaines ajoutées ; enfin  $5 \times 3 + 2 = 17$ ,  $19 - 17 = 2$  ; et on a le premier reste 271.

De même, pour ôter de 2718 le produit  $329 \times 8$ , on dira  $8 \times 9 = 72$  ; ajoutant 70 aux unités 8, on a  $78 - 72 = 6$ , qu'on pose aux unités, et on retient 7. Ensuite  $2 \times 8 + 7 = 23$ , ôtés de 1, ou plutôt de 31, il reste 8, qu'on écrit sous 1, en retenant 3 ; enfin,  $3 \times 8 + 3 = 27$ , ôtés de 27, il reste 0, qu'il est inutile d'écrire, etc. L'opération prend alors la forme abrégée que nous lui avons donnée ici (\*).

Voici quelques exemples de division.

$  \begin{array}{r}  72311.146 \quad \left\{ \begin{array}{l} 8369 \\ 8640 \end{array} \right. \\  \underline{5360} \phantom{1} \\  338 \phantom{74} \\  \underline{3} \phantom{986} \\  3 \phantom{986} \\  \text{Reste} \dots 3 \phantom{986}  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  386782.67 \quad \left\{ \begin{array}{l} 99887 \\ 387 \end{array} \right. \\  \underline{87121} \phantom{6} \\  7212 \phantom{07} \\  \underline{219} \phantom{98} \\  \text{Reste} \dots 219 \phantom{98}  \end{array}  $
$  \begin{array}{r}  82104568708.9 \quad \left\{ \begin{array}{l} 8242685671 \\ 99 \end{array} \right. \\  \underline{8165397669} \phantom{9} \\  742480566 \phantom{0} \\  \text{Reste} \dots 742480566 \phantom{0}  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  721.342 \quad \left\{ \begin{array}{l} 291 \\ 2478 \end{array} \right. \\  \underline{139} \phantom{3} \\  22 \phantom{94} \\  \underline{2} \phantom{572} \\  244 \\  \text{Reste} \dots 244  \end{array}  $
$  \begin{array}{r}  700200.031 \quad \left\{ \begin{array}{l} 683679 \\ 1024 \end{array} \right. \\  \underline{16521} \phantom{03} \\  2847 \phantom{451} \\  \underline{112} \phantom{735} \\  \text{Reste} \dots 112 \phantom{735}  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  25677.875 \quad \left\{ \begin{array}{l} 2568 \\ 9999 \end{array} \right. \\  \underline{2565} \phantom{8} \\  254 \phantom{67} \\  \underline{23} \phantom{555} \\  443 \\  \text{Reste} \dots 443  \end{array}  $

(\*) Ce genre de calcul sert aussi à vérifier chaque chiffre du quotient : on fait alors l'opération ci-dessus, en procédant en sens contraire, c'est-à-dire

19 Nous ferons observer que, 1°. la division est la seule des quatre règles qui commence par la gauche.

2°. Lorsqu'on a trouvé combien de fois un dividende partiel contient le diviseur, ce chiffre est toujours précisément celui qu'on doit mettre au quotient. Cependant comme pour trouver ce nombre de fois, le procédé indiqué, p. 24, consiste à réduire le diviseur à son premier chiffre à gauche, il se peut que cette opération donne en effet un chiffre trop fort : mais l'erreur est dans ce procédé et non dans le principe ; car une fois qu'on a obtenu le quotient de cette division partielle, on est assuré que ce chiffre est juste celui du quotient cherché.

3°. Chaque chiffre qu'on descend en donne un au quotient ; l'un et l'autre sont de même ordre, en sorte qu'on peut toujours

de gauche à droite, et si quelque soustraction est impossible, & plus forte raison le sera-t-elle en commençant par la droite, puisque les produits à retrancher sont augmentés des retenues. Ainsi, pour  $\frac{1916}{328}$ , on a  $\frac{19}{3}$ , et il s'agit d'éprouver le 6 qu'on obtient, c'est-à-dire de s'assurer si le produit  $328 \times 6$  est  $< 1916$ , cas où le chiffre 6 n'est pas trop fort. Commençons la multiplication par les centaines, on dira  $3 \times 6 = 18$  ; de 19, il reste 1, qui, joint au chiffre suivant 1, donne 11 dizaines, d'où l'on ne peut ôter le produit des dizaines  $6 \times 2$  ou 12 ; ainsi le 6 est trop fort, et on doit essayer 5.

Observons que, dans toute multiplication, chacune des retenues ne peut excéder le multiplicateur qu'on éprouve : s'il est 5, il faudrait que l'autre facteur fût au moins 10, pour que le produit surpassât 50. Donc, si en faisant l'épreuve, comme on vient de le dire, on trouve quelqu'un des restes au moins égal au quotient éprouvé, on est assuré que, lorsqu'on fera l'opération de droite à gauche, et qu'on arrivera à ce même reste, la soustraction sera possible, ainsi que toutes les suivantes. Par exemple, pour  $\frac{25643}{352}$ , on dira  $\frac{25}{3}$  donne 8, qu'on reconnaitra être trop fort : il faudra donc éprouver 7 ; ce qu'on fera ainsi qu'il suit :  $3 \times 7 = 21$ , de 25, il reste 4, qu'on joint au 6 des centaines de 25643, on a 46, puis  $7 \times 5 = 35$ ,  $46 - 35$  donne un reste  $> 7$  ; ainsi 7 est le quotient cherché. En général, l'épreuve doit être poussée jusqu'à une soustraction impossible, ou jusqu'à un reste au moins égal au chiffre éprouvé.

Si le 1<sup>er</sup> cas arrive, ce chiffre est trop fort, dans le 2<sup>e</sup> au contraire il ne l'est pas. Il est rare qu'on soit forcé, pour vérifier un chiffre, de pousser le calcul jusqu'aux unités, et le plus souvent, on reconnaît s'il est bon dès la seconde soustraction.



désigner *a priori* la quantité de chiffres du quotient, et indiquer l'ordre de chacun.

4°. Tout quotient partiel ne peut excéder 9, qui est le plus grand nombre d'un seul chiffre. Ainsi, pour  $\frac{17}{19}$ , on dira, il est vrai, en 17, combien de fois 1 ? mais, loin de mettre 17 au produit, il ne faut éprouver que 9, encore ce chiffre est-il trop fort ici; le quotient n'est que 8, qu'on aurait obtenu de suite en disant  $\frac{17}{2}$ , au lieu de  $\frac{17}{1}$ ; c'est ce que prescrit la note, page 25.

5°. Pour éviter les erreurs, il conviendra de marquer d'un point chaque chiffre du dividende, à mesure qu'on l'aura descendu.

### *Décomposition en facteurs premiers. Propriétés des diviseurs communs à plusieurs nombres.*

20. On dit qu'un nombre est *premier*, lorsqu'il n'est exactement divisible que par lui-même et l'unité : tels sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Deux nombres qui, tels que 21 et 40, n'ont d'autre diviseur commun que l'unité, sont dits *premiers entre eux*.

21. Lorsqu'un nombre est divisible par un autre, tous les multiples du premier sont aussi divisibles par le second. Si 18 est multiple de 2,  $3 \times 18$ , qui revient à  $18 + 18 + 18$ , est divisible par 2, puisque chaque partie est multiple de 2.

22. Supposons qu'après avoir obtenu le produit de 32 par 157, on divise ces trois nombres par un autre quelconque, tel que 9, examinons ce qui arrivera (\*): 32 étant décomposé en

(\*) Si l'on divise deux facteurs entiers  $F$  et  $F'$  par un nombre quelconque  $n$ , ils recevront la forme ci-contre,  $q$  et  $q'$  étant les quotiens entiers,  $r$  et  $r'$  les restes. En examinant les termes du produit  $FF'$ , on reconnaît qu'ils contiennent tous le facteur  $n$ ,  $rr'$  excepté. Donc, en divisant le produit par  $n$ , on voit que  $\frac{FF'}{n}$  et  $\frac{rr'}{n}$  doivent donner le même reste.

$$\begin{aligned} F &= qn + r \\ F' &= q'n + r' \\ FF' &= qq'n^2 + q'nr \\ &\quad + qnr' + rr' \end{aligned}$$

$9 \times 3 + 5$ , si l'on multiplie par 157, la première partie sera un multiple de 9; et le produit proposé étant divisé par 9, doit donner le même reste que  $5 \times 157$ . Mais de même 157 se décompose en  $9 \times 17 + 4$ , multipliant par 5 et divisant par 9, le reste dont il s'agit est le même que celui de  $4 \times 5$ , ainsi le *reste de la division d'un produit est le même que celui que donne le produit des restes des deux facteurs.*

23. Avant de nous occuper de la recherche des diviseurs des nombres, problème d'une grande importance, proposons-nous de trouver le plus grand nombre qui puisse diviser exactement deux nombres donnés, tels que 312 et 132; c'est ce qu'on appelle leur *plus grand commun diviseur*.

Observons que si 132 divisait exactement 312, 132 serait le plus grand commun diviseur de ces nombres, puisque 132 ne peut être divisible par un nombre plus grand que lui-même. On essaiera donc cette division,  $312 : 132$ ; mais on trouve le quotient 2, et le reste 48, savoir,

$$312 = 2 \times 132 + 48.$$

Divisons toute cette équation par un nombre quelconque 3 qui divise exactement 312 et 132; ce nombre 3 divisera aussi  $2 \times 132$  (n° 21); 48 doit donc être aussi divisible par 3, puisque le quotient  $48 : 3$ , ajouté à celui de  $2 \times 132$ , doit donner pour somme le quotient de  $312 : 3$ , et que ces deux derniers quotiens sont entiers. Concluons de là que *tout diviseur commun à deux nombres, divise aussi le reste de la division de l'un par l'autre*.

Maintenant, supposons que 12 soit le plus grand diviseur commun ci-dessus cherché, et divisons toute l'équation par 12; nous aurons  $26 = 2 \times 11 + 4$ . Or les quotiens 26 et 11, doivent être premiers entre eux, puisque, sans cela, 12 ne serait pas le plus grand diviseur de 312 et 132. De même 11 et 4 ne peuvent avoir de diviseur commun, puisque ce nombre devrait aussi diviser 26, savoir, 26 et 11, contre ce qu'on vient de dire. Ainsi 12 est à la fois le plus grand diviseur commun de 312 et 132, et aussi de 132 et 48. D'où l'on voit que la question



se réduit à chercher le plus grand diviseur commun de 132 et 48, problème plus simple, puisque  $48 < 132$ .

En raisonnant de même sur 48 et 132, on prouvera qu'il faut diviser 132 par 48; que si la division se faisait exactement, 48 serait le plus grand diviseur commun cherché; et que, comme on trouve 36 pour reste, ce diviseur est le même que celui de 48 et 36.

Divisant 48 par 36, on verra que le plus grand commun diviseur demandé est celui de 36 et 12 (reste de la division de 48 par 36); enfin 12 divisant

$$312 \left| \frac{132}{2} \right| \frac{48}{2} \left| \frac{36}{1} \right| \frac{12}{1}$$

36, c'est 12 qui est le plus grand diviseur commun de 312 et 132. On donne au calcul la disposition ci-contre; où chaque reste est écrit à la droite du diviseur, pour qu'il occupe la place convenable à la division subséquente.

Donc pour trouver le plus grand diviseur commun de deux nombres, divisez l'un par l'autre; divisez ensuite le diviseur par le reste, et continuez de même à prendre chaque reste pour diviseur du reste précédent, jusqu'à ce que vous trouviez un quotient exact; ce quotient sera le plus grand diviseur commun cherché.

Voici encore deux opérations de ce genre, l'une pour 2961 et 799; l'autre pour 115 et 69; les plus grands diviseurs communs sont 47 et 23.

$$2961 \left| \frac{799}{8} \right| \frac{564}{1} \left| \frac{235}{2} \right| \frac{94}{2} \left| \frac{47}{2} \right|$$

$$115 \left| \frac{69}{1} \right| \frac{46}{1} \left| \frac{23}{2} \right|$$

24. Remarquez que, 1° les restes étant sans cesse décroissans, on doit arriver à un diviseur exact, ne fût-ce que l'unité: quand le plus grand commun diviseur est un, les deux nombres proposés sont premiers entre eux. C'est ce qui arrive pour 56 et 21. Il est fâcheux de ne pouvoir reconnaître ce cas *a priori*, puisqu'on a fait tous les frais d'un calcul inutile.

2° Le plus grand commun diviseur de deux nombres devant diviser tous les restes successifs qu'on trouve dans l'opération,

si l'un de ces restes est un nombre premier qui ne divise pas le reste précédent, on est assuré que le calcul doit se terminer par l'unité, seul diviseur des nombres proposés. Par exemple, pour 824 et 319, on arrive au nombre premier 53 qui ne divise pas 133 : il est inutile de pousser plus loin le calcul pour conclure que l'unité est le seul diviseur commun.

$$824 \mid \frac{319}{2} \mid \frac{186}{1} \mid \frac{133}{1} \mid \frac{53}{2} \text{ nombre premier}$$

3°. Le raisonnement précédent prouve aussi que tout diviseur de 312 et 132, tel que 3, divise aussi 48, puis 36 et 12, c'est-à-dire tous les restes successifs de l'opération : en sorte que tous les diviseurs de 12 doivent aussi diviser 312 et 132, et sont les seuls qui jouissent de cette propriété, savoir, 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Donc *tout diviseur de deux nombres divise leur plus grand commun diviseur ; et pour obtenir tous les facteurs communs à deux nombres, il ne faut que chercher les facteurs de leur plus grand commun diviseur.*

4°. Si, dans le cours des calculs, on reconnaît qu'un nombre divise deux restes successifs, on supprimera ce facteur dans le dividende et le diviseur, et on continuera l'opération ; lorsqu'on aura trouvé le diviseur commun, il faudra le multiplier par le facteur supprimé. C'est ainsi que 4830 et 3570 sont multiples de 10, prenant donc 483 et 357, on fait la division, et on a le reste 126, qui, ainsi que 357, est divisible par 3 : ôtant ce facteur 3, on opère sur 119 et 42, dont le commun diviseur est 7 ; ainsi celui de 4830 et 3570 est  $10 \times 3 \times 7 = 210$ .

Mais si l'on reconnaît que l'un des restes a un facteur premier qui ne divise pas le reste précédent, on peut le supprimer, sans que le diviseur commun soit changé. En cherchant (p. 31) le plus grand commun diviseur de 2961 et 799, on voit que le reste 564 est multiple de 12 =  $3 \times 4$  : d'ailleurs le diviseur 799 n'est divisible ni par 3, ni par 2 ; supprimant ce facteur 12, 564 est remplacé par 47 ; on trouve le quotient exact 17, ainsi 47 est le plus grand commun diviseur cherché. Cela résulte de ce qui a été dit (3°).

25. Si le produit de deux facteurs est divisible par un nombre qui soit premier avec l'un d'eux, ce nombre doit diviser l'autre facteur. Par exemple,  $56 \times 45$ , ou 2520, est divisible par 15 qui est premier avec 56; je dis que 15 doit diviser 45; car 15 divise visiblement  $15 \times 45$ , et aussi  $56 \times 45$  (par hypothèse); donc 15 doit diviser le plus grand commun diviseur (25, 3<sup>e</sup>) qui est 45, puisque 56 et 15 n'ont que 1 pour facteur commun.

1<sup>o</sup>. Deux facteurs moindres qu'un nombre premier, ne peuvent donner un produit divisible par ce nombre.

2<sup>o</sup>. Le produit de deux nombres premiers ne peut admettre d'autres diviseurs que ces mêmes nombres, outre l'unité et le produit même.

3<sup>o</sup>. Plusieurs facteurs  $5 \times 8 \times 9 \times 11$  ne peuvent former un produit divisible par un nombre premier 3, qu'autant que l'un des facteurs au moins est divisible par 3.

4<sup>o</sup>. Si un produit est divisible par un nombre non premier, il faut qu'on retrouve tous les facteurs de ce dernier parmi ceux qui constituent les nombres multipliés. Ainsi  $10 \times 70$  est divisible par 28, attendu que  $28 = 2 \times 2 \times 7$ ; que le premier facteur 2 se trouve dans  $10 = 2 \times 5$ ; et le second 2, ainsi que 7, dans  $70 = 2 \times 7 \times 5$ : le quotient est  $5 \times 5$ . Mais si quelqu'un des facteurs du diviseur manquait, la division du produit serait impossible exactement. Donc, si plusieurs facteurs sont premiers avec un nombre quelconque, le produit l'est aussi; et si ces facteurs sont premiers entre eux, et qu'un nombre soit divisible par chacun d'eux, il le sera aussi par leur produit, et par les produits qu'on forme en combinant ces facteurs 2 à 2, 3 à 3. . .

26. Il n'y a qu'un seul système de facteurs premiers, capable de produire un nombre donné. Par exemple,  $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$  ne peut être produit par d'autres facteurs premiers, tels que  $7 \times 11 \times 2$ ; car on aurait  $2^3 \times 3^2 \times 5 = 7 \times 11 \times 2$ , et il s'ensuivrait que le premier membre serait multiple de 7, contre ce qu'on a vu (4<sup>o</sup>). On ne peut donc admettre pour 360, que les facteurs premiers 2, 3, et 5, et il reste à faire voir qu'on

ne peut leur donner qu'un système d'exposans; qu'on n'a pas, par exemple,  $360 = 2 \times 3^3 \times 5^1$ . En effet, il en résulterait  $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$ , ou, en supprimant les facteurs communs,  $2^2 = 3 \times 5$ , ce qui est absurde ( $4^\circ$ ).

Si deux nombres, tels que 7 et 11, sont premiers entre eux, deux puissances quelconques de 7 et 11, telles que  $7^3$  et  $11^4$ , sont aussi premières entre elles; puisque, si elles avaient un facteur commun, il le serait aussi de 7 et de 11.

Soit un cube exact, tel que  $8000 = 20^3$ : si l'on décompose 20 en  $4 \times 5$ , 8000 sera le cube de  $4 \times 5$ ; mais, comme la multiplication permet d'intervertir l'ordre des facteurs, on a  $8000 = 4^3 \times 5^3$ . On voit donc que chaque facteur se trouve élevé au cube. On peut en dire autant de toute puissance, quels que soient les facteurs. Donc, *si un nombre est une puissance exacte, en le décomposant en facteurs premiers, chacun doit être affecté d'un exposant multiple de la puissance*

27. Pour décomposer un nombre en ses facteurs premiers, on le divisera d'abord par 2, autant de fois successives que cela sera possible, et le nombre proposé sera le produit d'une puissance de 2 par un quotient connu, non divisible par 2. On essaiera de même la division de ce quotient par 3, autant de fois qu'il se pourra, et il sera le produit d'une puissance de 3 par un nouveau quotient connu, non divisible par 3. On continuera de même à éprouver si la division est possible par tous les nombres premiers consécutifs 5, 7, 11, 13.... Le nombre proposé sera le produit de ces divers nombres premiers, chacun élevé à une puissance marquée par le nombre des divisions qu'il a effectuées.

Par exemple, pour 360, on divisera par 2, puis le quotient 180 par 2, enfin 90 par 2; comme le troisième quotient 45 n'est plus divisible par 2, on a  $360 = 2^3 \times 45$ . On divisera 45 par 3; on aura  $45 = 3^2 \times 5$ , d'où  $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ . La décomposition est ici terminée, parce que 5 est un nombre premier. On donne or-

360	2	216	2
180	2	108	3
90	2	35	5
45	3	7	7
15	3		
5	5		



dinairement au calcul la disposition ci-contre, afin de mieux voir la série des facteurs.

On trouve de même que  $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$  (\*).

Ce procédé conduit au but par un nombre limité d'essais. On voit d'ailleurs que la résolution en facteurs ne peut produire qu'un seul résultat (26).

La table qu'on trouve à la fin de l'arithmétique, peut faciliter cette opération.

Ce procédé donne aussi le plus grand commun diviseur de deux nombres; car en décomposant ces nombres en leurs facteurs premiers, ce diviseur est le produit de tous ceux de ces facteurs qui sont communs, chacun avec le plus petit exposant dont il se trouve affecté dans l'un et l'autre. Ainsi

$$312 = 2^3 \times 3 \times 13, \quad 132 = 2^2 \times 3 \times 11;$$

le plus grand commun diviseur est  $2^2 \times 3 = 12$ , comme p. 31.

28. Il arrive quelquefois que les essais qu'on tente ne réussissent point, et qu'on ne trouve aucun diviseur exact, soit du nombre proposé, soit de l'un des quotiens auxquels on est conduit, alors ce nombre, ou ce quotient, est premier, et on ne peut en opérer la décomposition en facteurs. Mais on doit remarquer que ces tentatives inutiles de division ne doivent être poussées que jusqu'à la racine carrée du nombre qu'on veut diviser. En effet, puisque ce nombre est le produit de sa racine par elle-même, et qu'on ne peut faire croître l'un des facteurs sans que l'autre décroisse, pour que le produit reste le même (13), on voit que si ce dividende a l'un de ses facteurs plus grand que la racine, l'autre facteur doit être moindre; en sorte qu'un

(\*) Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , les nombres de fois qu'on a pu diviser un nombre  $N$  par les nombres premiers  $a, b, c, \dots$ ; on a  $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \dots$ .  $N$  n'est divisible (n° 25) que par les divers termes du produit

$(1 + a + a^2 + \dots + a^{\alpha-1}) \times (1 + b + b^2 + \dots + b^{\beta-1}) \times (1 + c + c^2 + \dots + c^{\gamma-1}) \times \dots$   
le nombre des termes du produit, ou la quotité des diviseurs de  $N$ , est

$(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma) \dots$



nombre ne peut être divisible par une quantité qui surpasse sa racine carrée, à moins qu'il ne le soit aussi par une quantité moindre que cette racine. Or, quoiqu'on n'ait essayé que des diviseurs premiers, on est sûr que d'autres nombres non premiers ne pourraient diviser (n° 25, 4°.); ainsi l'on a par là reconnu qu'il n'existe pas de diviseur moindre que la racine du dividende : il n'y en a donc pas non plus qui surpasse cette racine.

Par exemple, 127 n'est divisible ni par 2, 3, 5, 7, ni 11, à plus forte raison par 4, 6, 8, 9 et 10; et comme  $\sqrt{127}$  est entre 11 et 12, on est assuré que 127 est un nombre premier.

1524 est divisible par 3 et 4, et on a  $1524 = 2^2 \times 3 \times 127$ ; on voit ensuite que 5, 7, 11, ne divisent pas 127. Sans pousser plus loin les tentatives, on reconnaît que 127 est premier, et la décomposition de 1524 est terminée.

29. Cherchons maintenant *tous les diviseurs* d'un nombre donné. On le décomposera en facteurs premiers, et l'on sait (n° 27) que si l'on affecte quelques-uns de ces facteurs d'un exposant quelconque, égal au plus à ceux dont ils sont affectés dans le nombre proposé, on aura un diviseur de ce nombre, et qu'il faut effectuer toutes les combinaisons possibles de cette espèce pour être assuré de n'avoir omis aucun diviseur. Voici un moyen de n'oublier aucune de ces combinaisons : reprenons l'équation  $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ ; avec  $2^3$  on formera la suite 1, 2,  $2^2$ ,  $2^3$ ; avec  $3^2$  on formera 1, 3,  $3^2$ ; enfin, 5 donnera 1, 5. D'abord chacun de ces termes est diviseur de 360: en outre si l'on multiplie tous les nombres de la première suite par tous ceux de la deuxième, et le résultat par tous ceux de la troisième, on aura visiblement toutes les combinaisons; on sera donc assuré d'avoir tous les diviseurs cherchés, qui sont

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36,  
40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

Pour  $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ , on formera le produit de 1 et 2, par 1 et 3, par 1 et 5, et par 1 et 7; et on aura

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210

Pour  $675 = 3^3 \cdot 5^2$ , formez  $(1+3+9+27) \times (1+5+25)$ , d'où

$$1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 135, 225, 675$$

30 Puisque le plus grand commun diviseur de deux nombres doit diviser tous les restes donnés par l'opération indiquée, cherchons les quotiens successifs de ces divisions. Reprenons l'exemple de 2961 et 799, p. 31;

et cherchons combien 47

est contenu de fois dans la

série des diviseurs. Il est

d'abord visible qu'il est 1

fois dans 47, et 2 fois dans 94; on posera 1 sous 47 et 2 sous

94. On a  $235 = 2 \times 94 + 47$ , d'où  $\frac{235}{47} = 2 \times \frac{94}{47} + \frac{47}{47}$

$= 2 \times 2 + 1$ , ou 5, qu'on écrira sous 235. Ce chiffre 5 a été obtenu en multipliant entre eux les deux chiffres écrits sous 94, et ajoutant au produit le 1 qui est à droite dans la dernière ligne. De même, pour obtenir le quotient de 564 par

47, on a  $564 = 2 \times 235 + 94$ , d'où  $\frac{564}{47} = 2 \times 5 + 2 = 12$ ,

qu'on posera sous 564. On continuera à multiplier entre eux les deux chiffres écrits sous 564, et à ajouter le chiffre à droite.

Voici la série des calculs à partir du chiffre 5.

$$\begin{aligned} 2 \times 2 + 1 &= 5, & 2 \times 5 + 2 &= 12, \\ 1 \times 12 + 5 &= 17, & 3 \times 17 + 12 &= 63. \end{aligned}$$

Ce calcul, auquel nous trouverons par la suite (n° 595) une grande utilité, peut ici nous servir à composer deux nombres pour lesquels on donne le commun diviseur, le nombre de divisions nécessaires pour le trouver, et les quotiens successifs. Après avoir écrit ces quotiens formant la deuxième ligne, on en déduira la troisième ligne par le calcul ci-dessus; enfin prenant les deux plus grands résultats, on les multipliera par le facteur commun proposé.

Voici encore deux exemples, l'un pour 115 et 69, dont le commun diviseur est 23 qu'ils contiennent 5 et 3 fois; l'autre

pour 3085 et 910, qui contiennent 617 et 182 fois le diviseur 5.

$$\begin{array}{ccccccc}
 115 & \left\{ \begin{array}{l} 69 \\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 46 \\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 23 \\ 1 \end{array} \right\} & & 3085 & \left\{ \begin{array}{l} 910 \\ 3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 355 \\ 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 100 \\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 155 \\ 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 45 \\ 3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 20 \\ 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ 4 \end{array} \right\} \\
 5 & 3 & 2 & 1 & 617 & 182 & 71 & 40 & 31 & 9 & 4 & 1
 \end{array}$$

31. Pour obtenir le plus grand commun diviseur entre les quatre nombres 150, 90, 40 et 200, on trouvera d'abord celui de 150 et 90, qui est 30; le nombre cherché est donc déjà un des facteurs de 30; puis on trouvera le plus grand commun diviseur de 30 et 40, qui est 10; enfin celui de 10 et 200, qui est 10: c'est le nombre cherché. Les quatre nombres proposés n'ont donc d'autres diviseurs communs que 1, 2, 5 et 10. Ce procédé s'applique à tant de nombres qu'on voudra.

32. Étant donnés plusieurs nombres, tels que 2, 3, 4, 6, 8, et 12, cherchons le plus petit nombre divisible par chacun. Il est d'abord clair que, puisque 2, 3, 4 et 6 sont contenus exactement dans 8 ou 12, tout nombre divisible par ces deux derniers, le sera nécessairement par les autres, auxquels il est par conséquent inutile d'avoir égard. En composant un nombre qui renferme tous les facteurs de 8 et 12, on est assuré qu'il est divisible par tous les nombres donnés; et si, en outre, il ne contient que les facteurs de 8 et 12, il est le plus petit dividende demandé. Ainsi, on a  $2^3 \times 3$ , ou 24, pour le nombre cherché. On voit donc que, pour obtenir le plus petit nombre divisible par des quantités données, après avoir supprimé celles qui divisent exactement les autres, on ne s'occupera que de celles-ci, qu'on décomposera en leurs facteurs premiers. Le nombre cherché sera formé du produit de tous ces facteurs, chacun élevé à la puissance la plus haute qui l'affecte dans ces divers résultats.

De même pour 2, 3, 5, 10, 15, 8, 24, 12 et 6, comme 2, 3, 6, 8 et 12 divisent 24, et que 5 divise 10, on n'aura égard qu'à 10, 15 et 24, ou  $2 \times 5$ ,  $3 \times 5$  et  $2^3 \times 3$ ; le plus petit dividende cherché est donc  $2^3 \times 3 \times 5 = 120$ .

*Des Conditions pour qu'un nombre soit divisible  
par 2, 3, 5, 7.....*

33. On dit qu'un nombre est *pair*, quand il est divisible par 2. Soit un nombre quelconque, tel que 476; on le décompose en dizaines et unités, savoir,  $470 + 6 = 47 \times 10 + 6$ : la première partie  $47 \times 10$  est divisible par 2; il faut donc que la seconde le soit, pour que le nombre proposé soit un multiple de 2. Ainsi tout nombre terminé par un chiffre pair jouit seul de la propriété d'être pair, ou divisible par 2.

En décomposant le nombre en deux parties, dont l'une soit formée des 2, 3, ... derniers chiffres, on voit de même que, pour qu'il soit divisible par 4, il faut que les deux derniers chiffres fassent un multiple de 4; pour qu'il le soit par 8, que les trois derniers fassent un multiple de 8, etc.

De même, un nombre n'est multiple de 5 qu'autant qu'il est terminé par 0 ou 5. Il n'est divisible par 10, que lorsqu'il l'est par 2 et par 5, c'est-à-dire lorsqu'il est terminé par un zéro. On trouverait aussi les conditions de la divisibilité par 25, 50, etc.

34. Un nombre, tel que 27542, revient à.....  
 $2.1 + 4.10 + 5.10^2 + \dots$ : pour trouver le reste de la division par un autre nombre, tel que 7, divisons 1, 10, 10<sup>2</sup>, 10<sup>3</sup>..., par 7. Le reste de 1 est 1, celui de 10 est 3; celui de 100, ou 10<sup>2</sup>, est le carré de 3 (voy. n° 22), ou plutôt  $9 - 7 = 2$ . De même celui de 10<sup>3</sup>, ou  $10^2 \times 10$ , est  $2 \times 3$ , ou 6; celui de 10<sup>4</sup> est  $6 \times 3 = 18$ , ou  $18 - 14 = 4$ , etc. En multipliant chaque reste par 3, et ôtant 7, s'il est possible, on aura donc ainsi les restes successifs 1, 3, 2, 6, 4, 5, de la division par 7, des nombres 1, 10, 10<sup>2</sup>, 10<sup>3</sup>, 10<sup>4</sup> et 10<sup>5</sup>, mais arrivé à 10<sup>6</sup>, le reste est  $5 \times 3 = 15$ , ou plutôt  $15 - 14 = 1$ . Une fois qu'on retrouve le reste 1, c'est une conséquence du calcul même qui conduit à ces résultats consécutifs, qu'on les verra se reproduire périodiquement, en sorte qu'en poussant indéfiniment les divisions par 7 des puissances successives de 10, on retrouvera toujours



ces restes dans le même ordre. Les nombres (1, 3, 2, 6, 4, 5) qui se reproduisent continuellement, sont ce qu'on nomme *la Période*. Le reste de  $10^6$  est le même que celui de  $10^0$ , de  $10^6$ ,  $10^3$ ,  $10^2$ , en ôtant les multiples de 6 compris dans 26, attendu que la période a 6 termes; ce reste est 2. Celui de  $10^5$  est le même que pour  $10^1$ , ou 3.

On pouvait d'avance être assuré de l'existence de cette période; car les restes de ces divisions par 7 étant  $< 7$ , il ne doit au plus y avoir que ces six restes 1, 2, 3, 4, 5, 6, qui viennent seulement dans un ordre différent de celui-ci: on est certain de ne pas trouver zéro (n° 25), la division ne pouvant être exacte. Il s'ensuit donc qu'on doit, après six divisions *au plus*, retomber sur l'un des restes obtenus; alors la période recommence, puisqu'il faut reproduire les mêmes multiplications. Or si  $10^6$  et  $10^0$  donnent le même reste, la différence  $10^6 - 10^0$  ou  $10^6 (10^6 - 1)$  est multiple de 7 (n° 16); et comme  $10^6$  n'a aucun facteur commun avec 7, il faut (n° 25, 4°.) que  $10^6 - 1$  soit divisible par 7, c'est-à-dire que  $10^6 : 7$  donne 1 pour reste, 1<sup>er</sup> terme de la période. Et puisque tout autre diviseur que 7 qui serait premier avec 10, conduit à la même conséquence, on voit que *quel que soit le diviseur premier avec 10 de la suite indéfinie 1, 10,  $10^2$ ,  $10^3$ , ... les restes successifs formeront toujours une période, dont les termes seront en nombre moindre que ce diviseur n'a d'unités; la période commence au premier reste un (\*)*.

1°. Prenons 9 pour diviseur, le reste de  $10 : 9$  est 1; donc la période est le seul chiffre 1; c'est-à-dire que *toute puissance de 10, divisée par 9, donne le reste 1*. On peut en conclure

(\*) Quand la quotité des termes de la période d'un diviseur premier n'est pas précisément ce diviseur moins un, elle est partie aliquote de ce nombre. C'est ainsi que, pour 13, la période n'a pas 12 termes, mais seulement 6, et 6 divise 12. De même, pour le diviseur 11, la période n'a que 2 termes, et 2 est facteur de  $11 - 1$ , ou 10; enfin pour 37, la période est formée de 3 nombres seulement, et 37 admet le facteur 3 (Voy. les *Recherches arith. de Legendre*, n° 318.)



(n° 22) que 20, 200..., divisés par 9, donnent le reste 2; que 30, 300..., donnent 3; que 40, 400..., donnent 4, etc. Or, un nombre tel que 8753 peut être décomposé en unités, dizaines..., ou  $8000 + 700 + 50 + 3$ ; en divisant par 9, les restes sont  $8 + 7 + 5 + 3 = 23$ ; ainsi le reste de la division d'un nombre par 9 est le même que le reste que donnerait la somme de ses chiffres considérés comme exprimant de simples unités. Rien n'est donc plus aisé que de trouver le reste de la division d'un nombre par 9 : pour 8753, par exemple, ce reste est le même que pour 23, ou  $2 + 3 = 5$ . Si la somme des chiffres est un multiple de 9, le nombre est divisible par 9.

Lorsque deux nombres sont exprimés par les mêmes chiffres, mais dans un ordre différent, ils donnent donc les mêmes restes de la division par 9; leur différence est donc (n° 16) un multiple de 9. Ainsi,  $74079 - 9742 = 64287 = 9 \times 7143$ .

2°. On verra aisément que ces propriétés appartiennent aussi au nombre 3.

3°. Si le diviseur est 7, la période est 1, 3, 2, 6, 4 et 5. Soit le dividende 13527542; en le décomposant en  $2 + 40 + 500 + 7000 + \dots$ ; les restes de ces nombres, divisés par 7, sont respectivement les mêmes que ceux de la période, répétés, 2, 4, 5, 7, fois; on écrira en sens inverse les nombres de la période sous les chiffres consécutifs de la quantité proposée, comme on le voit ci-dessus; on multipliera ensuite chaque chiffre par celui qui est au-dessous. La somme 105 des produits a le même reste de la division par 7, que le nombre proposé divisé par 7; et comme celui de 105 est 0, l'un et l'autre sont des multiples de 7.

$$\begin{array}{r} 13 \ 527 \ 542 \\ 31 \ 546 \ 231 \\ \hline 1 \times 2 = 2 \\ 3 \times 4 = 12 \\ 2 \times 5 = 10 \\ 6 \times 7 = 42 \\ \text{etc.} \end{array}$$

Somme = 105

$$\begin{array}{r} 13 \ 527 \ 542 \\ 31 \ 231 \ 231 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{l} 1 \ 2 = 2 \\ 3 \ 4 = 12 \\ 2 \ 5 = 10 \\ 1 \ 3 = 3 \\ 3 \ 1 = 3 \\ \hline 30 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \cdot 7 = 7 \\ 3 \cdot 2 = 6 \\ 2 \cdot 5 = 10 \\ \hline -23 \end{array} \end{array}$$

Observez qu'au lieu d'évaluer les quotiens par défaut, on peut les prendre par excès, c'est-à-dire qu'il est indifférent de poser 101 égal à  $7 \times 1428 + 4$ , ou à  $7 \times 1429 - 3$ . Des nombres 1, 3, 2, 6, 4 et 5, qui forment la période, on peut donc remplacer les trois

derniers par leur supplément à 7, ou 1, 3 et 2, qui seront les restes soustraits des multiples de 7, c'est-à-dire les restes *negatifs* (n° 4). La période est réduite aux trois nombres 1, 3, 2; seulement les produits sont tantôt additifs et tantôt soustractifs. Ainsi, l'on partagera les nombres en tranches de trois chiffres, et il faudra soustraire des autres les produits donnés par les tranches de rangs pairs. Le calcul se dispose comme on voit ci-dessus, où la barre est placée sur les facteurs dont les produits sont soustractifs. Ici le reste de la division de 13527542 par 7 est le même que celui de  $30 - 23 = 7$ , ou zéro.

4°. De même pour le diviseur 11, après avoir trouvé que la période est 1, 10; on peut remplacer 10 par 11-10, ou 1, dont le produit devra être soustrait, c'est-à-dire que la période est +1, -1,

Donc, si l'on ajoute tous les chiffres de rangs impairs d'un nombre proposé, qu'on en retranche la somme des chiffres de rangs pairs, le reste sera celui de la division de ce nombre par 11. Pour 732931, on a  $1 + 9 + 3 = 13$ ,  $3 + 2 + 7 = 12$ ,  $13 - 12$ , ou 1, est le reste de la division de 732931 par 11. De même, pour 429180, on aura  $0 + 1 + 2 = 3$ ;  $8 + 9 + 4 = 21$ , et, comme on ne peut ôter 21 de 3; il faudra ajouter à 3 un multiple suffisant de 11, tel que 22; alors on aura  $22 + 3 - 21 = 4$ , qui est le reste cherché. 63613 est un multiple de 11, puisque  $3 + 6 + 6 - 1 - 3 = 15 - 4 = 11$ .

On peut encore opérer ainsi qu'il suit: comme  $100 : 11$  donne 1 pour reste,  $100^2, 100^3, \dots$  donnent aussi 1: on décomposera le nombre proposé, tel que 9387928, en tranches de 2 chiffres à partir de la droite, sous la forme  $28 \times 1 + 79. 100 + 38. 100^2 + 9. 100^3$ , et divisant chaque partie par 11, le reste sera  $28 + 79 + 38 + 9$ , ou la somme 154 des nombres qui composent les tranches de 2 chiffres: ainsi 9387928 et 154 ont le même reste de la division par 11. En traitant 154 par le même procédé, on a  $55$  ou  $5 \times 11$ , pour reste, ou plutôt zéro, le nombre proposé est multiple de 11.

5°. Si le diviseur est 37, comme  $1000 = 27 \times 37 + 1$ , les restes de la division de 1, 1000, 1000<sup>2</sup>, ... sont donc tou-

l'unité : pour obtenir le reste de la division par 37 d'un nombre proposé, tel que 99 | 732 | 458 | 968, on opérera donc comme dans l'exemple précédent, mais en formant des tranches de trois chiffres ; ainsi le reste cherché est le même que pour la somme 2/257 de ces tranches, ou plutôt pour  $257 \div 2$ . On reconnaît que ce dividende est un multiple de 37 (\*).

$$\begin{array}{r} 968 \\ 732 \\ \hline 236 \end{array}$$

6°. Pour trouver tous les nombres premiers, moindres qu'une limite donnée, on écrira la suite des nombres impairs 3, 5, 7, 9, 11, . . . jusqu'à cette limite ; puis, partant de 3, on supprimera tous les nombres de 3 en 3 rangs, qui sont tous des multiples de 3 ; partant de 5, on supprimera tous les termes de 5 en 5 (multiples de 5), etc. : on laissera subsister les nombres de départ ; et les termes non effacés seront tous les nombres premiers demandés.

Voyez la table donnée à la fin de l'arithmétique (\*).

### Preuves des quatre Règles.

35 Comme on peut commettre des erreurs dans un calcul, il est utile de s'assurer de l'exactitude du résultat par une opération qui en est la preuve. Pour qu'elle conduise au but qu'on se propose, elle doit être plus facile à pratiquer que la règle même, car elle serait plus sujette à erreur. Ainsi, quoiqu'on puisse vérifier une multiplication en divisant le produit par l'un des facteurs, et voyant si l'autre facteur vient au quotient, on sent que ce procédé est propre à faire croire que l'erreur serait moins dans la multiplication que dans la division.

1°. On vérifie l'addition par l'addition même. Si l'on a fait le

---

(\*) Lorsque l'on divise un nombre impair par 6, le reste ne peut être que 1, 3 ou 5, et si ce nombre n'est pas multiple de 3, il ne peut donner pour reste que  $\div 1$  ou  $\div 5$  (équivalent à 5) ainsi tous les nombres non divisibles par 2, ni 3, sont compris dans la forme  $6x + 1$ ,  $x$  étant un entier quelconque. Tous les nombres premiers et leurs multiples, excepte ceux de 2 et 3, sont de cette espèce.

calcul en opérant de haut en bas, on le recommencera de bas en haut, ou bien on coupera l'addition en plusieurs autres; ou l'on ajoutera aux divers nombres donnés des quantités qu'on ôtera ensuite.

On peut aussi commencer ce calcul par la colonne de l'ordre le plus élevé. Ainsi, dans l'exemple ci-contre, la colonne des mille a 6 pour somme; et comme on en a trouvé 7,  $7 - 6$ , ou 1, qu'on pose sous le 7, annonce qu'on a reporté 1 à cette colonne, et que par conséquent celle des centaines a donné, non pas 3, mais 13. Cette colonne ne donne que 11,  $13 - 11 = 2$  est donc la retenue des dizaines, qui ont fourni 25, etc.; à la colonne des unités, on doit trouver 0 pour différence.

$$\begin{array}{r} 2\ 758 \\ 3\ 099 \\ \hline 469 \\ 1\ 029 \\ \hline 7\ 355 \\ 1\ 230 \end{array}$$

2°. La preuve de la soustraction se fait en ajoutant le reste au nombre soustrait, on doit retrouver le plus grand des deux nombres donnés.

3°. Pour la multiplication, on échangera le multiplicateur et le multiplicande (n° 11); ou bien on multipliera ou on divisera les facteurs par des nombres arbitraires, et le produit aura éprouvé un changement déterminé par ce qu'on a dit n° 13; il sera aisé de vérifier si cette condition est remplie.

4°. Si l'on multiplie le quotient par le diviseur, et si l'on ajoute le reste, on devra trouver, pour résultat, le dividende (n° 16). Il est aisé de vérifier ainsi toute division. On a encore une autre preuve de cette règle, en multipliant ou divisant le diviseur et le dividende par un même nombre; le quotient doit rester le même (n° 15, 1°.).

5°. On pourra aussi vérifier la division et la multiplication, en divisant par un nombre quelconque, les deux facteurs et le produit, puis voyant si le produit des restes des facteurs est égal au reste du produit (n° 22); comme les restes sont faciles à trouver pour les diviseurs 9 et 11 (n° 34, 1°. et 4°.), on les préfère ordinairement pour cet usage. Nous en donnerons ici un exemple. On a trouvé, page 19, que  $53\ 687 \times 908 = 48\ 717\ 796$ . Pour vérifier ce calcul, ajoutons tous les chiffres de ces trois nombres



et supprimons 9 chaque fois qu'il se rencontre ; les restes seront 2, 8 et 7. Or,  $2 \times 8 = 16$ , et 7 est le reste de  $\frac{16}{9}$ , puisque  $6 + 1 = 7$  ; donc l'opération n'est pas fautive ; à moins cependant qu'il n'y ait quelque compensation dans les erreurs, ou des chiffres déplacés, etc.

Si l'on veut prendre 11 pour diviseur, il faut retrancher les chiffres de rangs pairs de ceux de rangs impairs dans les trois nombres (n° 34, 4°.) ; on a  $18 - 11 = 7$  ;  $17 - 0 = 17$ , ou 6 ;  $25 - 27 = -2$  ou 9 (supplément de 2 à 11). Pour que la multiplication soit exacte, il faut que  $7 \times 6$ , ou 42 divisé par 11, donne le reste 9 ; ce qui a lieu en effet.

En divisant 700 200 031 par 683 679, on a 1024 pour quotient, et 112735 pour reste (p. 27) : ajoutons les chiffres qui composent ces nombres, pour trouver les restes de leur division par 9 : ces restes sont 4 pour le dividende, 3 pour le diviseur, 7 pour le quotient, et 1 pour le reste ; le produit  $7 \times 3$ , ou 21, ajouté à un, donne 22, ou 4 : ainsi 4 doit être le reste de la division du dividende par 9 ; ce qui se vérifie. On dispose le calcul de ces deux preuves comme il suit :

$\begin{array}{r} \text{Multi}^r \quad 2 \\ \text{Multi}^r \quad 8 \\ \hline \text{Prod.} \quad 7 \end{array}$	$\left. \begin{array}{l} 2 \\ 8 \end{array} \right\} 16 \text{ ou } 7$	$\begin{array}{r l} \text{Divid}^e \quad 4 & \text{Divis}^r \quad 3 \quad 21 + 1 \text{ ou } 4 \\ \text{Reste} \dots 1 & \text{Quot.} \quad 7 \end{array}$
--	--	--

## II. DES NOMBRES FRACTIONNAIRES.

### *Nature et transformation des Fractions.*

36. Mesurer une chose, c'est donner l'idée précise de sa grandeur, en la comparant à celle d'une autre de même espèce, qui est déjà connue, et qu'on prend pour *unité*. Si l'unité est contenue un nombre de fois exact, cette quotité est la *mesure* ; sinon, on peut prendre une autre unité qui remplisse cette condition ; car sa grandeur est absolument arbitraire et indépen-



## ARITHMÉTIQUE.

On mesure la chose qu'on veut mesurer; en sorte qu'on peut exprimer la grandeur de celle-ci par des nombres très différens, qu'on prend telle ou telle unité.

Pour acquies la connaissance préalable de plusieurs grandeurs on divise de chaque espèce, on divise l'unité primitive en parties égales, dont le nombre soit tel, que l'une des divisions soit contenue exactement dans la chose à mesurer; et c'est cette partie qu'on prend pour nouvelle unité. La mesure est alors ce qu'on appelle une fraction, c'est-à-dire une ou plusieurs parties de l'unité. Lorsqu'on dit d'une chose qu'elle est les cinq septièmes de l'unité, il faut entendre qu'après avoir partagé l'unité en sept parties égales, cinq de ces parties ont formé un assemblage égal à cette chose.

Il suit de là que toute fraction doit être énoncée à l'aide de deux nombres : l'un qu'on nomme *Dénominateur*, marque en combien de parties l'unité est divisée; l'autre, qui est le *Numérateur*, indique combien on prend de ces parties : dans cinq septièmes, 5 est le numérateur, 7 le dénominateur. On écrit ces deux nombres en les séparant d'un trait, le numérateur placé en-dessus, le dénominateur en-dessous,  $\frac{5}{7}$ . Les fractions  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ , s'énoncent une demie, un tiers, un quart. Pour toutes les autres, on lit les deux chiffres, en ajoutant la finale *ième* au dénominateur,  $\frac{5}{8}$ ,  $\frac{7}{11}$  se lisent 5 huitièmes, 7 onzièmes.

37. Pour multiplier  $\frac{5}{7}$  par 7, comme chaque septième pris 7 fois donne l'unité, nos  $\frac{5}{7}$  produisent 5 unités, ou  $\frac{5}{7} \times 7 = 5$ ; donc toute fraction multipliée par son dénominateur produit le numérateur.

Il suit de là que  $\frac{5}{7}$  est le quotient de 5 divisé par 7, d'après la définition (n° 5), c'est-à-dire que toute fraction est le quotient de la division du numérateur par le dénominateur; et c'est pour cette raison qu'on a écrit de même une fraction et une division. Le quotient de 47, divisé par 7, est donc  $6 + \frac{5}{7}$ , puisqu'en multipliant cette quantité par 7, on a  $42 + 5$ , ou 47. Donc, si au quotient entier d'une division, on ajoute une fraction qui ait le reste pour numérateur, et le diviseur pour dénominateur, on aura le quotient exact.  $72312146 : 8369$  donne 8640 pour quo-

ient, et 3986 pour reste ; le quotient exact est donc  $8640 + \frac{3986}{5}$ .

Donc, 1° si le numérateur et le dénominateur sont égaux, la fraction vaut 1 ; ce qui est d'ailleurs visible de soi-même :

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = 1.$$

2°. Si le numérateur surpasse le dénominateur, la fraction est plus grande que l'unité ; on l'appelle un *Nombre fractionnaire*, le mot fraction s'appliquant plus ordinairement aux nombres qui sont  $< 1$ . On extrait les entiers contenus dans une fraction, en divisant le numérateur par le dénominateur :  $\frac{37}{5}$ , ou 37 divisé par 5, est  $= 7 + \frac{2}{5}$ . Il est en effet évident que, notre unité étant partagée en 5 parties, la fraction contient autant d'unités qu'on prend de fois 5 parties, ou autant que 37 contient 5.

Réciproquement, pour convertir les entiers en fractions, il faut les multiplier par le dénominateur : pour réduire 7 en cinquièmes, on multiplie 7 par 5, et on aura  $7 = \frac{35}{5}$  ; de même  $8 + \frac{1}{5} = \frac{40}{5} + \frac{1}{5} = \frac{41}{5}$ .

3°. Diviser un nombre par 2, 7, 9, 11..., c'est en prendre la moitié, le 7°, le 9°, le 11°...

4°. Prendre les  $\frac{5}{7}$  d'un nombre, c'est le couper en 7 parts égales, et prendre cinq de ces parts. Il faudra donc diviser ce nombre par 7, et multiplier le quotient par 5. De ces deux opérations, on peut faire celle qu'on veut la première (p 20, 4°).

Ainsi, les  $\frac{5}{7}$  de 84 sont 5 fois  $\frac{84}{7} = 5 \times 12 = 60$ , ou  $= \frac{5 \times 84}{7}$  :

les  $\frac{3}{11}$  de 40 valent  $\frac{3 \times 40}{11} = \frac{120}{11} = 10 \frac{10}{11}$ .

38. Lorsqu'on augmente le numérateur seul, la fraction croît, parce qu'on prend un plus grand nombre des mêmes parties de l'unité. Si l'on augmente le dénominateur sans changer le numérateur, la fraction diminue ; car l'unité étant divisée en plus de parties, elles sont plus petites, et on en prend un même nombre. Ainsi, on peut, dans certains cas, reconnaître de suite quelle est la plus grande de deux fractions :  $\frac{5}{7} > \frac{4}{7}$ ,  $\frac{3}{4} > \frac{2}{5}$ ,  $\frac{4}{3} > \frac{3}{7}$ .

Il est aisé de voir qu'en doublant les deux termes d'une fraction, sa valeur demeure la même ; car si l'on double le dénomi-

nateur 7 de  $\frac{3}{7}$ , chacune des parties sera partagée en deux, puisque l'unité en contiendra 14 au lieu de 7. Pour avoir la même grandeur, il faudra donc prendre deux parties au lieu d'une, 4 au lieu de 2. . . . , enfin 10 au lieu de 5; et  $\frac{3}{7}$  sera  $= \frac{6}{14}$ . En triplant 7 et 5, on aurait de même  $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$ , etc. Donc la valeur d'une fraction ne change pas lorsqu'on en multiplie, et par conséquent lorsqu'on en divise les deux termes par un même nombre :  $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{15}{20} = \frac{30}{40}$ ;  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$ .

Nous concluons de là que, 1° pour amener les fractions  $\frac{3}{4}$  et  $\frac{5}{7}$  à être affectées d'un même dénominateur, multiplions les deux termes 5 et 7 de la première par 4, et les deux termes 3 et 4 de la seconde par 7, nous aurons  $\frac{5 \times 4}{7 \times 4}$  et  $\frac{3 \times 7}{4 \times 7}$  ou  $\frac{20}{28}$  et  $\frac{21}{28}$ ; il est clair que ce calcul, qui ne change pas la valeur des fractions, leur donne le même dénominateur  $4 \times 7 = 7 \times 4$ . Donc on réduira deux fractions au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune par le dénominateur de l'autre fraction. Il est donc bien facile de distinguer quelle est la plus grande de deux fractions données; par exemple,  $\frac{3}{4} < \frac{5}{7}$ , puisque  $\frac{21}{28} > \frac{20}{28}$ .

Le même raisonnement prouve que, si l'on a plus de deux fractions, en multipliant les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres, on les réduira au même dénominateur, qui sera le produit de tous ces dénominateurs. Soient  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{7}$  et  $\frac{2}{3}$ ; on multipliera les deux termes de  $\frac{3}{4}$  par  $4 \times 7 = 28$ , ceux de  $\frac{5}{7}$  par  $3 \times 4 = 12$ , enfin ceux de  $\frac{2}{3}$  par  $3 \times 7 = 21$ ; il viendra  $\frac{84}{28}$ ,  $\frac{60}{28}$  et  $\frac{42}{28}$ , donc  $\frac{3}{4} > \frac{5}{7} > \frac{2}{3}$ .

La réduction au même numérateur se fait aussi facilement, et pourrait également servir à distinguer quelle est la plus grande de plusieurs fractions.

2°. On amène aisément toute fraction à recevoir pour dénominateur un nombre donné, qui est un multiple exact de son dénominateur actuel. Ainsi,  $\frac{2}{3}$  peut prendre 60 pour dénominateur, car  $60 = 5$  fois 12; et en multipliant les deux termes par 5 on a  $\frac{2}{3} = \frac{10}{60}$ .

Lorsque les dénominateurs ne sont pas premiers entre eux,

la réduction au même dénominateur peut donc beaucoup se simplifier. Pour  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{3}$ , on voit de suite qu'en multipliant par 2 les deux termes de  $\frac{1}{3}$ , on a  $\frac{2}{6}$ , qui a même dénominateur que  $\frac{1}{2}$ . De même  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{2}{3}$ , deviennent  $\frac{4}{6}$  et  $\frac{5}{6}$ . Pour  $\frac{7}{12}$  et  $\frac{5}{8}$ , on multipliera 7 et 12 par 2, puis 5 et 8, par 3, et il viendra  $\frac{14}{24}$  et  $\frac{15}{24}$ . En général, on cherchera (n° 32) le plus petit nombre divisible par tous les dénominateurs proposés, et on pourra faire servir ce nombre de dénominateur commun. Par exemple, soient  $\frac{1}{2}$   $\frac{2}{3}$   $\frac{3}{4}$   $\frac{1}{6}$   $\frac{5}{8}$   $\frac{7}{12}$ . Après avoir trouvé que 24 est le plus petit nombre divisible par 2, 3, 4, 6, 8 et 12, on divisera 24 par ces divers nombres, et l'on aura pour quotiens... 12 8 6 4 3 2. Multipliant les deux termes de chaque fraction par le quotient qui lui correspond, on a.....  $\frac{12}{24}$   $\frac{16}{24}$   $\frac{18}{24}$   $\frac{4}{24}$   $\frac{9}{24}$   $\frac{14}{24}$ .

La réduction au même dénominateur est ainsi faite sous la forme la moins composée.

3°. Toute fraction dont les deux termes contiennent le même facteur, prend une *expression plus simple* par la suppression de ce facteur, et elle conserve la même valeur. Si l'on amène la fraction à ne plus avoir de diviseur commun à ses deux termes, il sera désormais impossible de lui faire prendre une forme plus simple, car si 7 et 11 étant premiers entre eux, on admettait, par exemple, que  $\frac{7}{11}$  pût être réduit à la valeur moins composée  $\frac{3}{4}$ , on aurait, en réduisant au même dénominateur  $\frac{7 \times 4}{44} = \frac{3 \times 11}{44}$  ou  $7 \times 4 = 3 \times 11$ . Ce qui est absurde (n° 25, 4°), puisque  $3 > 11$  devrait être divisible par 7.

Ainsi, pour réduire une fraction à une valeur égale plus simple et irréductible, il suffit de supprimer tous les facteurs communs à ces deux termes.

Pour cela, on décompose ces nombres en leurs facteurs premiers (n° 27), et on ne laisse subsister que ceux qui ne sont pas communs. Il est plus simple de chercher le plus grand commun diviseur des deux termes (n° 23), et de diviser ces termes par



ce diviseur. Ainsi, pour  $\frac{799}{2961}$ , on a trouvé (p. 31) que 47 est le plus grand commun diviseur de 799 et 2961 : divisant ces nombres par 47, on a  $\frac{17}{63}$  pour la plus simple expression de  $\frac{799}{2961}$ . Nous avons même indiqué (n° 30) un procédé facile pour déduire les termes cherchés de la série des quotiens qui conduisent au commun diviseur. Voici le calcul pour les deux fractions  $\frac{891}{3472}$  et  $\frac{549}{1062}$ , qu'on réduit à  $\frac{11}{16}$  et  $\frac{1}{2}$ , les plus grands communs diviseurs étant 27 et 59. (V. n° 30)

$$\begin{array}{cccccccc} 3472 & \left\{ \frac{891}{3} \right\} \left\{ \frac{296}{1} \right\} \left\{ \frac{135}{5} \right\} \left\{ \frac{81}{1} \right\} \left\{ \frac{54}{1} \right\} \left\{ \frac{27}{1} \right\} & 1062 & \left\{ \frac{649}{1} \right\} \left\{ \frac{413}{1} \right\} \left\{ \frac{236}{1} \right\} \left\{ \frac{122}{1} \right\} \left\{ \frac{59}{3} \right\} \\ 127 & 33 & 28 & 5 & 3 & 2 & 1 & 18 & 11 & 7 & 4 & 3 & 1 \end{array}$$

Une fraction peut se mettre sous une infinité de formes, et, sans changer de valeur, on peut l'exprimer par des nombres très différens ; mais il est plus aisé de se faire une idée juste de sa grandeur, lorsqu'elle est mise sous la forme la plus simple.

4°. Lorsque deux fractions sont égales, la fraction qu'on forme avec la somme ou la différence des numérateurs et celle des dénominateurs, leur est encore égale. En effet,  $\frac{1}{1} = \frac{12}{12}$ , car ces fractions équivalent à  $\frac{7}{7}$  ; les numérateurs sont des multiples de 7, et les dénominateurs, les mêmes multiples de 11 : or, il est clair que  $35 + 14$  est également un multiple de 7, et que  $55 + 22$  est le même multiple de 11 ; donc  $\frac{49}{77} = \frac{7}{11}$ .

La soustraction répétée, terme à terme, simplifie de plus en plus la fraction composée, sans changer de valeur : si l'une est irréductible, les termes de l'autre fraction sont les produits des deux termes de la première par un même facteur (\*).

(\*) Cherchons les nombres  $x$  et  $y$  qu'on peut ajouter ou ôter aux deux termes d'une fraction  $\frac{a}{b}$  sans en changer la valeur, ou  $\frac{a}{b} = \frac{a \pm x}{b \pm y}$ . En réduisant au même dénominateur, il vient  $ay = bx$ , et divisant par  $bx$ ,  $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$  dont les nombres qu'on peut ajouter ou ôter aux deux termes d'une fraction sans en changer la valeur, doivent former une fraction égale à la proposée. On voit que  $x$  ne peut être  $\pm 1$  qu'autant que  $a = b$ , c'est à dire qu'on ne peut ajouter ou ôter le même nombre aux deux termes d'une fraction que lorsqu'elle est  $\frac{1}{1}$ .



*Addition, Soustraction, Multiplication et Division.*

39. Rien n'est plus aisé que d'ajouter ou de soustraire des fractions qui ont même dénominateur ; on ajoute ou l'on retranche les numérateurs, et le dénominateur reste le même.  
 $\frac{7}{12} + \frac{3}{12} = \frac{10}{12}$  ou  $\frac{5}{6}$  ;  $\frac{7}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4}{12}$  ou  $\frac{1}{3}$  ;  $\frac{7}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12} - \frac{4}{12} = 1$ .

Si les dénominateurs ne sont pas les mêmes, on commencera à ramener les fractions à cet état (n° 38, 1°. et 2°.). Ainsi

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{8} \text{ ou } \frac{3 \cdot 2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8} = 1 + \frac{3}{8} ;$$

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{7} + \frac{3}{4} \text{ valent } \frac{56}{84} + \frac{60}{84} + \frac{63}{84} \text{ ou } \frac{179}{84} = 2 + \frac{11}{84}.$$

Pour  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{7}{10} + \frac{7}{15} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} - \frac{5}{12}$ , on trouvera 120 pour le plus simple dénominateur (n° 32) : les numérateurs deviendront  $60 + 80 + 72 + 84 + 56 + 100 - 45 - 30 - 50$  ou 327 : ainsi le résultat cherché est  $\frac{327}{120}$  ou  $2 + \frac{79}{40}$ .

Lorsque les fractions sont accompagnées d'entiers, on opère séparément sur les unes et sur les autres. Pour ajouter  $3 + \frac{1}{4}$

avec  $4 + \frac{3}{4}$ , on prend  $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4}$  ou  $1 + \frac{1}{4}$  ; on pose  $\frac{1}{4}$  et on retient 1, qui, ajouté avec 3 et 4, donne pour la somme cherchée,  $8 + \frac{1}{4}$ .

$$\begin{array}{r|l} 3 \frac{1}{4} & 11 \frac{3}{4} \dots 9 \\ 4 \frac{3}{4} & 4 \frac{3}{4} \dots 8 \\ \hline 8 \frac{1}{2} & 2 \frac{2}{4} \dots 10 \\ & 0 \frac{1}{2} \dots 7 \\ & 3 \frac{1}{4} \dots 6 \\ \hline & 23 \frac{1}{4} \dots 40 \end{array}$$

De même pour ajouter  $11 + \frac{1}{2}$ ,  $4 + \frac{1}{3}$ ,  $2 + \frac{5}{6}$ ,  $\frac{7}{12}$  et  $3 + \frac{1}{4}$ , on trouve  $\frac{49}{12}$  ou  $3 + \frac{1}{3}$  pour somme des fractions ;

on pose  $\frac{1}{3}$ , et on prend  $3 + 11 + 4 + 2 + 3 = 23$  ; donc la somme est  $23 + \frac{1}{3}$ .

Pour ôter  $1 + \frac{1}{4}$  de  $3 + \frac{1}{2}$ , on ôte  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{1}{2}$ , et 1 de 3, on a pour reste  $2 + \frac{1}{4}$ . De  $13 + \frac{1}{2}$  si l'on veut ôter  $7 + \frac{3}{4}$ , comme on ne peut ôter  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{1}{2}$ , on ajoute 1 à  $\frac{1}{2}$ , et

on cherche  $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$  : on trouve  $\frac{2}{4}$  ; puis on ajoute de même 1 au nombre 7 à soustraire (p. 12), et on dit  $13 - 8 = 5$  ; ainsi  $5 + \frac{2}{4}$  est la différence cherchée.

$$\begin{array}{r|l} 3 \frac{1}{2} \dots 2 & 13 \frac{1}{2} \\ - 7 \frac{3}{4} \dots 1 & - 7 \frac{3}{4} \\ \hline 2 \frac{1}{4} \dots 1 & 5 \frac{1}{4} \end{array}$$

40. Multiplier  $\frac{2}{3}$  par 3, c'est ajouter 3 fois  $\frac{2}{3}$ , ou  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$  ; ce qui se réduit à répéter 3 fois le numérateur 2 ;  $\frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{3}$

Pour multiplier une fraction par un entier, il faut multiplier

le numérateur par l'entier; on pourrait aussi diviser le dénominateur, s'il était un multiple de l'entier; car  $\frac{3}{4} \times 2$  donne  $\frac{3 \times 2}{4}$ .

en supprimant le facteur 2 commun aux deux termes, on a  $\frac{3}{2}$ ; l'opération s'est réduite à diviser par 2 le dénominateur de  $\frac{3}{4}$ . On trouve de même  $\frac{1}{8} \times 36 = \frac{1}{1} \times 2 = 22$ ;  $\frac{1}{11} \times 12 = \frac{12}{11}$ .

Réciproquement, pour diviser une fraction par un entier, il faut multiplier le dénominateur, ou diviser le numérateur par cet entier. Car, si le numérateur est un multiple du diviseur, comme pour  $\frac{15}{11} : 5$ , le quotient est visiblement  $\frac{3}{11}$ , puisque, si l'on multiplie  $\frac{3}{11}$  par le diviseur 5, on retrouve le dividende. Mais si le numérateur n'est pas un multiple du diviseur, comme pour  $\frac{6}{7} : 5$ , on peut aisément le rendre divisible par 5, en multipliant les deux termes par 5; on a  $\frac{6 \times 5}{7 \times 5}$ , la division par 5 donne donc  $\frac{6}{35}$ , calcul qui a consisté à multiplier le dénominateur 7 par 5.

41. Venons-en aux cas où le multiplicateur et le diviseur sont fractionnaires; prenons, par exemple,  $3 \times \frac{2}{5}$ . D'après la définition (n° 3) de la multiplication, on veut donc répéter le multiplicande 3, autant de fois que l'indique le nombre d'unités du multiplicateur  $\frac{2}{5}$ ; mais puisque ce dernier facteur n'est que les  $\frac{2}{5}$  de l'unité, il est clair qu'on ne veut ici prendre que les  $\frac{2}{5}$  de ce que donnerait 1 fois 3, savoir les  $\frac{2}{5}$  de 3. Donc en général multiplier par  $\frac{2}{5}$ , c'est prendre les  $\frac{2}{5}$  du multiplicande (\*).

(\*) Ces considérations équivalent à donner, avec M. Cauchy, cette définition de la multiplication : multiplier A par B, c'est opérer sur le nombre A, précisément comme on opère sur l'unité pour obtenir le nombre B. Ainsi 5 est l'unité ajoutée cinq fois, donc pour multiplier 3 par 5, il faut aussi ajouter 3 cinq fois;  $\frac{2}{7}$  est l'unité divisée en 7 parties égales, dont on prend l'une cinq fois; de même, pour multiplier 3 par  $\frac{2}{7}$ , il faut diviser 3 en 7 parties égales, et répéter 5 fois le résultat  $\frac{2}{7}$ ; le produit est  $\frac{6}{7}$ , ou, ce qui revient au même, les  $\frac{2}{5}$  du nombre 3. C'est ce que M. Lacroix exprime en disant que le produit est composé avec le multiplicande comme le multiplicateur l'est avec l'unité. Mais cette énonciation manque de clarté, parce que le mot composé doit y être pris avec une signification active ou passive, selon que le multiplicateur est un nombre entier ou une fraction.

Nous avons vu (n° 37, 4°.) que , pour prendre les  $\frac{2}{5}$  de 3, il faut multiplier 2 par 3 et diviser par 5;  $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5} = 3 \times \frac{2}{5}$ . De même multiplier  $\frac{2}{5}$  par  $\frac{3}{4}$ , c'est prendre les  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{2}{5}$ , il faut donc former 7 parts dans la grandeur  $\frac{2}{5}$ , et en prendre 5, ou multiplier  $\frac{2}{5}$  par 5 et diviser le résultat par 7 : la première de ces opérations donne  $\frac{15}{4}$ , et la seconde  $\frac{12}{5}$ .

Donc, 1°. *pour multiplier deux fractions, il faut multiplier terme à terme, c'est-à-dire, diviser le produit des numérateurs par celui des dénominateurs.*

2°. Le produit est plus petit que le multiplicande, quand le multiplicateur est une fraction moindre que 1.

3°. On peut intervertir l'ordre des facteurs, comme dans la multiplication des nombres entiers (n° 11).

4°. Lorsqu'il y a des facteurs communs, il convient de les supprimer avant d'effectuer les multiplications; par exemple, pour avoir les  $\frac{2}{3}$  des  $\frac{3}{4}$  des  $\frac{5}{6}$  des  $\frac{4}{5}$  de l'unité, c'est ce qu'on nomme une *Fraction de fraction*, il faut effectuer le produit  $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{5}$ , ou  $\frac{2 \times 3 \times 5 \times 4}{3 \times 4 \times 6 \times 5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ , en supprimant les facteurs 3, 4 et 5.

5°. Le carré, le cube, et en général toute puissance d'une fraction se forme en élevant les deux termes à cette puissance : par exemple, le carré de  $\frac{2}{3}$  est  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ , le cube est  $\frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ , etc.; donc si la fraction proposée est irréductible, la puissance l'est pareillement (n° 26).

6°. Pour multiplier 5348 par  $\frac{13}{16}$ , on pourrait multiplier 5348 par 13 et diviser le produit par 16, mais comme le multiplicande est un nombre assez fort, il est plus court de décomposer  $\frac{13}{16}$  en parties aliquotes, c'est-à-dire en fractions qui, réduites, aient 1 au numérateur, savoir :

$$\frac{13}{16} = \frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}.$$

On prendra donc d'abord la moitié de 5348, puis le quart,

Multi <sup>de</sup> ...	5348
$\frac{1}{2}$ .....	2674
$\frac{1}{4}$ .....	1337
$\frac{1}{16}$ .....	334 $\frac{1}{4}$
Produit...	4345 $\frac{1}{4}$

qui est la moitié du résultat qu'on vient de trouver, puis le seizième (quart du produit précédent).

On voit ci-contre le produit de 356 par  $23\frac{5}{8}$ ; ou l'on a décomposé  $\frac{5}{8}$  en  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{1}{4}$ , et  $\frac{1}{8}$  ou  $\frac{1}{16}$ .

$$\begin{array}{r} 356 \\ 23\frac{5}{8} \\ \hline 26\dots\dots 1068 \\ 3\dots\dots 7120 \\ 1\dots\dots 178 \\ 1\dots\dots 118 \\ \hline 8484\frac{1}{2} \end{array}$$

Pour diviser  $\frac{3}{4}$  par  $\frac{5}{7}$ , multipliez les deux termes de  $\frac{3}{4}$  par  $5 \times 7$ , savoir

$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5 \times 7}{4 \times 5 \times 7} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5} \times \frac{5}{7}$ , or pour diviser par  $\frac{5}{7}$ , il suffit de supprimer ici le facteur  $\frac{5}{7}$ , ce qui donne pour quotient  $\frac{3 \times 7}{4 \times 5}$ , ou  $\frac{3}{4} \times \frac{7}{5}$ : ainsi il faut multiplier le dividende par la fraction diviseur renversée.

$$8 : \frac{3}{4} = 8 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3} = 13\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4} : \frac{5}{11} = \frac{1}{4} \times \frac{11}{5} = \frac{11}{20}.$$

Le quotient est d'ailleurs plus grand que le dividende, quand le diviseur est moindre que l'unité.

Si les fractions renferment des facteurs communs, il ne faut pas attendre que la multiplication soit effectuée pour les supprimer.  $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$  est la même chose que  $2 : 4 = \frac{1}{2}$  ou  $\frac{1}{2}$ :

$$\frac{18}{19} : \frac{9}{18} = \frac{2 \cdot 9}{19} \times \frac{2 \cdot 19}{9} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{1} = 4.$$

42. Lorsqu'il y a des entiers joints aux fractions, on les convertit en nombres fractionnaires (n° 37, 2°). Ainsi

$$\begin{aligned} 3\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2} &= \frac{7}{2} \times \frac{15}{2} = \frac{105}{2} = 52\frac{1}{2}, \\ 15\frac{1}{4} \times 17\frac{1}{2} &= \frac{31}{2} \times \frac{35}{2} = \frac{1085}{2} = 542\frac{1}{2}, \\ 2\frac{1}{2} : 4\frac{1}{2} &= \frac{5}{2} : \frac{9}{2} = \frac{5}{9} \times \frac{2}{2} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Observez qu'il est souvent plus court d'exécuter séparément la multiplication de chaque partie, et d'ajouter. Pour  $3\frac{1}{2} \times 8$ , on multipliera par 8, d'abord  $\frac{1}{2}$ , et ensuite 3; on aura  $4$  ou  $2\frac{1}{2}$ , le produit est donc 26. L'exemple ci-contre montre le développement du calcul de  $15\frac{1}{4} \times 17\frac{1}{2}$ : ou multiplie 45 par 17,  $\frac{1}{4}$  par

$$\begin{array}{r} 45\frac{1}{4} \\ 17\frac{1}{2} \\ \hline 315 \\ 45 \\ \hline 45 \times 17 = 765 \\ 17 \times \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4} \\ \hline 769\frac{1}{4} \end{array}$$

11, 45 par  $\frac{1}{3}$ , et 17 par  $\frac{1}{4}$  : la somme de ces résultats est  $808\frac{1}{4}$ , produit cherché.

On abrége souvent le calcul en décomposant la fraction qui multiplie, en ses *parties aliquotes*, c'est-à-dire en d'autres fractions qui, réduites ont l'unité pour numérateur, et opérant pour chacun séparément. Ainsi pour prendre les  $\frac{1}{12}$  de 756, on pose  $\frac{1}{12} = \frac{5}{12} + \frac{4}{12} + \frac{1}{12}$ ; pour  $\frac{5}{12}$ , on prend la moitié de 756 qui est 378; pour  $\frac{4}{12}$ , le tiers qui est 252; enfin pour  $\frac{1}{12}$ , le quart de 252 qui est 63; les  $\frac{1}{12}$  de 756 sont.....  
 $= 378 + 252 + 63 = 693$ .

Dans la division, on peut chasser le dénominateur du diviseur, en multipliant les deux quantités proposées par ce même dénominateur, ce qui n'altère pas le quotient (n° 15, 1°.). Pour diviser  $2\frac{1}{3}$  par  $3\frac{5}{6}$ , je multiplie ces deux nombres par 6; j'ai 14 à diviser par 23 ou  $\frac{14}{23}$ . De même,  $125\frac{1}{3} : 18\frac{2}{3} = 501\frac{1}{3} : 75 = \frac{501}{75} + \frac{1}{75} = 6 + \frac{54}{75} : 1 : 2\frac{1}{2} = 3 : 7 = \frac{3}{7}$ .

### Des Fractions décimales.

43. L'embarras qu'entraînent, dans les calculs, les deux termes des fractions, a inspiré l'idée de fixer d'avance le dénominateur et de le sous-entendre, ce qui donne lieu à deux sortes de dispositions, les fractions décimales et les nombres complexes, mais les unes et les autres sont assujetties aux règles données précédemment, qui seulement deviennent plus simples. Occupons-nous d'abord des fractions décimales.

On a vu (n° 6) qu'un chiffre vaut dix fois moins que s'il occupait la place qui est à sa gauche; si l'on continue la même convention à la droite des unités dont le rang sera marqué par une virgule, on verra que le premier chiffre après les unités représentera des dixièmes, le deuxième des centièmes, le troisième des millièmes, etc. . . 3,3 designera 3 entiers et  $\frac{3}{10}$ ; 42,05 vaudra 42 et  $\frac{5}{100}$ ,  $0,403 = \frac{4}{10} + \frac{3}{1000} = \frac{403}{1000}$ .

Ainsi la partie qui suit la virgule est le numérateur, et il est inutile d'écrire le dénominateur, qui est toujours 1 suivi d'au-





Pour ajouter ou soustraire, complétez les nombres de décimales en ajoutant des zéros à la droite (n° 44, 3°.); puis faites le calcul à l'ordinaire, comme s'il n'y avait pas de virgule, sauf à la placer au même rang dans le résultat. Observez qu'à proprement parler, les zéros qu'on ajoute sont inutiles, et qu'il suffit de donner à chaque chiffre la place qui convient, eu égard à son rang compté de la virgule.

$$\begin{array}{r} 3,02 \\ 2,70 \\ 8,00 \\ 4,69 \\ \hline 18,41 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4852,791 \\ 4,00745 \\ 2,7 \\ 0,049 \\ \hline 4859,54745 \end{array}$$

Voici quelques exemples de soustraction.

$$\begin{array}{r} 57,02 \\ 48,1 \\ \hline 8,92 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4,8274 \\ 2,0139 \\ \hline 2,8135 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6,00435 \\ 0,17 \\ \hline 5,83435 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,842 \\ 1,004554 \\ \hline 2,837446 \end{array}$$

46. Pour multiplier les deux quantités 43,7 et 3,91, observons qu'elles équivalent à  $\frac{437}{10}$  et  $\frac{391}{100}$ . Le produit des numérateurs (n° 41) doit être divisé par celui des dénominateurs, ou  $\frac{437 \times 391}{1000} = \frac{170867}{1000} = 170,867$ . Donc, pour obtenir le produit de deux nombres décimaux, il faut multiplier sans avoir égard à la virgule, et séparer, à droite du produit, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs.

Voici divers autres exemples de multiplication :

$$\begin{array}{r} 2,4542 \\ 0,0053 \\ \hline 73626 \\ 122710 \\ \hline 0,01300726 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,7 \\ 4,12 \\ \hline 74 \\ 37 \\ \hline 148 \\ 15,244 \end{array} \quad \begin{array}{r} 21,32 \\ 0,100103 \\ \hline 6396 \\ 2132 \\ \hline 2,13419596 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0,04 \\ 0,007 \\ \hline 0,00028 \end{array}$$

On pourrait exécuter la multiplication en commençant par le chiffre de l'ordre le plus élevé, alors chacun des produits partiels devrait être avancé d'un rang vers la droite; la première ligne serait celle qu'on a coutume d'écrire la dernière; l'avant-dernière deviendrait la deuxième, etc. C'est ce qu'on

peut remarquer dans l'opération ci-contre; on a même cet avantage, qu'on trouve d'abord les chiffres de plus haute valeur et leur ordre, ce qui suffit quelquefois. Par exemple, le premier produit ayant donné 7 chiffres, et les quatre autres multiplicateurs partiels exigeant qu'on recule les produits de quatre rangs, il y aura en tout  $7 + 4$  chiffres au produit. Le nombre 28 qui commence la première ligne est donc suivi de 9 chiffres, ou 28 suivi de 9 zéros. (Foy, p. 19.)

$$\begin{array}{r}
 934525 \\
 34276 \\
 3 \dots 2803575 \\
 4 \dots 3738100 \\
 2 \dots 1869050 \\
 7 \dots 6511675 \\
 6 \dots 5607150 \\
 \hline
 32031778900
 \end{array}$$

On peut donc arrêter chaque multiplication à tel rang qu'on veut, et par conséquent obtenir au produit tant de chiffres qu'on juge à propos. Par exemple, pour obtenir le produit  $15,73432 \times 322,1179$ , je déplace les virgules et je fais en sorte que dans l'un des nombres, il n'y ait qu'un seul chiffre entier : le produit sera donc  $= 1573,432 \times 3,221179$ , puisque j'aurai déplacé la virgule d'autant de rangs vers la droite dans l'un, que vers la gauche dans l'autre. Je fais d'abord la multiplication par l'entier 3, et la place de la virgule se conserve visiblement la même que dans le multiplicande. Supposons qu'on veuille quatre décimales au produit. Je multiplie par le 2 des dixièmes, et je recule d'un rang à droite, ce qui me donne 314,6864. La multiplication par les 2 des centièmes, ne doit commencer qu'au deuxième chiffre (3)

$$\begin{array}{r}
 1573,432 \\
 3,221179 \\
 \hline
 4720,296 \dots 3 \\
 314,6864 \dots 2 \\
 31,4686 \dots 1 \\
 1,5734 \dots 0 \\
 1573 \dots 9 \\
 1101 \dots 8 \\
 141 \dots 7 \\
 \hline
 5068,3059
 \end{array}$$

du multiplicande, dont on supprime le dernier chiffre 2 à droite, en le marquant d'un point. On voit en effet que si l'on voulait conserver le produit en totalité, il faudrait encore le reculer d'un rang à droite, et que le produit 4 se trouvant dans la colonne des cinquièmes décimales, devrait ensuite être négligé. Le facteur 1 des millièmes exige qu'on supprime un second chiffre du multiplicande, on n'a donc pas égard au 3, et

le multiplicande est 15734 : pour le 1 suivant, il est de même 1573. Le facteur 7 donne 1101 ; le 9, 141.

Pour plus d'exactitude, il est convenable d'ajouter au produit du premier chiffre les dixaines contenues dans le produit du chiffre négligé à droite. Par exemple, pour le facteur 7, le multiplicande est réduit à 157 ; mais à  $7 \times 7$  on doit ajouter 2, provenant du produit supprimé de 7 par 3. De même  $9 \times 15$  est accru de 6, qui est la retenue du produit  $9 \times 7$ . Dans notre exemple, le produit demandé est 5068,306, ainsi qu'on peut s'en assurer en exécutant la multiplication en totalité, et réduisant le résultat aux seuls millièmes.

Voici un autre exemple où l'on a multiplié deux nombres de sept chiffres décimaux, et où l'on n'a voulu conserver que sept décimales au produit.

17,3243527	
3,5428319	
51,9730581	produit par 3
8,6611764	..... 5 augmente de 4
6929741	..... 4 ..... 1
346187	..... 2 ..... 1
138194	..... 8 ..... 2
5197	..... 3 ..... 1
173	..... 1 ..... 0
156	..... 9 ..... 3
61,3772693	produit 61,377269

Lorsque les facteurs ne sont qu'approchés, cette règle est surtout utile ; car le procédé général aurait l'inconvénient d'allonger le calcul pour donner au produit plus de chiffres qu'il ne faut, attendu qu'on n'y doit conserver au plus que des parties décimales de même ordre que dans les deux facteurs (\*).

(\*) Lorsqu'on multiplie deux nombres  $a$  et  $b$ , qui ne sont qu'approchés, les erreurs étant  $x$  et  $y$ , le vrai produit est

$$(a+x)(b+y) = ab + bx + ay + xy ;$$

négligeons  $xy$  qui est une fort petite quantité. L'erreur du produit  $ab$  est donc  $bx + ay$ , et s'affaiblit quand l'un des facteurs est approché par défaut et l'autre par excès, car  $x$  et  $y$  ayant des signes contraires, la somme  $bx + ay$

La dernière décimale qu'on obtient par ce procédé est un peu fautive, à cause de la retenue qui provient des colonnes négligées. On remédie à cet inconvénient en calculant une figure décimale, outre celles qu'on veut conserver, sauf à la négliger ensuite.

47. Pour diviser des quantités accompagnées de chiffres décimaux, on en complète le nombre (par des zéros) pour qu'elles en aient autant l'une que l'autre, et l'on supprime la virgule; par là le quotient reste le même, puisque le dividende et le diviseur sont multipliés par la même puissance de 10 (n° 15, 1°.). Soit 8,447 à diviser par 3,22; j'écris 3,220, et j'ai 8447 à diviser par 3220, le quotient est 2, et le reste 2007. Ainsi,

$$\frac{8,447}{3,22} = 2 + \frac{2007}{3220}; \text{ de même}$$

$$\frac{49,1}{20,074} = \frac{49,100}{20,074} \text{ ou } \frac{49100}{20074} = 2 + \frac{8952}{20074}.$$

devient une différence. Il convient donc de choisir des facteurs  $a$  et  $b$  qui soient dans ce cas

Mais s'il en est autrement, ou si l'on ignore dans quel sens chaque nombre s'approche, le terme  $a$ , le plus influent de l'erreur, s'affaiblit quand  $b$  décroît, c'est-à-dire quand  $b$  est très-approché. Ainsi l'erreur du produit  $ab$  est d'autant moindre que le plus petit facteur  $b$  est plus approché.

En général  $x$  et  $y$  sont toujours  $<$ ; dans une multiplication de deux fractions décimales, parce qu'il faut supposer qu'on a supprimé la virgule pour rendre entiers les facteurs  $a$  et  $b$ , et que si la première décimale négligée est au moins 5, on a dû augmenter de 1 le chiffre des unités. Faisons donc  $x = 1 - \frac{1}{10}$ , la limite de l'erreur est  $\frac{1}{10} \cdot a + b$ , ainsi il sera facile, dans chaque cas particulier, de distinguer les chiffres du produit  $ab$  qui sont certains, de ceux qui ne le sont pas. Par exemple,  $53,71 \times 1,02 = 54,7842$ , si les facteurs ne sont qu'approchés, en supprimant la virgule, leur demi-somme ayant 4 figures, les 4 derniers chiffres peuvent être fautifs, les 4 décimales du produit n'étaient donc pas utiles à trouver, puisqu'on est incertain s'ils sont exacts. De là résulte qu'il est avantageux de simplifier le calcul de la multiplication, pourvu qu'on n'altère que ces chiffres defectueux, qu'on serait d'ailleurs obligé de rejeter ensuite. Dans l'exemple que je cite, la demi-somme des facteurs a 4 chiffres, et le produit complet 14 décimales, il n'y a donc que les 5 premières décimales dont on soit sûr : or on en doit chercher que 6, ou 7 au plus, et en négliger ensuite une. Le produit est 61,37729.



Cette règle se simplifie(\*) lorsque le diviseur n'a pas de fractions, car on peut diviser à part les entiers ;  $\frac{6,9345}{3} = 2,3115$ . S'il y a plus de décimales dans le dividende que dans le diviseur, on est ramené à ce dernier cas, en déplaçant la virgule d'autant de rangs des deux parts, de manière que le diviseur devienne un nombre entier ;  $8,447 : 0,09 = 844,7 : 9 = 93,8 + \frac{5}{90}$ .

### *Des Approximations et des Périodes.*

48. L'erreur que l'on commet en négligeant le dernier chiffre d'une fraction décimale, est d'autant moindre que cette fraction a plus de figures. Ainsi, lorsqu'on prend 0,4, au lieu de 0,43, on fait une erreur de 3 centièmes ; elle n'est que de 3 millièmes quand on pose 0,04, au lieu de 0,043. Lorsqu'on se contente de deux ou trois décimales, et qu'on néglige les autres, c'est qu'on suppose qu'il n'en résulte que des erreurs trop petites pour mériter qu'on y ait égard ; il est rare qu'on emploie plus de six ou sept figures décimales.

Le résultat d'un calcul étant 4,837123, on peut prendre 4,8 ou 4,83, ou 4,837.... pour valeur de cette quantité ; et comme elle est  $> 4,8$  et  $< 4,9$ , on voit que ces deux expressions sont approchées à moins de  $\frac{1}{10}$ , l'une par défaut, l'autre

(\*) La division éprouve une simplification analogue à celle de la multiplication par exemple, 320,31768 à diviser par 93,4525. si l'on ne veut que 4 chiffres décimaux, après avoir trouvé les deux premiers chiffres 3,4 à l'ordinaire, on supprimera le dernier chiffre 5 du diviseur, de la le quotient partiel 2, et l'on aura à multiplier 93452 par 2, et à soustraire de 257918, il restera 71013. On supprimera de nouveau un chiffre au diviseur, et l'on aura le quotient 7 et le reste 5597, etc. On aura soin, chaque fois qu'on négligera un chiffre, d'accroître le produit suivant des dizaines que donnerait ce même chiffre. Du reste, les derniers chiffres du quotient sont defectueux. Tout cela s'explique facilement.

$$\begin{array}{r} 3203176,8 \\ 3996018 \\ 257918 \\ 71013 \\ 5597 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 934525 \\ 3,4276 \end{array} \right.$$

par excès. De même 4,83 et 4,84 le sont à moins de  $\frac{1}{10}$ , et même on préférera 4,84, attendu que le chiffre suivant est 7, et que 4,84, approche plus que 4,83. En général, si le premier des chiffres qu'on supprime est 5 ou plus, on doit augmenter d'une unité le dernier chiffre conservé.

49. Il arrive souvent que le résultat d'un calcul est une fraction irréductible compliquée; on se contente alors d'une approximation dont le degré dépend de la nature de la question. Ainsi, au lieu de  $\frac{47}{68}$ , supposons qu'on demande une autre fraction plus simple, et qui en diffère de moins de  $\frac{1}{8}$ . Il est clair que si l'on connaissait deux fractions, telles que  $\frac{5}{8}$  et  $\frac{6}{8}$ , dont le dénominateur fût 8, et dont les numérateurs ne différassent que de 1, elles rempliraient l'une et l'autre la condition exigée, si  $\frac{47}{68}$  était compris entre elles; il s'agit de trouver ces numérateurs 5 et 6. Multipliant ces trois fractions par 8, celles qu'on cherche seront réduites à leurs numérateurs inconnus dont 1 est la différence, et la proposée, qui devient  $8 \times \frac{47}{68}$  ou  $\frac{4416}{68}$ , sera encore comprise entre ces numérateurs: mais, en extrayant les entiers, on trouve que  $\frac{4416}{68}$  est entre 65 et 66; ce sont donc les numérateurs demandés. En effet, on vérifie aisément que  $\frac{65}{8}$  ne diffère de  $\frac{47}{68}$  que de  $\frac{1}{544}$ , bien moindre que  $\frac{1}{8}$ . De là cette règle (\*):

*Multipliez la fraction proposée par le dénominateur donné; l'entier approché du produit (par excès ou par défaut) est le numérateur demandé. Pour approcher de  $\frac{47}{68}$  à moins de  $\frac{1}{8}$ , on multiplie par 68, et on a  $\frac{47}{68} = 6$  ou 7 en nombre entier; donc  $\frac{6}{8}$  et  $\frac{7}{8}$  sont les fractions cherchées. Pour approcher de  $\frac{47}{68}$  à moins de  $\frac{1}{4}$ , on a  $\frac{47}{68} = 4\frac{6}{68}$ ; or  $\frac{6}{68}$  à moins de  $\frac{1}{4}$  est entre  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{2}$ ; donc 4  $\frac{1}{4}$  et 5 sont les nombres demandés.*

---

(\*) Pour approcher d'une fraction  $\frac{a}{b}$  à moins de  $\frac{1}{q}$ ; il faut déterminer  $x$  par la condition que  $\frac{x}{q} < \frac{a}{b} < \frac{x+1}{q}$ , multipliant tout par  $q$ , il faut que  $x < \frac{aq}{b} < x+1$ , c'est à dire que les numérateurs inconnus de nos fractions sont les quotiens entiers  $x$  et  $x+1$  par défaut et par excès, de  $aq$  divisé par  $b$ .

Appliquons cette règle aux fractions décimales. Proposons-nous d'approcher de  $\frac{4}{7}$  à moins de  $\frac{1}{7}$ ; et multiplions  $\frac{4}{7}$  par 10, il viendra  $\frac{40}{7}$ , qui est entre 5 et 6; donc 0,5 et 0,6 sont les fractions demandées. Pour approcher à moins de 0,01, il faut multiplier par 100, et on a  $\frac{400}{7}$ , entre 57 et 58; donc, 0,57 et 0,58 ne diffèrent pas de 0,01 de  $\frac{4}{7}$ . En général, *divisez le numérateur par le dénominateur, et ajoutez au reste de chaque division un zéro, jusqu'à ce que vous ayez obtenu au quotient un chiffre de l'ordre de l'approximation demandée.*

Ainsi  $\frac{25}{7}$  soumis à cette méthode d'approximation, donne 3,5 ou 3,57, ou 3,571, ou 3,5714, . . . suivant qu'on veut que la valeur soit approchée à moins de  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{1}{1000}$ , . . . De même  $\frac{47}{100}$ , après avoir donné le quotient entier 407, en continuant la division à l'aide d'un zéro placé après chaque reste, donne 407,389 . . .

50. Lorsque après avoir ajouté un nombre suffisant de zéros, la division amène le reste zéro, la fraction est exprimée exactement en décimales. On a exactement  $\frac{1}{2} = 0,5$ ,  $\frac{1}{4} = 0,25$ ,  $\frac{1}{8} = 0,125$ ,  $\frac{1}{10} = 0,1$ . Il est aisé de prévoir dans quel cas cela arrivera; car la division ne pouvant s'effectuer qu'après avoir multiplié le numérateur par 10, 100, 1000 . . . il faut, si la fraction est irréductible, que cette puissance de 10 soit divisible par le dénominateur (n° 25, 4°.), ce qui suppose qu'il n'a d'autres diviseurs premiers que 2 et 5, et que le plus haut exposant de 2 et 5 est la puissance de 10 qu'on emploie (\*). Donc, *pour qu'une fraction irréductible puisse être convertie exactement en décimales, il est nécessaire et il suffit que le dénominateur ne contienne que des puissances de 2 et de 5, quel que soit d'ailleurs le numérateur; le nombre de figures décimales est égal à la plus haute puissance de 2 et de 5.*

---

(\*) La forme générale des fractions réductibles exactement en décimales est  $\frac{a}{2^m \times 5^n}$ , le nombre des figures est le plus grand des deux exposants  $m$  et  $n$  et si l'un surpasse l'autre de  $k$ , la partie décimale est  $a \times 5^k$ , ou  $a \times 2^k$ , selon que  $m$  est  $>$  ou  $<$   $n$ . si  $m = n$ , la partie décimale est  $a$ .

Si ce dénominateur est  $2^1 \times 5^1$  ou 200, il y a 3 figures; par exemple,  $\frac{141}{200} = 0,705$ .

51. Dans tout autre cas, une fraction ne peut être exprimée en décimales que par approximation; mais, comme les restes des divisions successives sont nécessairement moindres que le diviseur, et que le nombre de ces restes est indéfini, on ne tarde pas à retrouver l'un d'entre eux. On a alors une seconde fois le même dividende, qui conduit au quotient et au reste subséquent qu'on a obtenus alors, et ainsi de suite. On retrouve donc au quotient *périodiquement* les mêmes chiffres dans le même ordre; et puisque cette période s'établit lorsqu'on retrouve le même reste, et que ces restes sont moindres que le dénominateur, la quotité de restes différens qu'on peut trouver, est au plus ce diviseur moins un; donc *la période est composée de moins de chiffres que le dénominateur n'a d'unités*. Nous indiquerons à l'avenir la période, en la plaçant entre deux crochets.

Par exemple,  $\frac{1}{3} = 0,666 \dots = 0,[6]$ ,  $\frac{1}{11} = 0,272727 \dots = 0,[27]$ ;  $\frac{8}{11} = 0,[342] \dots$ ;  $\frac{4}{7} = 0,[571428] \dots$ ;  $\frac{5}{6} = 0,83333 \dots = 0,8[3]$ ;  $\frac{7}{11} = 0,58[3] \dots$ : la période est tantôt de 1, tantôt de 2, de 3... chiffres; là elle commence dès la virgule; ici elle ne prend qu'un, deux... rangs au-delà.

52. Si le dénominateur n'a ni 2, ni 5 pour facteur, la période commencera dès la virgule. Car en réduisant  $\frac{a}{b}$  en fraction décimale, supposons que les restes 5 et 2, donnant les dividendes 50 et 20, aient pu conduire à deux restes égaux; la différence 50—20 serait divisible par 7 (p. 21), ce qui est impossible, puisque les restes 5 et 2 sont  $< 7$ , et que 7 n'a 2, ni 5 pour facteurs. Ainsi deux restes inégaux 5 et 2 ne peuvent donner le même reste, et si l'on obtient deux restes égaux, les restes précédens l'étaient eux-mêmes; et ainsi en remontant jusqu'au 1<sup>er</sup> reste 3 (\*).

---

(\*) Pour réduire une fraction  $\frac{a}{b}$  en décimales, il faut ajouter un zéro près de chaque reste admettons que  $10D$  et  $10D'$  soient deux dividendes partiels conduisant au même reste  $r$ , les quotiens étant  $q$  et  $q'$ , on a

$$10D = bq + r, \quad 10D' = bq' + r,$$



Mais si le dénominateur de la fraction a pour facteurs des puissances de 2 et de 5, avec d'autres nombres, la période est précédée d'autant de chiffres qu'il y a d'unités dans l'exposant le plus élevé de 2 et de 5. Car soit proposée la fraction  $\frac{83}{140}$ , comme  $140 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$ , si l'on multiplie par 100, on a.....

$100 \times \frac{83}{140} = \frac{5 \times 83}{7} = \frac{415}{7} = 59 \frac{2}{7} = 59, [285714]$ ; cette période commence dès la virgule : donc, en divisant par 100,  $\frac{83}{140} = 0,59[285714]$  dont la partie périodique est précédée de deux figures.

Supposons qu'une fraction, telle que  $\frac{2}{7} = 0, [14285]$ , ait à sa période le plus grand nombre possible de chiffres, c'est à-dire autant qu'il y a d'unités dans son dénominateur moins 1. On a dû obtenir dans les divisions successives tous les restes 1, 2, 3, ... jusqu'à 6, mais dans un autre ordre : si donc on veut réduire  $\frac{2}{7}$  en décimales, il est inutile de recommencer le calcul ; il suffit de le reprendre à l'endroit où l'on a obtenu le reste 3, et de faire commencer la période au terme qu'on a déduit de  $\frac{10}{7}$ , qui est 4 ; on a de suite  $\frac{2}{7} = [428571]$ . On voit qu'on a seulement rejeté à la fin les deux premiers chiffres 71 de la première période. De même  $\frac{1}{17} = 0, [052631578947368421]$ , et pour  $\frac{1}{13}$  on rejettera les trois premiers chiffres 052 à la fin, et l'on aura  $[631 \dots 21052]$ . C'est ce qui se voit aisément, en com-

d'où retranchant

$$10(D - D') = b(q - q')$$

Or, si  $b$  n'a pour facteur ni 2 ni 5, 10 et  $b$  sont premiers entre eux ;  $q - q'$  est  $< 10$ , puisque chaque quotient partiel n'a qu'un chiffre ; le second membre ne peut donc être un multiple de 10, ce qui démontre que cette équation ne peut subsister que par  $q - q' = 0$  ; d'où  $D = D'$  : c'est-à-dire que le même  $r$  se reproduit qu'autant que le dividende partiel est lui-même revenu ; donc  $q$  fait partie de la période, puisqu'elle s'annonce au retour de l'un des restes déjà obtenus. Et comme le reste  $D$  doit aussi provenir d'un dividende qui a déjà été employé, il s'en suit qu'il faut remonter au premier dividende  $a$ , pour trouver l'origine de la période, laquelle commence par conséquent dès la virgule.



on peut le calcul pour  $\frac{1}{27}$ , puisqu'on trouve que les premiers chiffres sont 63...

On peut faire la même chose, lorsque la fraction proposée a pas autant de chiffres que d'unités dans le dénominateur moins 1 (\*), pourvu que le numérateur de la deuxième fraction soit un des restes obtenus pour la première. Ainsi  $\frac{1}{27} = 0, [037]$ ; pour  $\frac{12}{27}$  on a 0, [370]; pour  $\frac{19}{27}$  on a 0, [703], parce que 10 est le premier reste, et 19 le deuxième dans la division de 1 par 27. Pour  $\frac{1}{27}$ , il suffit de doubler les quotiens et les restes: ainsi,  $\frac{1}{27} = 0, (07)$ ,  $\frac{2}{27} = 0, (740)$ ,  $\frac{3}{27}$  ou plutôt  $\frac{1}{9} = 0, (407)$ . On obtient de même, en multipliant par 5,  $\frac{5}{27} = 0, (185)$ ,  $\frac{11}{27} = 0, (851)$ ,  $\frac{13}{27} = 0, (518)$ .

Voici diverses périodes dans le cas où le numérateur est 1; on y a inscrit, pour chaque chiffre de la période, le reste qui l'a donné, afin d'en pouvoir tirer les périodes, quand le numérateur n'est pas 1.

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3} = 0, [3], \quad \frac{1}{7} = 0, [142857], \quad \frac{1}{11} = 0, [09] \\ \text{Restes} \dots 1 \quad \quad \quad 1 \ 3 \ 2 \ 6 \ 4 \ 5 \quad \quad \quad 1 \ 10 \\ \frac{1}{13} = 0, [076923], \\ \text{Restes} \dots 1 \ 10 \ 9 \ 12 \ 3 \ 4 \\ \frac{1}{17} = 0, [0588235294117647]. \\ \text{Restes} \dots 1 \ 10 \ 15 \ 14 \ 4 \ 6 \ 9 \ 5 \ 16 \ 7 \ 2 \ 3 \ 13 \ 11 \ 8 \ 12 \\ \frac{1}{19} = 0, [027] \quad \frac{1}{21} = 0, [02439]. \\ \text{Restes} \quad 1 \ 10 \ 26 \quad \quad \quad 1 \ 10 \ 18 \ 16 \ 37 \end{array}$$

Réduisons en décimales une fraction dont le numérateur soit 1, et supposons qu'on obtienne un reste égal au dénominateur moins un; par exemple,  $\frac{1}{13}$ , après trois divisions, donne le quotient 0,076 et le reste 12. Pour continuer l'opération, il faut réduire en décimales  $\frac{12}{13}$ , ou  $\frac{13-1}{13} = 1 - \frac{1}{13}$ .

(\*) On remarque que, lorsque le diviseur est un nombre premier, si la période n'a pas autant de chiffres que ce nombre a d'unités moins 1, du moins elle en a une quotité, qui est facteur partie du reste de cette différence.

Ainsi  $\frac{1}{13}$  n'a que 6 chiffres à la période; mais 6 est facteur de 13-1 (Voyez la page 43, et l'Arith. compl. de M. Lethévin).

Il faut donc retrancher de 1 la partie ,076 déjà obtenue au quotient, c'est-à-dire prendre les complémens de tous ses chiffres à 9, savoir, 923, en sorte que  $\frac{1}{13} = 0, [076923]$ . La période est alors accomplie, car puisque  $13^3$  divisé par 13 a donné le reste 12, en ajoutant 1,  $10^3 + 1$  doit donner le reste 13, ou plutôt zéro,  $\frac{10^3 + 1}{13} = \text{entier}$  : multipliant par  $10^3 - 1$ , on

trouve que  $\frac{10^6 - 1}{13} = \text{entier}$ , c'est-à-dire que  $\frac{10^6}{13}$  donne le reste 1, la période a donc 6 termes.

Ce qu'on vient de dire s'applique toujours au cas où la période est composée d'autant de chiffres qu'il y a d'unités dans le dénominateur moins un, car on est sûr d'obtenir (dans un ordre différent) tous les restes 1, 2, 3, 4, ... et par conséquent le dénominateur moins un : le nombre des divisions qui donnent la période est réduit à moitié. Ainsi pour  $\frac{1}{19}$ , neuf divisions donnent le quotient 0,052631578 et le reste 18, prenant donc les complémens à 9, on joint à la suite le nombre 947368421, et on a  $\frac{1}{19} = 0, [052631578947368421]$ . Pour  $\frac{1}{7}$  on a 0,0136 et le reste 72, donc  $\frac{1}{7} = 0, [01369863]$

Le procédé suivant permet de prolonger rapidement la partie décimale obtenue, par quelques divisions initiales. Pour  $\frac{1}{13}$  on trouve 0,05263 avec le reste 3, et il reste à développer  $\frac{3}{13}$  ou  $3 \times \frac{1}{13}$ , on multipliera donc par 3 le quotient trouvé et on écrira ce produit à la suite; savoir 15789, alors le reste est 9, et il faut multiplier par 9 le quotient total, ou plutôt par 3 le produit précédent, et ainsi de suite. On donne au calcul la disposition suivante :

$$\begin{array}{r} \frac{1}{13} = 0, 05263 \\ \quad 15789 \\ \quad \quad 947368 \\ \quad \quad \quad 142105 \\ \quad \quad \quad \quad 263 \dots \end{array}$$

Chaque produit par 3 ajoute cinq figures au résultat, et quand le produit a 6 chiffres, le 6<sup>e</sup> s'ajoute aux unités du produit

celles qui étaient en usage à Paris ; car elles changeaient avec les provinces , et même avec les villes d'un même État (\*).

L'unité de longueur se nommait *Toise* ; elle se divisait en 6 *Pieds*, chacun de 12 *Pouces*, et chaque pouce de 12 *Lignes*.

L'unité de poids était la *Livre* lb, partagée en 16 *Onces* 3, chacune de 8 *Gros* ou *Dragmes* 3, divisés chacun en 72 *Grains* gr, ou en 3 *Scruples* 3 (de 24 grains). La livre était encore partagée en 2 *Mars*, de 8 onces chacun, etc. Le signe # désigne une demie, ainsi 3 iiß veut dire 3 gros et demi.

La livre-monnaie, dite *Tournois*, était composée de 20 *Sous*, chacun de 12 *Denters*.

L'unité pour peser les diamans était le *Karat*, poids de 3,876 grains poids de marc, ou 2 décigrammes ; il se divise en 4 grains (\*\*).

Le *Jour* se partage en 24 *Heures*, l'heure en 60 *Minutes*, chacune de 60 *Secondes*....

Les étoffes étaient mesurées avec une longueur nommée *Aune*, d'environ 4½ pouces (43°,9028 = 43° 10', 8333).

(\*) Ces irrégularités tiennent, soit aux besoins, soit aux usages des pays. Tantôt on préférait la sous-division par 12, tantôt par 20 ou choisissait des mesures en relation ici avec les travaux de l'agriculture, là avec les consommations. Par exemple, le boisseau ras de blé en grain pesait 20 lb ; un septier de farine pesait 220 lb, etc., la livre de Lyon avait 14 onces ; ailleurs elle n'en contenait que 12, etc.

En faisant disparaître toutes ces variations, le nouveau système a rendu un service incontestable aux hommes, mais il a malheureusement l'inconvénient de ne pas être devenu, par l'usage, en relation avec nos besoins.

(\*\*) La valeur d'un diamant dépend de son poids, de sa taille, de sa figure, de son eau, son éclat et sa transparence. . . Pour l'évaluer, d'après la règle de Joffroy, on exprime d'abord le prix du poids d'un karat, et l'on multiplie ce prix par le carré du nombre de karats. Par exemple, si le karat vaut 50 francs, un diamant de 133 karats vaut 50 x (133)², ou 884 450 francs. Le *Petit* diamant de la couronne, du poids de 136 karats  $\frac{3}{4}$ , fut payé 2 millions et demi, ce qui revient à 134 francs le premier karat. Le *Sancy*, autre diamant de la couronne, pèse 53  $\frac{1}{2}$  karats. Au reste, la règle de Joffroy ne s'applique que jusqu'à un certain poids, passé lequel le diamant n'a qu'un prix d'affection.

Le *Boisseau*, capacité de 655,78 pouces cubes, contenait 16 litrons (de 40,986 pouces cubes chaque). Le *Septier* valait 12 boisseaux, c'est-à-dire 7869,36 pouces cubes; la *Mine*, 6 boisseaux; le *Minot*, 3; le *Muid*, 144, c'est-à-dire 12 septiers.

La *Pinte*, qui, selon l'ordonnance des Échevins, devait contenir 48 pouces cubes, n'en avait réellement que 46,95. La *Velle* valait 8 pintes; le *Muid* 288; il se divisait en 2 *Feuilletes* ou 4 *Quartauts*. Le *Tonneau* valait 2 muids ou 576 pintes. A Bordeaux, le tonneau contenait 3 muids ou 864 pintes; la *Queue* d'Orléans valait 432 pintes.

Récapitulons les mesures ci-dessus énoncées.

Toise	Pieds.	Pouces.	Lignes	Jour.	Heures.	Minutes.	Secondes.
1	= 6	= 72	= 864	1	= 24	= 1440	= 86400
		1	= 12			1	= 60
			1				1
							60

Livre.	Mars	Onces	Gros	Scruples.	Grains
1	= 2	= 16	= 128	= 384	= 9216
		1	= 8	= 64	= 4608
			1	= 4	= 576
				1	= 72
					1
					24

Muid	Septiers	Boisseaux.	Litrons.	Livre.	Sous.	Deniers.
1	= 12	= 144	= 2304	1	= 20	= 240
		1	= 192			1
			1			12

Quant aux rapports entre les anciennes et les nouvelles mesures, voyez à la fin de l'Arithmétique.

Il nous reste à parler des moyens de faire les quatre règles sur des *nombrez complexes* : on nomme ainsi ceux qui sont formés d'unités principales et de sous-divisions. Nous n'avons rien à dire pour les nouvelles mesures qui, n'admettant que des fractions décimales, rentrent dans ce qu'on a enseigné (n<sup>os</sup> 45, 46 et 47).

56 Pour ajouter ou soustraire les quantités complexes, on écrit, au-dessus les unes des autres, les parties qui ont une même dénomination, et l'on opère successivement sur chacune, en commençant par les plus petites. Si la somme d'une colonne surpasse le nombre d'unités nécessaires pour former une ou

plusieurs unités de l'ordre supérieur, on les retient, et l'on ne pose que l'excédant.

Exemples d'addition :

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Mars.	Onces.	Gros.	Grains.
154	3	7	$9 \frac{1}{2}$	15	3	6	42
23	2	8	$11 \frac{1}{3}$	217	7	7	60
132	5	10	$3 \frac{5}{6}$	41	6	5	17
0	2	7	1	4	5	6	10
311	2	10	$1 \frac{2}{3}$	280	0	1	57

Livres.	Sous.	Deniers.	Jours.	Heures.	Minutes.	Secondes.
322	17	5	2	10	42	54
43	11	7	5	9	17	19
7	8	4	0	21	3	48
18	2	7	8	17	4	1
43	16	6				
435	16	5				

Dans le premier de ces exemples, la colonne des lignes donne 25 lignes  $\frac{1}{2}$ , ou 2 pouces 1 ligne  $\frac{2}{3}$ , parce que 12 lignes valent 1 pouce ; on pose donc seulement 1  $\frac{2}{3}$ , et l'on reporte 2 à la colonne des pouces, qui donne 34, ou 2 pieds 10 pouces ; posez 10 et retenez 2, etc.

Voici quelques soustractions :

Livres.	Onces.	Gros.	Grains.	Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
32	9	2	44	487	0	0	0
12	12	5	12	319	4	3	10
19	12	5	32	167	1	8	2

Livres.	Sous.	Deniers.	Jours.	Heures.	Minutes.	Secondes.
340	17	4	17	11	47	5
127	8	7	13	18	55	40
213	8	9	3	16	51	25



On voit qu'après avoir soustrait 12 grains de 44, on passe aux gros ; mais comme  $2 - 5$  ne se peut, on ajoute 1 once ou 8 gros, et l'on a  $10 - 5 = 5$  ; puis on ajoute pareillement une once aux 12 qu'il faut ôter de 9 ; de sorte qu'on dira  $9 - 13$  ne se peut, ajoutant une livre ou 16 onces, on a  $25 - 13 = 12$ , etc... Cette opération est fondée sur le même principe que pour les nombres entiers.

Descartes, né le 3 avril 1596, est mort le 11 février 1650 ; Pascal, né le 19 juin 1623, est mort le 10 août 1662 ; Newton, né le 15 décembre 1642, est mort le 18 mars 1727. On demande la durée de la vie de ces grands géomètres.

57 Pour la multiplication des nombres complexes, d'après les principes donnés (n° 42), on opérera séparément sur les entiers et sur les fractions. On remarquera que le multiplicateur doit toujours être un nombre *abstrait* (n° 54), destiné à marquer combien de fois on répète le multiplicande. Multiplier 12 francs par 3 aunes, ce ne peut être répéter 12 francs 3 aunes de fois, mais bien répéter 12 francs autant de fois que l'unité est comprise dans trois aunes, c'est-à-dire 3 fois. Ainsi, lorsque les deux facteurs paraissent concrets, c'est que la question est mal interprétée. Au reste, ceci s'éclaircira par la suite.

Il se présente deux cas, suivant que le multiplicateur est ou n'est pas complexe.

1<sup>er</sup> CAS. On voudrait savoir le prix de 17 aunes ; d'une étoffe qui coûte 45 livres 12 sous 6 deniers l'aune ; il est clair qu'il faut répéter ce dernier nombre 17 fois et  $\frac{1}{2}$ , de sorte que le multiplicateur 17  $\frac{1}{2}$  cesse de représenter des aunes, et devient un nombre *abstrait* (n° 54). On multiplie d'abord 45 livres, puis 12 sous, puis enfin 6 deniers par 17. Le premier de ces calculs n'offre pas de difficultés. Décomposons 12 sous en 10 + 2 : puisque 1 livre répétée 17 fois, donne 17 livres, 10 sous ou  $\frac{1}{2}$  livre doit donner la moitié de 17 livres ; 2 sous en donne le dixième, ou le cinquième du produit de 10 sous. On a pour 6 deniers, le quart du produit que donne 2 sous. On prend ensuite les deux tiers du multiplicande et l'on ajoute le tout.

Voici l'ordre qu'on suit dans ce calcul :

45 <sup>h</sup>	12 <sup>s</sup>	6 <sup>a</sup>
17	1	
315 <sup>h</sup>		
450		
} 17 fois 45 <sup>h</sup>		
8...	10 <sup>s</sup> .....	pour 10 <sup>s</sup> , la moitié de 17 <sup>h</sup> .
1...	14.....	pour 2 <sup>s</sup> , le 10 <sup>s</sup> de 17 <sup>h</sup> , ou le 5 <sup>s</sup> de 8 <sup>h</sup> 10 <sup>s</sup> .
0...	8... 6 <sup>a</sup> ..	pour 6 <sup>a</sup> , le $\frac{1}{2}$ du produit qu'a donné 2 <sup>s</sup> .
15...	4... 2...	pour $\frac{1}{3}$ , le tiers du multiplicande
15...	4... 2...	pour $\frac{1}{3}$ .
806 <sup>h</sup>	0 <sup>s</sup>	10 <sup>a</sup>

Dans ce genre d'opérations tout se réduit à décomposer chaque fraction en ses *aliquotes*, comme n° 42. Ainsi 19 sous ou  $\frac{19}{20}$  de livre, se décompose en  $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ , et  $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ ; il faudrait donc, pour 19 sous, prendre la  $\frac{1}{2}$ , le  $\frac{1}{4}$  et le  $\frac{1}{5}$  de l'entier multiplicateur, considéré comme des livres. On pourrait aussi prendre  $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$  et deux fois  $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ . De même pour  $\frac{7}{8}$  on prendra  $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ ,  $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$  et  $\frac{1}{8}$ .

On voit donc que, pour multiplier une fraction complexe, après l'avoir exprimée en fractions à deux termes, il faut décomposer son numérateur en parties qui divisent le dénominateur; les fractions composantes seront donc réduites à d'autres dont le numérateur est 1. Par exemple, pour 10 poudres, ou  $\frac{10}{12}$  de pied, on coupera 10 en 6 + 2 + 2, ce qui sera, en réduisant,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{3}$ ; ou bien en 4 + 4 + 2, qui sont  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{6}$ ; ou en 6 + 3 + 1, qui donnent  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{12}$ , etc....

Observons que si le multiplicateur n'a qu'un seul chiffre, il est plus simple d'opérer comme pour l'addition. Dans l'exemple ci-contre, on dira: 7 fois 18 grains = 126 grains =

Liv.	Onc.	Gros	Grains
57	5	4	18
2			
401	6	5	54

1 gros 54 grains. On pose 54 et on retient 1. Passant au produit de 4 gros par 7, on a  $4 \times 7 + 1 = 29$  gros, ou 3 onces 5 gros; on pose 5 gros et l'on retient 3 onces, etc.

Pour multiplier 14 s. par 483, il faut prendre les  $\frac{14}{20}$  ou les  $\frac{7}{10}$  de 483 livres, ou 338,1, ou enfin 338 liv. 2 s. Cet exemple prouve que, pour multiplier un nombre pair de sous,

il faut en prendre la moitié, faire le produit de cette moitié, en mettant au rang des sous le double des unités de ce produit. Pour 18 s.  $\times$  56, comme  $56 \times 9 = 504$ , on a 50 liv. 8 s.; 80 pièces de 12 s. font  $8 \times 6 = 48$  liv.

2<sup>e</sup> cas. Cherchons la valeur de 36 marcs 6 onces 4 gros d'argent à 51 liv. 15 s. 5 den. le marc. On répètera d'abord 51 liv. 15 s. 5 den. 36 fois; et ensuite autant de fois que 6 onces 4 gros sont contenus dans le marc: le multiplicateur est abstrait et cesse de représenter des marcs. Ainsi on ne multipliera d'abord 51 liv. 15 s. 5 den. que par 36, ainsi qu'on le voit ci-contre, d'après la règle exposée ci-dessus. Il reste ensuite à multiplier par la fraction 6 onces 4 gros; en prenant d'abord pour 4 onces la moitié du multiplicande total 51 liv. 15 s. 5 den., parce que 4 onces équivalent à  $\frac{1}{2}$ , ou la moitié d'un marc; pour 2 onces, on prend ensuite la moitié de ce produit, etc.

Il arrive souvent que, pour faciliter les calculs, on fait un faux produit: par exemple, si l'on avait eu 14 s. au lieu de 15 s., il aurait fallu de même faire le produit de 1 s., qu'on aurait effacé après avoir trouvé le produit des 5 den.

Voici deux autres exemples:

	12 <sup>r</sup>	18 <sup>r</sup>	8 <sup>a</sup>
	42 <sup>s</sup>	5 <sup>v</sup>	4 <sup>po</sup>
	<hr/>		
	24 <sup>po</sup>		
	48		
F. pr. de	18 <sup>r</sup> ... 37	16 <sup>r</sup>	
p <sup>r</sup>	1 <sup>r</sup> ... 2	2	
p <sup>r</sup>	4 <sup>a</sup> ... 0	14	
	4 <sup>a</sup> ... 0	14	
	3 <sup>po</sup> ... 6	9	4 <sup>a</sup>
	2 <sup>po</sup> ... 4	6	2
	1 <sup>po</sup> ... 0	14	4
	<hr/>		
	554	13	11 $\frac{1}{2}$

	51 <sup>r</sup>	15 <sup>r</sup>	5 <sup>a</sup>
	36 <sup>m</sup>	6 <sup>o</sup>	4 <sup>po</sup>
	<hr/>		
	306 <sup>po</sup>		
	153		
Pour 14 <sup>r</sup> ...	25	4 <sup>r</sup>	
1 <sup>r</sup> ...	1	16	
4 <sup>a</sup> ...	0	12	
1 <sup>a</sup> ...	0	3	
4 <sup>o</sup> ...	25	17	8
2 <sup>o</sup> ...	12	10	10
4 <sup>po</sup> ...	3	4	8
	<hr/>		
	1905	16	3 $\frac{5}{12}$

	37 <sup>a</sup>	15 <sup>r</sup>	8 <sup>a</sup>
	9 <sup>t</sup>	3 <sup>po</sup>	11 <sup>po</sup>
	<hr/>		
	340 <sup>po</sup>	1 <sup>r</sup>	0 <sup>a</sup>
p <sup>r</sup> 3 <sup>po</sup>	18	17	10
F. pr. de 1 <sup>po</sup>	6	8	22
p <sup>r</sup> 4 <sup>po</sup>	2	1	11
4 <sup>po</sup>	2	1	11
3 <sup>po</sup>	1	11	5
	<hr/>		
	364	14	3 $\frac{1}{2}$

53. Puisque le quotient, multiplié par le diviseur, produit le dividende, la division doit offrir aussi deux cas, suivant que le quotient ou le diviseur représente le multiplicateur, et doit être considéré comme abstrait.

1<sup>er</sup> cas. Si le diviseur est le multiplicateur, le quotient est le multiplicande et doit être de la même espèce d'unités que le dividende, qui représente le produit.

Lorsque le diviseur n'est pas complexe, on opère tour à tour sur chaque espèce d'unités du dividende, en commençant par la plus grande. Ainsi, pour diviser 234 liv. 15 s. 7 den. par 4 s. on prendra le quart de 234 liv., qui est 58 liv., avec le reste 2 liv., qu'on réduira en sous pour les joindre aux 15 s. du dividende,  $40 + 15 = 55$ , dont le quart est 13 s. avec le reste 3 s. ou 36 den.,  $36 + 7 = 43$  den., dont le quart est 10  $\frac{3}{4}$  den. le quotient est donc 58 liv. 13 s.

10  $\frac{3}{4}$  den.

Un ouvrier a reçu 151 liv. 14 s. 6 den. pour 42 jours de travail; pour savoir ce qu'il gagnait chaque jour, on divisera 151 liv. 14 s. 6 den. par le nombre abstrait 42. On voit ci-contre le détail du calcul.

$$\begin{array}{r}
 151^{\text{liv}} \quad 14^{\text{s}} \quad 6^{\text{den}} \quad \left\{ \begin{array}{l} 42 \\ 3^{\text{v}} \quad 12^{\text{s}} \quad 3^{\text{den}} \end{array} \right. \\
 \underline{25^{\text{s}}} \\
 500^{\text{s}} \\
 \underline{14} \\
 514^{\text{s}} \\
 \underline{504} \\
 10 \\
 \underline{120^{\text{den}}} \\
 6 \\
 \underline{126} \\
 0
 \end{array}$$

Quand le diviseur n'a qu'un seul chiffre, comme dans le premier exemple, au lieu de suivre tous les détails de ce type de calcul, il n'est besoin d'écrire que le quotient, attendu que la mémoire suffit pour retracer les restes successifs. C'est ainsi qu'on en a usé (p. 73), et même dans les exemples de multiplications complexes, lorsqu'il a fallu prendre la moitié, le tiers, le quart.

Si le diviseur est complexe, mais qu'on doive encore le regarder comme abstrait, il faut d'abord faire disparaître les fractions qui l'affectent : pour cela, on multipliera le dividende et le diviseur par le nombre qui exprime combien la plus petite espèce d'unités de celui-ci est contenue dans la plus grande. Cette opération n'altérera pas le quotient (n<sup>o</sup> 15. 1<sup>re</sup>) ; et comme



chaque espèce d'unités du diviseur produira des unités entières, il sera rendu entier. Ainsi, 42 toises 5 pieds 4 pouces ont coûté 554 liv. 13 s. 11 den. ; on demande le prix de la toise ? Il faut diviser ce dernier nombre par le premier, considéré comme nombre abstrait. Comme 4 pouces, ou  $\frac{1}{3}$  de pied, est contenu 18 fois dans la toise, on doit multiplier les deux nombres proposés par 18. La question devient : 772 toises ont coûté 9984 liv. 10 s. 8 den. ; quel est le prix de la toise ? La division de 9984 liv. 10 s. 8 den. par le nombre abstrait 772 donne pour quotient 12 liv. 18 s. 8 den.

De même, pour diviser 806 liv. 0 s. 10 den. par  $17\frac{1}{2}$ , il faut multiplier par 3, et l'on a 2418 liv. 2 s. 6 den. à diviser par 53. Si le diviseur est  $3^m 7^o 4^p$ , on multipliera par 16, parce que 4 gros ou la moitié de l'once, est contenu 16 fois dans le marc.

2<sup>e</sup> CAS. Si le diviseur est le multiplicande, il doit être de la même espèce que le dividende ; le quotient est abstrait, et indique combien de fois l'un contient l'autre. On fera disparaître les fractions du dividende et du diviseur, ainsi qu'il vient d'être dit, puis on les regardera l'un et l'autre comme des nombres abstraits : en effet, 12 liv. contiennent 3 liv. autant de fois que 12 contient 3.

Par exemple, pour diviser 364 liv. 14 s. 3 den.  $\frac{7}{12}$  par 37 liv. 15 s. 8 den., on multipliera ces deux nombres par  $20 \times 12 \times 18$  ou 4320, parce que le dix-huitième de denier est contenu 4320 fois dans la livre. Il faudra donc diviser 1 575 565 par 163 224, ce qui donne  $9\frac{10645}{163224}$ . Pour faire la preuve par la multiplication, p. 77, il faut évaluer la fraction  $\frac{10645}{163224}$  en parties de la toise, comme on va le dire.

Combien de fois 143 liv. 17 s. 6 den. contient-il 11 liv. ? Il faut multiplier par 40, et diviser entre eux les produits 5755 et 450 ; on trouve 13 fois et  $\frac{2}{13}$ .

59. Les fractions à deux termes, les décimales et les complexes sont les trois sortes de fractions en usage. Nous savons déjà convertir les deux premières l'une en l'autre (p. 63 et 68) ; voyons à les changer en la troisième, et réciproquement.

On réduit une fraction en nombre complexe, en divisant le



numérateur par le dénominateur. Ainsi, pour avoir les  $\frac{2}{7}$  de l. livre, on divisera 5 livres par 7, et l'on aura 14 sous 3 deniers  $\frac{2}{7}$ .

Reciproquement, pour convertir un nombre complexe en fractions à deux termes, il faut le réduire à sa plus petite espèce. Ainsi 14 s. 3 den.  $\frac{2}{7}$  vaut 171 den.  $\frac{2}{7}$ , ou  $\frac{1200}{7}$  de den. t. comme la liv. vaut 240 den., on divisera par 240, et l'on aura  $\frac{1200}{1680}$  ou  $\frac{5}{7}$  de liv.

Pour évaluer en sous et deniers la fraction 0,715 liv., il faut multiplier par 20, et l'on a 14,3 s.; de même multipliant 0,3 s. par 12, on a 3,6 den.; donc 0<sup>re</sup>,715 = 14<sup>s</sup> 3<sup>den</sup>,6.

On réduit une fraction complexe en décimales, en la convertissant d'abord en fraction à deux termes, puis celle-ci en décimales (n° 50).

### III. PUISSANCES ET RACINES.

#### *Formation des Puissances.*

60. En multipliant un nombre par lui-même, 1 2, 3, . . . fois successives, on en obtient les puissances 2, 3, 4, . . . comme on le voit dans le tableau ci-contre.

1 <sup>re</sup>	2 <sup>e</sup>	3 <sup>e</sup>	4 <sup>e</sup>	5 <sup>e</sup>	6 <sup>e</sup>	7 <sup>e</sup>	8 <sup>e</sup>	9 <sup>e</sup>
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

Le carré (n° 41, 5°) de  $\frac{2}{3}$  est  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ ; le cube est  $\frac{8}{27}$  . . .

Lorsqu'on veut former une puissance élevée, on peut éviter de passer successivement du carré au cube, du cube à la quatrième puissance, . . . . Soit demandé  $3^{11}$ ; comme il s'agit de rendre 3 onze fois facteur, je décompose 11 en  $3 + 4 + 4$ ; il vient  $3^{11} = 3^3 \times 3^4 \times 3^4$ . On voit donc qu'il faut décomposer la puissance proposée en d'autres dont elle soit la somme, et multiplier ces résultats entre eux; en sorte que, dans la multiplication, les exposans s'ajoutent. Ici,  $3^3 = 27$ ,  $3^4 = 81$ ; en multipliant, on a  $3^7 = 2187$ ; multipliant de nouveau par 81, on trouve  $3^{11} = 177\ 147$ .

Observez que  $3^3 \times 3^4$  n'est autre chose que le carré de  $3^4$ , ou  $81^2 = 6561$ ; ainsi, multipliant  $(3^4)^2$ , ou 6561 par  $3^3 = 27$ , on obtient de même  $3^{11}$ . La puissance 12 est  $3^3 \times 3^4 \times 3^4 =$  le cube de  $3^4$  ou  $(3^4)^3$ , on trouve  $3^{12} = 81^3 = 531\ 441$ ; divisant par 3, il vient  $3^{11} = 177\ 147$ . En général, décomposez la puissance proposée en deux facteurs, formez la puissance indiquée par l'un, et élevez le résultat à la puissance marquée par l'autre; ou autrement, pour élever à une puissance, multipliez l'exposant par le degré de la puissance. (Voy. n° 124). Par exemple, pour  $5^{18}$ , faisons  $5^6 \times 5^{12}$ . Or  $18 = 2 \times 3 \times 3$ ;  $5^6 = 5^{2 \times 3}$ ; on fera donc le carré de 5, on l'élèvera au cube, puis le résultat encore au cube, et l'on aura la dix-huitième puissance; après quoi on divisera par 5 pour avoir la dix-septième. Voici le calcul:  $5^2 = 25$ ,  $25^3 = 5^6 = 15\ 625$ , dont le cube est  $5^{12} = 3\ 814\ 697\ 265\ 625$ ; enfin  $5^{18} = 762\ 939\ 453\ 125$ . On remarquera avec quelle rapidité les puissances croissent. La soixante-quatrième de 2 est 18 446 744 073 709 551 616.

### Extraction des Racines carrées.

61. Le carré d'un nombre de 2 chiffres, tel que 35, se forme par la multiplication de 35 par 35, opération qui exige quatre produits partiels; 1°.  $5 \times 5$ , ou le carré des unités; 2°.  $30 \times 5$ , ou le produit des dizaines par les unités; 3°. une seconde fois  $30 \times 5$ , 4°.  $30 \times 30$ , ou le carré des dizaines. Donc le carré

d'un nombre de 2 chiffres est formé du carré des dizaines, deux fois le produit des dizaines par les unités, plus enfin le carré des unités. Ainsi  $35^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$ .

Pour multiplier  $7 + 5$  par  $7 + 5$ , on multiplie 7 et 5 d'abord par 7, puis par 5, et l'on ajoute; ce qui donne  $7^2 + 7 \times 5$  d'une part, et  $7 \times 5 + 5^2$  de l'autre. Donc  $12^2$  est  $= 49 + 25 + 2 \times 35 = 144$ . Donc, pour faire le carré de  $7 + 5$ , il ne suffit pas de carrer 7 et 5, il faut encore ajouter le double du produit de 7 par 5. Le carré d'un nombre composé de deux parties se forme des carrés de chacune, augmentés du double de leur produit. (Voy. n° 97, 1°.)

62. Les carrés de 10, 100, 1000... sont 100, 10000, 1 000 000 ou 1 suivi de deux fois autant de zéros qu'il y en a à la racine; ainsi tout nombre d'un seul chiffre, ou compris entre 1 et 10, a son carré entre 1 et 100, c'est-à-dire composé de 1 ou 2 chiffres: de même tout nombre de 2 chiffres en a 3 ou 4 à son carré, etc. En général, le carré a le double, ou le double moins 1, des chiffres de la racine (p. 19).

Procédons au calcul de l'extraction des racines carrées. Celles des nombres de 1 ou 2 chiffres sont comprises dans les tables n° 14 et 60: quant aux autres, il faut distinguer deux cas.

1<sup>er</sup> cas. Si le nombre proposé, tel que 784, a 3 ou 4 chiffres, sa racine en a deux; et 784 est composé du carré des dizaines de la racine, de celui des unités, et du double du produit des dizaines par les unités. Or, la première de ces parties se forme en ajoutant deux zéros au carré du chiffre des dizaines (n° 3, 3°). D'où il suit que ce carré n'entre dans l'addition de ces trois parties qu'au rang des centaines. En séparant les deux chiffres 84, on voit que 7 contient le carré du chiffre des dizaines, considérées comme des unités simples, et en outre les centaines produites par les autres parties du carré.

On prendra la racine du plus grand carré 4 contenu dans 7, elle sera le chiffre des dizaines cherché: car 7 étant compris entre les carrés de 2 et de 3, le nombre proposé 784 l'est entre  $20^2$  et  $30^2$ ; ainsi la racine est entre 20 et 30, et l'on a 2 pour le chiffre des dizaines.

En retranchant 4 de 7, le reste 3 est la retenue; ainsi 384 est composé du carré des unités, plus du double des dizaines multiplié par les unités.

On forme le produit du double des dizaines par les unités, en multipliant le double du chiffre des dizaines par les unités, et mettant un zéro à droite. Ainsi, dans l'addition, ce produit est compris au rang des dizaines, et contenu par conséquent dans 38, en séparant de 384 le chiffre 4 des unités : 38 contient en outre les dizaines produites par le carré des unités, et celles qui proviennent de ce que 784 peut n'être pas un carré exact. Si ces dizaines étaient connues, en les ôtant de 38, le reste serait le double produit dont il est ici question; donc, en le divisant par 4, double du chiffre des dizaines, le quotient serait les unités. Divisons donc 30 par 4, le dividende sera plus grand que celui qu'on doit employer, et le quotient pourra être trop grand; mais il sera facile de le rectifier.

Car si le quotient  $\frac{38}{4}$ , ou 9 en nombre entier, représente en effet les unités, en plaçant 9 à côté du double 4 du chiffre des dizaines, 49 sera le double des dizaines ajouté aux unités, et  $49 \times 9$  sera le double du produit des dizaines par les unités, plus le carré des unités. Or,  $49 \times 9 = 441 > 384$ , donc 9 est trop grand. On éprouvera le chiffre 8 de la même manière; et, comme  $48 \times 8 = 384$ ; qui, retranché du reste, donne 0, on voit que 784 est le carré exact de 28. On a mis ici le type du calcul, ainsi que

$$\begin{array}{r|l} 784 & 28 \\ 384 & 40 \quad 48 \\ 384 & 9 \quad 8 \\ \hline 0 & 441 \quad 384 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2735 & 52 \\ 235 & 102 \\ 204 & 2 \\ \hline 31 & 204 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 121 & 11 \\ 21 & 21 \\ 21 & 1 \\ \hline 0 & 21 \end{array}$$

celui de  $\sqrt{2735}$ , qui est 52, avec le reste 31; de sorte que 52 est la racine du plus grand carré contenu dans 2735, c'est-à-dire celle de  $2735 - 31$ , ou 2704. On trouve ainsi  $\sqrt{121} = 11$ .

2<sup>e</sup> CAS. On raisonnera de même si le carré a plus de quatre chiffres; car alors, bien que la racine en ait plus de deux, on peut encore la regarder comme composée de dizaines et d'unités, par exemple, 523 a 52 dizaines et 3 unités.



Ainsi, pour 273 529, on verra, par la même raison, que le carré des dizaines, considérées comme simples unités, est contenu dans 2735 (en séparant les deux chiffres à droite, 29), et que la racine du plus grand carré contenu dans 2735 donne les dizaines. On a trouvé ci-dessus 52 pour cette racine, et 31 pour reste; de sorte que descendant 29 à côté de 31, 3129 est le double produit des dizaines 52 par les unités inconnues, plus le carré de ces unités; supprimant le chiffre 9, on divisera 312 par 104, double des dizaines 52, on aura le quotient 3, qui est les unités de la racine, ou un nombre plus grand.

27.3 5 2 9	523
2 3.5	102 1043
2 0 4	3 3
3 1 2.9	204 3129
3 1 2 9	
0	

Enfin, plaçant ce quotient à droite de 104, et multipliant 1043 par 3, on retranchera le produit 3129 du reste 3129; ainsi 523 est exactement la racine cherchée.

Ce raisonnement s'applique à tout nombre; on voit qu'il faut le partager en tranches de deux chiffres, en commençant par la droite, ce qui ne laissera qu'un seul chiffre dans la dernière tranche, lorsque le nombre des chiffres sera impair. Chaque tranche donne un chiffre à la racine, en opérant sur chacune comme il vient d'être dit. Il est donc bien facile de juger *à priori* du nombre de chiffres de la racine d'un nombre donné. Quand cette racine n'est pas exacte, le calcul conduit à un reste; nous allons montrer l'usage de ce reste pour approcher de la racine.

Observez aussi qu'il est inutile d'écrire les divers produits à soustraire, et qu'on peut, comme pour la division (p. 27), faire à la fois chaque multiplication et la soustraction.

$  \begin{array}{r}  11.1 \ 1.0 \ 8.8 \ 8 \ 8 \ 9 \\  2 \ 1.1 \\  \hline  1 \ 8 \ 9 \\  2 \ 2 \ 0 \ 8 \\  \hline  1 \ 9 \ 8 \ 9 \\  2 \ 1 \ 9 \ 8 \ 8 \\  \hline  1 \ 9 \ 9 \ 8 \ 9 \\  1 \ 9 \ 9 \ 8 \ 8 \ 9 \\  \hline  \text{Reste } 0  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  33 \ 333 \\  \hline  63 \ 663 \\  3 \ 3 \\  \hline  189 \ 1989 \\  \hline  6 \ 663 \ 66 \ 663 \\  3 \ 3 \\  \hline  19 \ 989 \ 199 \ 989  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  54.0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\  5 \ 0.0 \\  \hline  7 \ 1 \ 0.0 \\  1 \ 2 \ 4 \ 4 \ 0 \ 0 \\  \hline  \text{Reste } 6 \ 8 \ 9 \ 6  \end{array}  $
---	---	---



On peut aussi s'exercer sur les exemples suivans :  $\sqrt{7\ 283\ 291} = 1698$ , reste 4087, et  $\sqrt{3\ 179\ 089} = 1783$ .

63. On appelle *Commensurables* ou *Rationnels* les nombres qui ont une commune mesure avec l'unité : tel est  $\frac{2}{5}$ , parce que le  $\frac{1}{5}$  de l'unité est contenu cinq fois dans 1, et deux fois dans  $\frac{2}{5}$ . Mais tout nombre entier, qui n'est pas le carré exact d'un entier, ne saurait l'être non plus d'un nombre fractionnaire, et par conséquent sa racine est incommensurable avec l'unité. Car s'il y avait une commune mesure, contenue, par exemple, cinq fois dans l'unité et treize fois dans  $\sqrt{7}$ , en sorte que (36) la racine de 7 fût représentée exactement par  $\frac{13}{5} = \sqrt{7}$ , en élevant au carré on aurait  $\frac{169}{25} = 7$ ; ce qui est absurde, ces deux fractions étant irréductibles (n° 41, 5°.).

Puisqu'en divisant l'unité en parties égales, on ne peut jamais prendre celles-ci assez petites pour que l'une d'elles soit contenue exactement dans  $\sqrt{7}$ , et qu'aucune fraction ne peut être la valeur juste de  $\sqrt{7}$ , si l'on veut la mesure exacte, il faut prendre une autre unité (36); à moins qu'on ne se contente d'une approximation, en rendant les parties de l'unité assez petites pour que la différence entre  $\sqrt{7}$  et un certain nombre de ces parties, puisse être négligée comme de peu d'importance. Par exemple, si l'unité contient 100 parties, et qu'on trouve que 2 unités +  $\frac{64}{100}$  de ces parties sont  $< \sqrt{7}$ , tandis que 65 surpassent  $\sqrt{7}$ , c'est-à-dire que 7 soit entre les carrés de 2,64 et 2,65, on dit que  $\sqrt{7}$  est entre ces nombres, et qu'on a cette racine à moins de un centième. C'est ce qui explique ce paradoxe, qu'on peut approcher autant qu'on veut de  $\sqrt{7}$ , quoique  $\sqrt{7}$  n'existe pas numériquement.

Si l'on veut négliger les quantités moindres que le cinquième de l'unité, il faudra donc trouver combien  $\sqrt{7}$  contient de ces cinquièmes, c'est-à-dire chercher deux fractions, telles que  $\frac{13}{5}$  et  $\frac{14}{5}$  ayant 5 pour dénominateur, dont les numérateurs ne diffèrent que de 1, et qui comprennent  $\sqrt{7}$  entre elles, ou plutôt 7 entre leurs carrés. Pour obtenir ces numérateurs 13 et 14, concevons les carrés de nos fractions et celui de  $\sqrt{7}$  multipliés par 25;  $25 \times 7$  sera compris entre les carrés des numérateurs in-

connus, et par conséquent  $\sqrt{25 \times 7}$  ou  $\sqrt{175}$  sera compris entre ces numérateurs. Or,  $\sqrt{175}$  tombe entre 13 et 14; donc  $\frac{13}{5}$  et  $\frac{14}{5}$  sont les fractions cherchées, ou les valeurs approchées de  $\sqrt{7}$ , à moins de  $\frac{1}{5}$ , l'une par défaut, l'autre par excès (\*).

De même pour avoir  $\sqrt{3\frac{1}{2}}$  à moins de  $\frac{1}{11}$ , on multipliera  $3\frac{1}{2}$  par 11<sup>2</sup> ou 121; on aura  $449\frac{1}{2}$ , dont il faudra extraire la racine en nombre entier: elle est 21, en sorte que  $\sqrt{3\frac{1}{2}}$  est comprise entre  $\frac{21}{11}$ , et  $\frac{22}{11}$  ou 2. Observez qu'on supprime dans  $449\frac{1}{2}$  non-seulement la fraction  $\frac{1}{2}$ , mais même toute la partie de 449 qui excède le carré de 21. Pour extraire la racine d'un nombre avec une approximation déterminée, on le multiplie par le carré du dénominateur donné, et l'on extrait en nombre entier la racine du produit: elle est le numérateur cherché.

64. Si l'on veut approcher à l'aide des décimales, c'est-à-dire à moins de 0,1, 0,01..., il faut multiplier le nombre par le carré de 10, de 100..., ce qui revient à reculer la virgule vers la droite d'autant de fois deux rangs qu'on veut obtenir de décimales, en ajoutant un nombre convenable de zéros, si cela est nécessaire.  $\sqrt{0,3}$  à moins de 0,01 est  $\frac{1}{100} \sqrt{3000}$ , en reculant la virgule de quatre rangs, on  $\frac{1}{100} \times 54 = 0,54$ . De même  $\sqrt{5,7}$ , à moins de  $\frac{1}{100}$ , est  $\frac{1}{100} \sqrt{57000}$ , ou 2,38.

Au lieu de placer une longue suite de zéros après le nombre proposé, on peut se contenter d'adjoindre ces zéros par couple, après chaque reste. C'est ce qu'on observera dans les calculs ci-contre de  $\sqrt{321}$  et  $\sqrt{2}$ . On voit que pour avoir une décimale, on se contente de placer une tranche de deux zéros près du premier reste. Pour une deuxième décimale, on place

$$\begin{array}{r} 3.21 \\ 32.1 \\ 3 \ 20.0 \\ 5 \ 90.0 \\ 2 \ 31 \ 90 \ 0 \\ 16 \ 94 \ 4 \text{ etc.} \end{array} \left\{ \begin{array}{r} 17,916 \dots \\ 27 \\ 349 \\ 1181 \\ 35826 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 10.0 \\ 40.0 \\ 11 \ 90 \ 0 \\ 60 \ 40 \ 0 \\ 3 \ 83 \ 60 \ 0 \\ 1 \ 00 \ 75 \ 9 \text{ etc.} \end{array} \left\{ \begin{array}{r} 1,41421356 \\ 21 \\ 281 \\ 281 \\ 28182 \\ 28182 \\ 28182 \end{array} \right.$$

\*) L'unité étant divisée en 5 parties égales, pour connaître le plus grand

de même deux zéros après le second reste, etc. . . On marque de suite la place de la virgule dans la racine, et l'on pousse le calcul de l'approximation jusqu'au degré nécessaire, en mettant deux zéros après chaque reste successif.

*La racine d'un produit est le produit des racines des facteurs :* ainsi de  $144 = 9 \times 16$ , on tire  $\sqrt{144} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$ . Cette règle, qui est fondée sur ce qu'on a dit (n° 60), peut servir à simplifier les extractions des racines :

$$\sqrt{8} = \sqrt{(2 \times 4)} = 2\sqrt{2} = 2 \times 1,4142... = 2,82842712.$$

65. *La racine d'une fraction s'obtient en extrayant la racine de chacun de ses deux termes.* Ceci résulte de la manière dont on forme le carré (n° 41, 5°).  $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ ,  $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ .

La racine est irrationnelle, lorsque les deux termes ne sont pas des carrés exacts. Si, par exemple,  $\sqrt{\frac{2}{7}}$  pouvait être une autre fraction, telle que  $\frac{p}{q}$ ; il en résulterait  $\frac{2}{7} = \frac{p^2}{q^2}$ , ce qui est impossible (n° 38, 4°). On ne peut donc avoir la racine qu'en approchant à un degré donné par la nature de la question; on procède alors comme il a été dit (n° 63). Par exemple,  $\sqrt{\frac{2}{7}}$  à moins de  $\frac{1}{11}$ , se trouve en multipliant  $\frac{2}{7}$  par  $121 = 11^2$ , et l'on a  $\sqrt{\frac{262}{77}} = \sqrt{51 \frac{5}{77}}$ ; et ne prenant la racine de 51 qu'à moins d'une unité, on a  $\sqrt{\frac{2}{7}}$  comprise entre  $\frac{7}{11}$  et  $\frac{8}{11}$ .

Observez que  $\sqrt{\frac{3}{7}}$  peut bien être pris  $= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ , puisque, si l'on multiplie cette expression par elle-même, on trouve  $\frac{3}{7}$  pour produit. Mais outre que cette double extraction exigerait deux valeurs approchées, le degré d'approximation du résultat serait incertain. Il arrive souvent que ce degré n'est déterminé qu'à la fin du calcul; cette partie de l'opération doit donc être di-

nombre  $x$  de ces parties contenu dans  $\sqrt{N}$ , c'est-à-dire pour obtenir une fraction  $\frac{x}{q}$  approchée de  $\sqrt{N}$  à moins d'un  $q^2$  de l'unité, il faut déterminer  $x$ , de sorte qu'on ait  $\frac{x}{q} < \sqrt{N} < \frac{x+1}{q}$ , or,  $\sqrt{N} = \frac{q}{q} \sqrt{N} = \frac{\sqrt{Nq^2}}{q}$  donc...  $x < \sqrt{Nq^2} < x+1$ , c'est-à-dire que  $x$  est le plus grand entier contenu dans  $\sqrt{Nq^2}$ .

rigée de manière à permettre une approximation illimitée. Pour cela, on multiplie les deux termes de la fraction par son dénominateur, afin de rendre celui-ci un carré;  $\frac{1}{7}$  devient  $\frac{1}{49}$ , en multipliant haut et bas par 7, et  $\sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7} \sqrt{21}$ ; on poussera  $\sqrt{21}$  jusqu'au degré exigé. Par exemple, si  $\sqrt{21}$  est prise  $= 4,582$ , c'est-à-dire à moins de 0,001, le septième est...  $\sqrt{\frac{1}{7}} = 0,654$ , valeur qui ne diffère pas d'un sept-millième.

Si l'on eût demandé  $\sqrt{\frac{1}{7}}$  à moins de  $\frac{1}{7}$ , le calcul eût de même conduit à  $\frac{1}{7} \sqrt{21}$ , entre  $\frac{1}{7}$  et  $\frac{2}{7}$ .

Pour  $\sqrt{(3\frac{5}{7})}$ , on écrira  $\sqrt{\frac{26}{7}} = \frac{1}{7} \sqrt{26 \times 7}$ , or  $\sqrt{182} = 13,4907\dots$ , dont le septième est  $\sqrt{(3\frac{5}{7})} = 1,9272\dots$

66. Les équations suivantes se démontrent en élevant tout au carré :

$$4 \times \sqrt{7} = \sqrt{7} \times 4 = \sqrt{(16 \times 7)}; \quad \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{(5 \times 3)}}{\sqrt{(7 \times 3)}}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{1}{12}},$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} : \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{\frac{4}{1}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{2}$$

Ainsi on peut intervertir l'ordre des facteurs irrationnels, et multiplier par le même facteur les deux termes d'une fraction irrationnelle.

Nous terminerons par plusieurs remarques.

1°. On doit toujours préparer les nombres de manière à ne soumettre que des entiers au calcul de l'extraction.

2°. Le nombre des décimales d'un carré est toujours pair et double de celui de la racine : on doit ajouter des zéros ou supprimer des décimales, pour que cette condition soit remplie dans tous les cas.

3°. Chaque tranche ne devant donner qu'un seul chiffre, on ne peut mettre à la fois plus de 9 à la racine.

4°. Le carré d'un entier, tel que 18, étant donné, pour avoir celui du nombre suivant 19, comme  $19 = 18 + 1$ , le carré est  $18^2 + 2 \times 18 + 1$  (n° 61); on ajoutera donc 37 à 324, carré de 18, et l'on aura  $361 = 19^2$ . En général, quand on a le carré d'un entier, en ajoutant un, plus le double de ce nombre, on a le carré de l'entier suivant. Il suit de là que dans l'extraction



de racines carrées, chaque reste doit être moindre que le double de la racine qui s'y rapporte ; car si l'on trouvait un reste plus grand que ce double, il faudrait mettre une unité de plus à cette racine.

5°. La preuve de l'extraction se fait par l'élévation de la racine au carré, il faut qu'en multipliant la racine par elle-même, et y ajoutant le reste, on retrouve le nombre proposé, ce reste doit d'ailleurs être moindre que deux fois la racine. On peut aussi appliquer ici la preuve par 9, par 11, ... exposées n° 35, 5°.

### *Extraction des Racines cubiques.*

6°. Avant d'extraire la racine cubique, il convient d'analyser la loi suivant laquelle se forme le cube, qui est le produit d'un nombre par son carré. En imaginant ce nombre décomposé en deux parties, on a vu (n° 61) que le carré est composé du carré de la première, du carré de la seconde, et du double de leur produit : c'est le système de ces trois quantités qu'il faut multiplier par les deux parties du nombre donné. Or, en les multipliant d'abord par la première, on obtient

$$(7 + 5)^3 = 7^3 + 3 \times 7^2 \times 5 + 5^3$$

1°. Le cube de la 1<sup>re</sup> partie. ....  $7^3$

2°. 2 fois le carré de la 1<sup>re</sup>  $\times$  la 2<sup>e</sup> .....  $2 \times 7^2 \times 5$

3°. La 1<sup>re</sup>  $\times$  le carré de la 2<sup>e</sup>. .....  $7 \times 5^2$

De même en multipliant les trois parties du carré par la 2<sup>e</sup> du nombre donné, il vient

1°. Le carré de la 1<sup>re</sup>  $\times$  la 2<sup>e</sup>. ....  $7^2 \times 5$

2°. 2 fois le carré de la 2<sup>e</sup>  $\times$  la 1<sup>re</sup>. ....  $2 \times 7 \times 5^2$

3°. Enfin le cube de la 2<sup>e</sup> .....  $5^3$

en réunissant ces six résultats,  $7^3 + 3 \times 7^2 \times 5 + 3 \times 7 \times 5^2 + 5^3$  on voit que le cube de tout nombre

formé de deux parties, se compose de quatre parties, savoir :  
1°. le cube de la première ; 2°. trois fois le carré de la première multiplié par la seconde ; 3°. trois fois le carré de la seconde multiplié par la première ; 4°. le cube de la seconde.



Concluons de là que le cube de tout nombre composé de dizaines et d'unités est formé du cube des dizaines, trois fois le carré des dizaines multiplié par les unités, trois fois le carré des unités par les dizaines, enfin le cube des unités.

68. Le cube de 10, 100, 1000... est formé de l'unité suivie de trois fois autant de zéros ; ainsi un nombre de deux chiffres, c'est-à-dire entre 10 et 100, a son cube entre 1000 et 1000 000 ; il est donc composé de quatre, cinq ou six chiffres. En général le cube d'un nombre a le triple de chiffres de sa racine, ou le triple moins 1, ou moins 2.

Les racines des nombres  $< 1000$ , n'ayant qu'un chiffre, le tableau (p. 86) les a fait connaître. Nous partagerons l'extraction des autres nombres en deux cas.

1<sup>er</sup> cas. Si la racine n'a que deux chiffres, comme l'est celle de 21 952, je remarque que le cube des dizaines cherchées se forme en cubant le chiffre des dizaines, et plaçant trois zéros à droite (p. 16). Donc en séparant les trois chiffres 952 du nombre proposé, 21 contient le cube du chiffre des dizaines considérées comme des unités simples, et en outre les mille qui proviennent des autres parties. Le plus grand cube contenu dans 21 est 8, dont la racine est 2 ; c'est le chiffre des dizaines : car puisque 21 est compris entre les cubes de 2 et de 3, 21 952 l'est entre les cubes de 20 et de 30.

Otons 2<sup>3</sup> ou 8 de 21, il reste 13 952, qui représente les trois autres parties du cube : or le produit de trois fois le carré des dizaines par les unités se forme en multipliant par les unités le triple du carré de 2, c'est-à-dire 12, et plaçant en outre deux zéros à droite : ainsi séparant les deux chiffres 52, le nombre 139 contiendra douze fois les unités, et les centaines produites par les deux autres parties du cube. En divisant 139 par 12, le quotient sera donc les unités, ou un nombre plus grand ; et comme ce chiffre ne peut excéder 9, on prendra 9 pour le quotient de  $\frac{139}{12}$ .

Il s'agit de vérifier si 9 est plus grand que les unités. Pour cela, sous 1200, qui est le triple du carré des dizaines, plaçons le triple du produit des dizaines par 9, ou  $3 \cdot 20 \cdot 9 = 540$  ; puis

le carré de 9 ou 81, et multiplions la somme 1821 par 9. Si 9 est le chiffre des unités, le produit devra être égal au reste, puisqu'on forme ainsi les trois parties que ce reste contient. Ce produit excède 13952, d'où il suit que les unités sont  $< 9$ . On essaiera donc 8; et comme en faisant la même épreuve, on trouve précisément 13952, on reconnaît que 28 est la racine cubique exacte de 21952. Ce raisonnement est analogue à celui qu'on a fait pour la division et la racine carrée (n° 18, 62); on tirera facilement la règle qu'il faut suivre dans ces sortes de calculs.

$$\begin{array}{r} 21952 \\ \begin{array}{l} 8 \\ 13952 \\ 13952 \\ 0 \end{array} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 28 \text{ Racine.} \\ 12 \quad 12 \\ 54 \quad 48 \\ 81 \quad 64 \\ 1821 \quad 1744 \\ 9 \quad 8 \\ 16389 \quad 13952 \end{array} \right.$$

2° cas. Si la racine a plus de deux chiffres, comme pour le nombre 12 305 472 001, on raisonnera comme précédemment (n° 62, 2°). On verra qu'il faut, 1°. *couper le nombre en tranches de trois chiffres, à partir de la droite.*

2°. *Extraire la racine cubique de la dernière tranche 12, qui est 2, c'est le chiffre des mille de la racine: retranchant de 12 le cube 8 des mille, il reste 4.*

3°. *Descendre à côté de ce reste 4 la tranche suivante 305, dont on séparera deux chiffres 05; et diviser 13 par 12, triple du carré du chiffre obtenu. Le quotient 3 doit être éprouvé comme on vient de le dire. On reconnaît qu'il y a 3 centaines; le reste est 138.*

4°. *Descendre près de ce reste la tranche 472, dont on séparera de même 72, et diviser 1384 par 1587, triple du carré de 23; on posera à la racine le quotient zéro.*

5°. *Descendre près du reste la tranche 001, et diviser 1384720 par 158700.*

Et ainsi de suite. Voici le type du calcul.

$$\begin{array}{r} 12.305.472.001 \\ \begin{array}{l} 305 \\ 162 \\ 138472001 \\ 127402112 \\ \hline \text{Reste.} \quad 11063889 \end{array} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2308 \text{ Racine.} \\ 12 \quad 158700 \\ 18 \quad 5520 \\ 9 \quad 64 \\ 1389 \quad 15925264 \\ 3 \quad 8 \\ 1161 \quad 127402112 \end{array} \right.$$

69. On démontrera comme au n° 63, que, 1°. lorsqu'un nombre entier, tel que 3, n'a point de racine cubique entière, il n'en a pas non plus de fractionnaire; mais on peut approcher indéfiniment de cette racine. Pour obtenir  $\sqrt[3]{3}$  à moins de  $\frac{1}{4}$ , on multipliera 3 par le cube de 4, et l'on aura  $3 \times 64$ , ou 192, dont la racine cubique est 5 en nombre entier : donc  $\frac{5}{4}$  est le nombre demandé, et  $\sqrt[3]{3}$  tombe entre  $\frac{5}{4}$  et  $\frac{6}{4}$ . De même pour  $\sqrt[3]{(3\frac{5}{4})}$  à moins de  $\frac{1}{11}$ , on a  $3\frac{5}{4} \times 11^3 = 4943\frac{5}{4}$ , la racine cubique est 17; donc  $\frac{17}{11}$  est approché de  $\sqrt[3]{(3\frac{5}{4})}$  à moins de  $\frac{1}{11}$ .

2°. Pour approcher à l'aide des décimales, on reculera la virgule d'autant de fois trois rangs à droite qu'on veut de chiffres décimaux : on ajoutera pour cela un nombre convenable de zéros, si cela est nécessaire. Ainsi, pour avoir  $\sqrt[3]{0,3}$  à moins de  $\frac{1}{100}$ , on prendra  $\sqrt[3]{300\ 000}$  qui est 67, d'où  $\sqrt[3]{0,3} = 0,67$ .

De même  $\sqrt[3]{5,7}$  à moins de  $\frac{1}{10}$  se trouve en prenant  $\sqrt[3]{5700}$  qui est 18, et l'on a 1,8.

Enfin,  $\sqrt[3]{3,2178}$  à moins de  $\frac{1}{10}$  est  $= \frac{1}{10} \sqrt[3]{3217} = 1,5$ .

3°. Si le nombre proposé est entier, on se contentera de placer, près de chaque reste, une tranche de trois zéros, jusqu'à ce qu'on ait obtenu le nombre de chiffres décimaux qu'on désire (\*).

Voici le calcul pour  $\sqrt[3]{477}$ .

\* Le calcul devient très long lorsque la racine est un grand nombre : mais on peut en abrégier la partie la plus pénible, qui est la recherche des diviseurs destinés à donner pour quotiens les chiffres consécutifs de cette racine. appliquons le procédé à la racine de 477. Supposons qu'on ait déjà trouvé la partie 7,8 de cette racine, et qu'on veuille pousser l'approximation plus loin : il faudra faire  $3 \times 78^2$ ; mais on a déjà formé la quantité  $(3a^2 + 3ab + b^2)b$ , en faisant  $a = 7$  dizaines,  $b = 8$  unités, et l'on veut trouver  $3a'^2 = 3(a + b)^2 = 3(a^2 + 2ab + b^2)$ , quantité qui surpasse  $3a^2 + 3ab + b^2$  de  $3ab + 2b^2$ . Ainsi, à  $164\frac{1}{4}$  qui représente le 1<sup>er</sup> trinôme, il faut ajouter  $3ab$ , ou  $168$  dizaines, et  $2b^2$  ou deux fois 64. Ce calcul est indiqué ci-après. Une fois le diviseur trouvé, on obtient aussitôt le chiffre des centièmes et le reste, puis le diviseur

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{13} \\ 1340.00 \\ 1315.52 \\ \hline 24.480.00 \\ 18.275.41 \\ \hline 6.204.590.00 \\ \text{etc} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} 7.81339 \\ 147 \quad 18252 \\ 168 \quad 234 \\ 64 \quad 1 \\ \hline 16444 \quad 1827541 \\ 8 \quad 7 \end{array} \right.$$

On trouve  $\sqrt[3]{2} = 1,259921$ ,  $\sqrt[3]{3} = 1,442249$ .

4°. La racine cubique d'une fraction se trouve en prenant celle de chacun de ses deux termes :  $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$ . Mais si ces termes ne sont pas l'un et l'autre des cubes exacts, on prouve, comme n° 65, que la racine est incommensurable, et qu'on n'en peut avoir qu'une valeur approchée. Si le degré d'approximation est donné d'avance, on opérera comme il vient d'être dit 1°.

$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$  à moins de  $\frac{1}{5}$  est  $= \frac{1}{5} \sqrt[3]{(5 \times 27)} = \frac{1}{5} \sqrt[3]{10^3}$ , valeur comprise entre  $\frac{1}{5}$  et 1, qui sont les résultats demandés.

Mais si l'approximation doit demeurer arbitraire, on rendra le dénominateur un cube exact, et l'on approchera de la racine du numérateur. Pour  $\sqrt[3]{\frac{5}{27}}$ , on prendra  $\frac{1}{3} \sqrt[3]{(5 \times 49)} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{245} = \frac{1}{3} \times 6,2573 = 0,8939$ . De même  $\sqrt[3]{(17 \frac{1}{3})}$  ou  $\sqrt[3]{\frac{52}{3}}$  est  $\frac{1}{3} \sqrt[3]{477} = \frac{1}{3} \times 7,81339 = 2,604463 \dots$

Nous ne dirons rien ici sur l'extraction des racines quatrièmes, cinquièmes, ..., pour lesquelles on trouverait des méthodes analogues aux précédentes; mais nous ferons observer que, d'après ce qu'on a dit, n° 60, lorsque le degré de la racine est le produit de plusieurs facteurs, elle peut se décomposer en racines successives de degrés moindres. Ainsi de  $12 = 2 \times 2 \times 3$ , on conclut que la racine douzième revient à deux racines carrées

subséquent par le même procédé, etc.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{13} \\ 1340.00 \\ 1315.52 \\ \hline 24.480.00 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{r} 7.8 \\ 147 \quad 16444 \\ 168 \quad 1680 \\ 64 \quad 128 \\ \hline 16444 \times 8 \quad 18252 = 3,78 \end{array} \right.$$

et une racine cubique. Pour  $\sqrt[3]{244140625}$ , on prendra d'abord la racine cubique qui est 625, puis  $\sqrt{625}$  qui est 25, enfin  $\sqrt{25} = 5$ , qui est la racine douzième cherchée. L'extraction des racines est une opération très pénible, mais qui sera bientôt rendue facile, par les belles propriétés des logarithmes (n° 87).

#### IV. DES RAPPORTS.

##### *Des Équidifférences et Proportions.*

70. On compare les grandeurs sous deux points de vue, en cherchant, ou l'excès de l'une sur l'autre, ou le nombre de fois qu'elles se contiennent mutuellement. Le résultat de cette comparaison s'obtient par une soustraction dans le premier cas, et par une division dans le second. On nomme *Raison* ou *Rapport* de deux nombres le quotient qu'on trouve en divisant l'un par l'autre. C'est ainsi que 3 est le rapport de 12 à 4, puisque 3 est le quotient de 12 : 4. On pourrait également dire que le rapport de 12 à 4 est  $\frac{4}{3}$  ou  $\frac{1}{3}$ , puisqu'il est indifférent de dire que le premier des nombres est triple du second, ou que celui-ci est le tiers de l'autre. Nous conviendrons à l'avenir de diviser le premier nombre énoncé par le second.

Le premier terme d'un rapport est l'*Antécédent*, le second est le *Conséquent*.

On sait (n° 4) que la différence de deux nombres demeure la même lorsqu'on les augmente ou diminue de la même quantité, et qu'on ne change pas un rapport (n° 15) en multipliant ou divisant ses deux termes par un même nombre

$$12 - 5 = 13 - 6 = 11 - 4; \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

Il est aisé d'attacher un sens net au rapport des quantités irrationnelles, puisqu'elles n'entrent dans le calcul que comme représentant leurs valeurs approchées (n° 63). Du reste, ce



rapport peut quelquefois être commensurable : ainsi ,

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{1} = \frac{2}{1}.$$

71. Lorsque la différence entre deux nombres, tels que 10 et 8, est la même qu'entre deux autres 7 et 5, ces quatre quantités forment une *Équidifférence* ;  $10 - 8 = 7 - 5$ . Quand le rapport de deux nombres est le même que celui de deux autres, ces quatre quantités forment une *Proportion* ; elle résulte de l'égalité de deux rapports : 20 et 10, aussi bien que 14 et 7, ont 2 pour rapport ; on a donc une proportion entre 20, 10, 14 et 7, qu'on écrit ainsi  $20 : 10 :: 14 : 7$ , et qu'on énonce 20 est à 10 comme 14 est à 7. On peut aussi l'indiquer ainsi  $\frac{20}{10} = \frac{14}{7}$ . Lorsque nous préférerons cette dernière notation, ce qui arrivera le plus souvent, nous lui conserverons l'énoncé reçu : 20 est à 10 comme 14 est à 7 ; et non pas 20 divisé par 10 égale 14 divisé par 7, quoique ces locutions soient équivalentes.

Les termes 20 et 7 sont les *Extrêmes*, 10 et 14 les *Moyens* de la proportion.

Lorsque les deux moyens sont égaux entre eux, on dit que la proportion est *Continue* : telle est la suivante  $16 : 24 :: 24 : 36$ , qu'on écrit ainsi  $\div 16 : 24 : 36$ . Le second terme se nomme *Moyen proportionnel*.

Il est visible que l'idée la plus générale qu'on puisse se faire de la mesure des grandeurs (n° 36), consiste à avoir leur rapport avec l'unité de leur espèce. Ainsi, lorsqu'on dit qu'une chose est  $= \frac{5}{7}$ , ou est cinq fois le septième de l'unité, cela revient à dire que le rapport de cette grandeur à l'unité est le même que celui de 5 à 7. De même (n° 63) on mesure l'incommensurable  $\sqrt{7}$ , en remplaçant son rapport avec l'unité par celui de deux nombres, tels que 13 et 5, qui donnent la proportion inexacte, mais approchée,  $\sqrt{7} : 1 :: 13 : 5$ .

72. Suivant que les restes de deux soustractions  $10 - 8$  et  $7 - 5$  sont égaux ou inégaux, ils le seront encore après leur avoir ajouté la somme  $8 + 5$  des quantités soustractives ; ce qui donne

10 + 5 et 7 + 8. Donc, lorsqu'on a l'équidifférence  $10 - 8 = 7 - 5$ ; la somme des extrêmes est égale à celle des moyens; et réciproquement si  $10 + 5 = 7 + 8$ , on a l'équidifférence  $10 - 8 = 7 - 5$ .

Il est donc bien aisé de trouver un terme d'une équidifférence connaissant les trois autres termes, car soit demande le quatrième terme  $x$ , les trois premiers étant 10, 8 et 7; puisque l'inconnue  $x$ , augmentée de 10, doit être  $= 8 + 7$ , il faut (n° 4) que  $x = 8 + 7 - 10 = 5$ ; on a donc l'équidifférence  $10 - 8 = 7 - 5$ .

Soient pareillement deux rapports  $\frac{6}{3}$  et  $\frac{14}{7}$ : pour juger s'ils sont égaux ou inégaux, il faut les multiplier par  $3 \times 7$  produit des dénominateurs, on a  $6 \times 7$  d'une part, et  $14 \times 3$  de l'autre. Donc, si l'on a quatre nombres en proportion  $6 : 3 :: 14 : 7$ , le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

Réciproquement, si l'on a quatre nombres 6, 3, 14 et 7, tels que les produits  $6 \times 7$  et  $3 \times 14$  se trouvent égaux, on en conclura l'égalité de leurs rapports, ou la proportion  $6 : 3 :: 14 : 7$ , ou  $= \frac{6}{3} = \frac{14}{7}$ : donc on peut toujours former une proportion avec les facteurs de deux produits égaux.

1°. Le produit des moyens devient un carré, s'ils sont égaux. Donc le moyen proportionnel entre deux nombres est la racine carrée de leur produit. Entre 3 et 12, le moyen proportionnel est  $\sqrt{3 \times 12} = 6$ , savoir  $3 : 6 : 12$ . Réciproquement si l'on a  $6^2 = 3 \times 12$ , on pourra former la proportion continue

$$3 : 6 : 12.$$

2°. Si une proportion renferme un terme inconnu, telle que  $6 : 3 :: 14 : x$ ; comme trois fois 14 doit être égal à six fois l'inconnue, elle est (n° 5) le quotient de  $3 \times 14$  divisé par 6, ou  $\frac{1}{6} = 7$ , donc  $6 : 3 :: 14 : 7$ . En général, l'un des extrêmes se trouve en divisant le produit des moyens par l'extrême connu. Si l'inconnue était un moyen, on diviserait le produit des extrêmes par le moyen connu.

3°. On peut, sans détruire une proportion, faire subir aux divers termes qui la composent tous les changemens qui con-

duisent encore à donner le produit des extrêmes égal à celui des moyens.

Ainsi pour  $6 : 3 :: 14 : 7$ , qui donne  $6 \times 7 = 3 \times 14$ , on peut

I. Déplacer les extrêmes entre eux, ou les moyens entre eux (ce qu'on désigne par *Alternando*); ainsi,

$$\begin{aligned} 6 : 14 &:: 3 : 7 \\ \text{ou } 7 : 3 &:: 14 : 6 \\ \text{ou } 7 : 14 &:: 3 : 6. \end{aligned}$$

II. Mettre les extrêmes à la place des moyens (ce qu'on nomme *Invertendo*).

$$3 : 6 :: 7 : 14.$$

III. Enfin, multiplier ou diviser les deux antécédens, ou les deux conséquens, par le même nombre (n° 70).

73. En appliquant le théorème du n° 38, 4°, à la proportion  $30 : 6 :: 15 : 3$ , ou  $\frac{30}{6} = \frac{15}{3}$ , on trouve

$$\frac{30 \pm 15}{6 \pm 3} = \frac{15}{3}, \text{ et } \frac{30 + 15}{6 + 3} = \frac{30 - 15}{6 - 3}.$$

Si l'on fait le produit des extrêmes et celui des moyens, les produits communs à l'un et à l'autre, peuvent être supprimés, et il reste les quantités  $30 \times 3$  et  $15 \times 6$ , égales d'après la proportion donnée.

Donc, 1°. la somme ou la différence des antécédens est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

2°. La somme des antécédens est à leur différence, comme la somme des conséquens est à leur différence.

3°. Soit une suite de rapports égaux  $\frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{30}{15}$ , on aura  $\frac{6 + 10 + 14 + 30}{3 + 5 + 7 + 15} = \frac{14}{7} = \frac{30}{15}$ ; donc, dans toute suite de rapports égaux, la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

4<sup>o</sup> Si l'on renverse la proportion donnée, on a  $30 : 15 :: 6 : 3$ , d'où  $\frac{30 \pm 6}{15 \pm 3} = \frac{6}{3}$  (*Componendo, Dividendo*).

74. On peut multiplier deux proportions terme à terme. En effet,  $30 : 15 :: 6 : 3$ , et  $2 : 3 :: 4 : 6$  donnent les fractions égales  $\frac{30}{15} = \frac{6}{3}$ , et  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ; on trouve; en les multipliant. . . . . ,  $30 \times 2 : 15 \times 3 :: 6 \times 4 : 3 \times 6$ .

Donc, on peut élever les termes d'une proportion au carré, au cube, et par conséquent on peut aussi en extraire la racine carrée, cubique. . . .

### Des Règles de Trois.

75. Lorsque les élémens d'un problème peuvent former une proportion dont l'inconnue est le dernier terme, un calcul simple (n<sup>o</sup> 72, 2<sup>o</sup>.) donne la valeur de ce terme : c'est ce qu'on nomme une *Règle de trois*. Ainsi 30 ouvriers ont fait 20 mètres d'ouvrage; combien 21 ouvriers en feraient-ils dans le même temps? Accordons, pour un moment, que les conditions de cette question soient exprimées par la proportion  $30 : 20 :: 21 : x$ , en désignant par  $x$  le nombre de mètres demandé; on en conclut

$$\text{que cette inconnue } x = \frac{20 \times 21}{30} = 14$$

Lorsqu'on veut résoudre, à l'aide d'une règle de trois, une question proposée, il est nécessaire de s'assurer si la solution peut dépendre des proportions; après quoi il ne reste d'autre difficulté qu'à placer les nombres contenus dans la question, aux rangs qui leur conviennent dans la proportion.

On reconnaît que la solution d'une question dépend des règles de trois, lorsque l'énoncé est formé de deux périodes : les deux termes de la première étant *Homogènes* respectivement à ceux de la seconde, c'est-à-dire, de même nature deux à deux; et que de plus ces deux termes peuvent être multipliés ou divisés par le même nombre sans altérer la solution.

Ainsi, dans notre problème, 30 ouvriers et 21 ouvriers sont homogènes, et l'on

30 ouv	20 mètr.
21	x

pourrait multiplier ces deux nombres par

4 ou par 3 . . . , sans y rien changer. Si l'on disait, par exemple, 60 ouvriers ont fait 20 mètres, combien 42 en feraient-ils? Cette question aurait visiblement la même solution que la première.

Au contraire, le temps qu'une pierre emploie à tomber n'étant pas double lorsque la hauteur est double; un tonneau n'employant pas à se vider un temps triple, lorsque sa capacité est triple, ces éléments ne peuvent faire partie d'une règle de trois.

76. Après avoir reconnu que la solution d'un problème peut être donnée par une proportion, il s'agit d'assigner à chaque terme le rang qu'il y doit occuper. Le quatrième et le troisième sont d'abord l'inconnue et son homogène, qui seul peut lui être comparé. Le second rapport étant ainsi une fois établi, il reste à former le premier, lequel est composé des deux autres nombres compris dans le problème, et homogènes entre eux. Or, la question fait connaître lequel doit être le plus grand des deux termes déjà posés, c'est-à-dire de l'inconnue et de son homogène; et, comme les antécédens doivent être ensemble plus grands l'un et l'autre, ou moindres que leurs conséquens, il est facile de décider lequel de ces deux termes homogènes qui restent à placer doit occuper le premier ou le second rang.

Ainsi, dans la question précédente, après avoir posé 20 mètres :  $x$  mètres, on voit que 21 ouvriers doivent faire moins d'ouvrage que 30, et que le conséquent  $x$  est  $< 20$ ; donc, des deux nombres 30 et 31 qui restent à placer, 30 est le premier, et l'on a  $30 : 21 :: 20 : x$ .

Les deux exemples suivans éclairciront ceci.

Un ouvrage a été fait en 5 jours par 57  
ouvriers; combien faudrait-il de jours à 19  
ouvriers pour faire le même ouvrage? Puis-  
qu'on pourrait prendre deux ou trois fois plus de jours et au-  
tant de fois moins d'ouvriers, la question dépend des propor-  
tions. On placera d'abord 5 jours :  $x$  jours, et comme il faut  
plus de jours à 19 ouvriers qu'à 57 pour accomplir la même  
tâche, le conséquent  $x$  est  $>$  que 5; 57 est donc le conséquent du

57	ouvr.	5 jours
19		$x$



premier rapport, et l'on a 19 ouv. : 57 ouv. :: 5 jours :  $x$  jours  
 $x = \frac{5.57}{19} = 15$  jours.

Il a fallu 6 mètres d'une étoffe large de  $\frac{3}{4}$  pour couvrir un meuble ; combien en faudra-t-il d'une étoffe large de  $\frac{2}{3}$  ? Quoiqu'ici les quatre termes soient des mètres, on reconnaît que les uns expriment des longueurs  $\frac{3}{4}$  6 mètr. et les autres des largeurs, et que 6 mètres et  $\frac{2}{3}$   $x$  l'inconnue sont les deux homogènes. Ainsi, la proportion est terminée par 6 mètres :  $x$  mètres Or, il faut moins de longueur à l'étoffe qui est la plus large ; comme  $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ , on a  $x > 6$  ; ainsi  $\frac{2}{3}$  est l'antécédent du premier rapport, et l'on trouve  $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} :: 6 : x$ , d'où  $x = 6 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = 6 \frac{3}{4}$ .

77. Quoiqu'il soit toujours facile de faire ce raisonnement, en l'évitant on donne plus de rapidité au calcul. On distingue deux sortes de rapports, le *Direct*, formé de nombres qui croissent ou décroissent ensemble : l'un décroît au contraire quand l'autre croît, dans le rapport *Inverse*. Les 30 ouvriers et 20 mètres de la première question sont en rapport direct, parce que *plus* il y a d'ouvriers, et *plus* ils font d'ouvrage. Dans la seconde, au contraire, 57 ouvriers et 5 jours sont en rapport inverse, parce que *plus* il y a d'ouvriers, et *moins* on doit les employer de jours pour faire un ouvrage.

Lorsque les termes d'une question sont en rapport direct, et que, dans l'énoncé, les termes homogènes se présentent dans le même ordre dans les deux périodes de la phrase, ces termes conservent leurs rangs dans la proportion. Ainsi 30 ouvriers ont fait 20 mètres d'ouvrage, combien 21 ouvriers en feraient-ils ? On pose 30 : 20 :: 21 :  $x$ . Si l'on eût énoncé ainsi la question ; 20 mètres ont été faits par 30 ouvriers, combien 21 ouvriers en feraient-ils ? les termes homogènes ne seraient plus dans l'ordre voulu, ils ne s'y présentent dans les mêmes rangs qu'ils doivent occuper dans la proportion, qu'autant qu'en posant la question, on donne le même ordre aux termes homogènes dans les deux périodes de l'énoncé.

Mais si le problème a ses rapports inverses, les termes doi-

vent procéder en sens opposés dans la proportion, de sorte que le dernier des nombres énoncés soit écrit le premier, l'avant-dernier le second, etc. . . . , l'inconnue étant toujours à la quatrième place (\*).

Un homme a fait une route en 8 jours, marchant 7 heures par jour; combien eût-il mis de temps s'il eût marché 10 heures par jour?

Heures	Jours
7	8
10	$x$

Règle inverse, parce qu'en marchant plus d'heures par jour, il faut moins de jours pour parcourir la même distance : ainsi  $10 : 7 :: 8 : x = 5 \frac{1}{2}$ .

Voici quelques exemples des règles de trois :

\* On peut éviter l'emploi des proportions, dans tous ces problèmes, en réduisant à l'unité l'un des deux termes de la première période de l'énoncé. c'est ce qu'on fait en multipliant les deux termes de cette période, quand ils sont en rapport inverse, et divisant l'un par l'autre quand ce rapport est direct. En voici des exemples.

1<sup>er</sup> cas. *Règles directes.* On divise l'un des termes de la première période par l'autre, et l'on remplace ce dernier par 1. Dans la première question, 30 ouvriers font 20 mètres, etc., comme *moins* on a d'ouvriers et *moins* ils font d'ouvrage, on posera : si un ouvrier fait  $\frac{20}{30}$  mètres, combien 21 ouvriers

en feront-ils ? Évidemment 21 fois davantage, ou  $x = \frac{20}{30} \times 21 = 14$

2<sup>e</sup> cas. *Règles directes.* On multiplie l'un par l'autre les deux termes de la première période, et l'on remplace par 1 celui des deux qu'on veut. Dans le 2<sup>e</sup> problème, 5 jours ont aussi à 57 ouvriers, etc., comme *moins* on emploie d'ouvriers et *plus* il faut de jours pour faire le travail, on peut prendre 57 fois plus de temps et un seul ouvrier, savoir : un seul homme a employé  $57 \times 5$  jours, combien 19 ouvriers mettraient-ils de temps ? 19 fois moins, ou  $x = \frac{57 \times 5}{19} = \frac{285}{19} = 15$  jours

Dans tous les cas, le terme qu'on doit réduire à l'unité dans la première période, est celui qui est homogène, ou de même espèce que le terme donné dans la deuxième période. On fera bien de beaucoup s'exercer à cette sorte de raisonnement : les questions énoncées dans le texte seront résolues par ce procédé. On en trouvera un grand nombre d'applications dans le *Recueil des problèmes* de M. Grénuillet, ainsi que de toutes les règles d'Arithmétique : cet estimable ouvrage est très utile pour former les jeunes gens au calcul numérique.

I. Si 17 marcs 3 onces 4 gros d'argent ont coûté 869 livres 15 sous 6 deniers, combien coûteraient 14 marcs 3 onces 2 gros ? Règle directe ; donc

Marc.	Livres.
17	869
14	x

$$17^m 3^o 4^g : 869 \text{ liv. } 15 \text{ s. } 6 \text{ den.} :: 14^m 3^o 2^g : x \text{ liv.}$$

On simplifie le calcul (n° 58, 2° et 70) en multipliant les deux antécédens par 16, et l'on a  $283^m : 869^l 15^s 6^d :: 230^m 5^o : x$ . On trouve  $x = 708^l 16^s 1^d \frac{169}{113}$ .

II. 6 escadrons ont consommé un magasin de fourrage en 54 jours ; en combien de jours 9 escadrons l'eussent-ils consommé ? Règle inverse, d'où  $9 : 54 :: 6 : x = 36$ .

Escadr.	Jours
6	54
9	x

III. Un vaisseau a encore pour 10 jours de vivres ; mais on veut tenir la mer encore 15 jours : à quoi doit être réduite chaque ration ?

Jours	Ration
10	1
15	x

On ne trouve pas ici quatre termes ; mais il est

évident que l'un est sous-entendu, et que le problème doit être conçu de cette manière. On donnerait la ration 1 à chaque homme, s'il fallait tenir la mer 10 jours, on doit la tenir 15 jours, que donnera-t-on ? Règle inverse : ainsi  $10 : 15 :: 1 : x = \frac{2}{3}$ .

IV. Une fontaine emplît un réservoir en 6 heures, une autre en 5 heures  $\frac{1}{2}$ , une troisième enfin en 4 heures  $\frac{2}{3}$  ; en combien de temps ces trois fontaines, coulant ensemble, empliront-elles le bassin ? Cherchons quelle portion la 1<sup>re</sup> fontaine emplît en 1<sup>h</sup>, en 6<sup>h</sup> un réservoir est rempli, quelle portion le sera en 1<sup>h</sup> ;  $6 : 1 :: 1 : x = \frac{1}{6}$ . De même pour les deux autres fontaines on a  $5\frac{1}{2} : 1 :: 1 : x = \frac{2}{11}$ ,  $4\frac{2}{3} : 1 :: 1 : x = \frac{3}{14}$ . Ces trois fontaines coulant ensemble, empliront, par heure, la fraction du bassin,  $\frac{1}{6} + \frac{2}{11} + \frac{3}{14}$ , ou  $\frac{7}{42} + \frac{12}{154} + \frac{9}{98} = \frac{4}{11}$ . Si les  $\frac{4}{11}$  d'un réservoir sont remplis en 1<sup>h</sup>, combien faudra-t-il d'heures pour emplir 1 ? La solution est  $1 : \frac{4}{11}$  ou  $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ . Il faudra 2 heures  $\frac{3}{4}$  pour que les trois fontaines emplissent le bassin. En général, on divisera l'unité par la somme des temps du réservoir qu'emplît chaque fontaine en 1<sup>h</sup>.

78. *Règles de trois composées.* On ramène souvent aux proportions des questions qui renferment plus de trois termes donnés. Il faut alors qu'elles soient formées de deux périodes qui contiennent des nombres homogènes, deux à deux, et *variables proportionnellement*. En voici un exemple.

Si 20 hommes ont fait 160 mètres d'ouvrage en 15 jours, combien 30 hommes en feraient-ils en 12 jours?

Hommes	Mètres	Jours
20	160	15
30	$x$	12

Il se présentera deux cas, suivant que les termes qui ne répondent pas à l'inconnue sont en rapport direct ou inverse. Ici, 20 hommes et 15 jours sont en rapport inverse; car *plus* on emploie d'ouvriers, et *moins* il est nécessaire de les occuper de temps pour accomplir une même tâche: en sorte qu'on peut doubler, tripler... l'un des nombres, pourvu qu'on divise l'autre par 2, 3..., et la question reste la même. Multiplions 20 hommes par 15, et divisons 15 jours par 15; il viendra 300 hommes et 1 jour: de même multiplions 30 hommes par 12, et nous aurons

360 hommes et 1 jour. La question devient donc, si 300 hommes ont fait 160 mètres en un jour, combien

Hommes	Mètres	Jours
300	160	1
360	$x$	1

360 hommes en feront-ils en un jour? *Le temps étant le même de part et d'autre*, il est inutile d'y avoir égard, et (\*) on a la règle directe  $300 : 160 :: 360 : x = 192$  mètres.

Lorsque le rapport est direct, on procède différemment. Par exemple, si 20 hommes ont fait 160 mètres en 15 jours, combien faudra-t-il de jours à 30 hommes pour faire 192 mètres?

Hommes.	Mètres	Jours
20	160	15
30	192	$x$

Plus il y a d'hommes, et plus ils font de mètres; 20 hommes

(\*) C'est même à la réduction de ces deux nombres à l'égalité que l'on doit tendre. On aurait pu se contenter de multiplier 20 et diviser 15 par 5, ou de même, multiplier 30 et diviser 12 par 4; ce qui aurait réduit les jours au même nombre 3 dans les deux cas.

et 160 mètres sont en rapport direct. Ainsi, après avoir multiplié l'une de ces quantités par 2, 3..., il faudra aussi multiplier l'autre par le même nombre. Prenons 192 pour facteur de 20 hommes et 160 mètres, puis 160 pour facteur de 30 hommes et 192 mètres, il est clair que le nombre des mètres (\*) sera, dans les deux cas,  $192 \times 160$ . On a donc cette question : si  $20 \times 192$  hommes ont fait un ouvrage en 15 jours, combien de jours seraient  $30 \times 160$  hommes à faire ce même ouvrage ? Cette règle est inverse et l'on a

$$30 \times 160 : 15 :: 20 \times 192 : x = \frac{20 \cdot 192 \cdot 15}{30 \cdot 160},$$

ou 
$$x = \frac{2 \cdot 192 \cdot 5}{1 \cdot 160} = \frac{192}{16} = 12.$$

On raisonnera de même dans tout autre cas : le 2<sup>e</sup> de ces problèmes peut servir de preuve à l'exactitude du 1<sup>er</sup> calcul ; et, en général, en renversant le problème, on fera la preuve de l'opération. Voici encore un exemple assez compliqué

Si 40 ouvriers ont fait 300 mètres en 8 jours, en travaillant 7 heures par jour, combien 51

ouvriers seraient-ils de jours à faire 459 mètres en travaillant 6 heures par jour ?

On verra d'abord que les ouvriers et les heures sont en rapport inverse ; on mettra donc  $40 \times 7$  heures d'une part, et  $51 \times 6$  heures de l'autre, durant une heure, ce qui donnera lieu à la question indiquée ci-contre, et qu'il est inutile d'énoncer.

Hommes.	Mètres.	Jours.
40	300	8
51	459	x

Les heures et les mètres sont en rapport direct ; on fera donc 459 multiplicateur des termes de la première période, et

---

(\*) On aurait rempli le même but avec un facteur plus simple que 192, voyez ce qu'on a dit pour la réduction au même dénominateur (p. 49), nous avons pris ici 192, pour mieux faire concevoir la conséquence qui suit.



300 celui de la seconde ; ce qui réduira le nombre des mètres à être le même de part et d'autre. On aura une règle de trois inverse, qu'on posera ainsi

Hommes.	Jours.
$40 \times 7 \times 459$	8
$51 \times 6 \times 300$	$x$

$$51 \times 6 \times 300 : 8 :: 40 \times 7 \times 459 : x = \frac{40 \cdot 7 \cdot 459 \cdot 8}{51 \cdot 6 \cdot 300}.$$

On peut même, avant d'effectuer le calcul, supprimer le facteur 3, dans 300 et 6, puis 9 dans 459; d'où

$$x = \frac{40 \times 7 \times 51 \times 8}{51 \times 2 \times 100} = \frac{4 \times 7 \times 4}{10} = 11,2.$$

On peut encore éviter ces divers raisonnemens ; car, en les reproduisant sur chaque terme, comparé à l'inconnue, on voit que, lorsque le rapport sera direct, le terme devra changer de place avec son homogène ; tandis que s'il forme un rapport inverse, on le laissera où il est. Enfin, on multipliera tous les nombres contenus dans chaque ligne, et l'on égalera les produits entre eux. Ainsi, dans la dernière question, les ouvriers et les jours sont en rapport inverse, ainsi que les heures et les jours ; mais les mètres et les jours forment un rapport direct : on changera de place seulement 300 et 459, on formera le produit des nombres contenus dans chaque ligne, et égalant il viendra  $40 \times 459 \times 8 \times 7 = 51 \times 300 \times 6 \times x$ , ce qui donne la même valeur que ci-devant : en effet, l'inconnue sera le quotient (n° 5) de  $40 \times 459 \times 8 \times 7$  divisé par  $51 \times 300 \times 6$

$$\frac{40 \times 459 \times 8 \times 7}{51 \times 300 \times 6 \times x}$$

Cette opération peut même s'appliquer aux règles de trois simples.

79. Règle de société. Trois associés ont mis dans le commerce, l'un 12000 fr., l'autre 8000 fr., le troisième 4000 fr. Ils ont gagné 5430 fr., on demande de partager ce gain à raison de leurs mises.

La somme totale 24000 fr. a rapporté 5430 fr. On fera donc ces trois proportions :

$$24000 : 5430 \text{ ou } 2400 : 543 :: 12000 : x = 2715^{\text{fr}}$$

$$2400 : 543 :: 8000 : x = 1810$$

$$2400 : 543 :: 4000 : x = 905$$

On voit que la totalité des mises est à celle des bénéfices, comme chaque mise particulière est au bénéfice qui lui est échu. La somme des bénéfices doit reproduire 5430.

Soit encore proposé le problème suivant :

Trois négocians ont mis dans le commerce, savoir, l'un 10 000 fr. pendant 7 mois, l'autre 8000 fr. pendant 5 mois, le troisième 4000 fr. pendant 20 mois; on demande quelle est la part de chacun dans le bénéfice de 1500 fr.

On remarquera que les mises et les temps sont en rapport inverse : en les multipliant respectivement, on retombe sur une règle de la première espèce. L'un des associés est supposé avoir mis 70 000 fr., le second 40 000 fr., le dernier 80 000; les temps sont égaux. On trouvera, par la règle précédente, 552 fr., 63 .. 315 fr., 79...631 fr., 58... pour les gains respectifs.

Si l'on cherche d'abord le bénéfice que rapporterait une mise de 100 fr., on pourra poser aussi, pour chacune, cette proportion : si 100 fr. rapportent un tel bénéfice, quel est celui qui est dû à une telle mise ? Le 1<sup>er</sup> terme, ou diviseur, est 100 dans cette règle de trois. Ainsi toutes ces proportions seront plus faciles à résoudre, ce qui sera surtout utile lorsqu'il y aura un grand nombre de sociétaires, puisqu'on est conduit à autant de règles de trois qu'il y a de parts à faire.

80 *Règle d'intérêt.* On a pour but de trouver la somme due pour de l'argent prêté, sous certaines conditions. Cet intérêt se stipule de deux manières : ou en indiquant celui que porte la somme de 100 fr., ce qu'on désigne par les mots *tant pour cent* (5 pour cent s'écrit ainsi : 5 p. °) ; ou en fixant la somme qui doit rapporter un franc d'intérêt ; le *Denier 14* signifie que 14 francs rapportent 1 franc.

La relation qui lie ces deux manières de stipuler l'intérêt se trouve par une proportion. Ainsi le denier 25 équivalant à 4 p., puisque, si l'on pose cette règle de trois, 25 fr. rapportent

1 fr., quel est l'intérêt de 100 fr. ? on trouve 4 fr. De même le denier 2 revient à 50 p. %, le denier 20 à 5 p. %.

Pour trouver l'intérêt de 54000 fr. à 5 p. % par an, on pose cette règle de trois : si 100 rapporte 5, combien rapporteront 54000 fr. ? Le 4<sup>e</sup> terme est  $540 \times 5 = 2700$  fr. ; l'intérêt est, à ce taux, le 20<sup>e</sup> du capital.

Souvent l'intérêt, au lieu d'être pris pour un an, l'est pour un nombre de jours. L'usage du commerce est de faire l'année de 360 jours, ce qui simplifie beaucoup le calcul : car pour trouver l'intérêt de 54000 fr., à 5 p. % par an, pendant 210 jours, on pose cette 2<sup>e</sup> proportion. si 360 jours donnent 2700 fr., combien 210 jours ? Le 4<sup>e</sup> terme est l'intérêt cherché. L'opération se réduit, comme on voit, à.....

$$x = 54000 \times \frac{5 \cdot 210}{36000} = 1575. (P. n^{\circ} 150.)$$

On tire de là cette règle : Pour trouver l'intérêt d'un capital, multipliez ce capital par le nombre de jours et par le PERCENTAGE, ou tant pour cent, et divisez par 36000.

On abrège ce calcul en observant qu'il revient à multiplier le capital par deux fractions, l'une qui est le nombre de jours divisé par 6000, et l'autre le 6<sup>e</sup> du pourcentage, ce qu'on fait aisément à l'aide des parties aliquotes de 6000 et de 6, comme n<sup>o</sup> 42. Ainsi on supposera d'abord que l'intérêt est à 6 p. %, ce qui réduit la 2<sup>e</sup> fraction à 1 : puis, prenant 30 jours pour la durée d'un mois, pour 2 mois ou 60 jours. il suffira de prendre le 100<sup>e</sup> du capital, en reculant la virgule de deux rangs à gauche : pour un mois, on ne prend que la moitié de ce résultat, pour 10 jours le tiers de celui-ci, etc.

Par exemple, quel est l'intérêt à 6 p. % de 5843<sup>1</sup>/<sub>2</sub>, 24 du 5 février au 9 septembre, retranchant 5 de 9 on a 4 jours ; en outre il y a 7 mois intermédiaires de 30 jours ; mais en ayant égard aux mois de 28 et de 31 jours, on reconnaît qu'il faut ajouter 2 jours, ce qui fait 7 mois et 6 jours, ou 210 jours.

Pour 6 mois ( 3 fois 58,43 ).	.....	175,29
Pour 1 mois ( moitié du 58,43 ).	.....	29,22
Pour 6 jours ( cinquième de 29,22 ).	.....	5,84
Intérêt à 6 p. %.	.....	210,35

# ARITHMÉTIQUE.

Si l'intérêt est à 4, p. 100 par an, il faut multiplier ce produit par le 6<sup>e</sup> de 4, = 2 + 2 + :

Pour $\frac{1}{3}$ (le tiers de 210,35, ... ..	70,12
Pour $\frac{1}{3}$ . . . . .	70,12
Pour $\frac{1}{3}$ (le quart de 70,12). . . . .	17,53
Intérêt à $\frac{1}{3}$ p. 100 . . . . .	157,77

On aurait encore pu remarquer que le 6<sup>e</sup> de 4 $\frac{1}{2}$  est  $\frac{9}{2}$  ou 4 $\frac{1}{2}$ , et prendre les  $\frac{1}{2}$  de 210,35.

81. *Règle d'escompte.* Lorsqu'une somme n'est due qu'à une époque encore éloignée, et qu'on en obtient sur-le-champ le paiement, on nomme *Escompte* l'intérêt qu'on doit payer pour cela. Si donc on a 10 000 fr. à recevoir dans 7 mois, en retenant l'intérêt de cette somme à  $\frac{1}{2}$  p. 100 par mois, on devra déduire 175 fr., et il restera 9825. Cette manière d'opérer s'appelle *prendre l'escompte en dehors*; elle est la plus usitée, quoiqu'on retienne l'intérêt de 10 000 fr., et qu'on ne paie en effet que 9825 fr.

Pour l'*escompte en dedans*, il ne faut retrancher que l'intérêt de la somme qu'on paie. Voici ce qu'on doit faire. Chaque mois, on devra retenir  $\frac{1}{2}$  fr. par 100 fr., donc après 7 mois 100 +  $\frac{7}{2}$  fr. seront réduits à 100 fr.; on posera donc cette proportion: Si 101  $\frac{7}{2}$  sont réduits à 100 fr., à combien 10 000 fr. seront-ils réduits. On trouve 9828 fr., 01. En effet, si l'on ajoute à cette somme son intérêt à  $\frac{1}{2}$  p. 100 par mois durant 7 mois, on retrouvera 10 000 fr.

82. La *Règle conjointe* tient lieu des règles de trois directes et sert principalement quand la solution d'une question dépend de plusieurs de ces règles liées de manière à donner un rapport composé.

16 pieds anglais valent 15 pieds français, combien 83 des premiers valent-ils des seconds? On a. . . . .

$$16 : 15 :: 83 : x = \frac{83 \times 15}{16} = 77,81 : \text{on peut aussi poser les}$$

deux équations

15 pieds français = 16 pieds anglais.

83 pieds anglais =  $x$  pieds français.

Multipliant la 1<sup>re</sup> par 83, et la 2<sup>e</sup> par 16, il vient

$$83 \times 15 \text{ pieds français} = 83 \times 16 \text{ pieds anglais.}$$

$$16 \times 83 \text{ pieds anglais} = 16 \times x \text{ pieds français.}$$

donc  $83 \times 15 = 16 \times x, x = \frac{83 \times 15}{16}.$

Le produit commun  $16 \times 83$  conduit ainsi à la même valeur que ci-dessus.

Prenons une question plus compliquée. Combien 27 pieds anglais valent-ils de mètres, sachant que 1,3 mètres valent 4 pieds français, dont 15 valent 16 pieds anglais. On pose

$$1,3 \text{ mètres} = 4 \text{ pieds français,}$$

$$15 \text{ pieds français} = 16 \text{ pieds anglais,}$$

$$27 \text{ pieds anglais} = x \text{ mètres.}$$

D'après ce qu'on a vu ci-dessus, les deux premières équations peuvent être remplacées par leur produit, le 1<sup>er</sup> membre étant de l'espèce du 1<sup>er</sup> terme, et le 2<sup>e</sup> membre de celle du dernier terme, savoir :

$$15 \times 1,3 \text{ mètres} = 4 \times 16 \text{ pieds anglais.}$$

$$27 \text{ pieds anglais} = x \text{ mètres.}$$

De même, faisant encore le produit, on a

$$27 \times 15 \times 1,3 \text{ mètres} = 4 \times 16 \times x \text{ mètres.}$$

Ainsi  $526,5 = 64 \times x$ , d'où en divisant par 64,  $x = 8^m, 2266...$

En remarquant l'ordre des équations successives, et le raisonnement qui autorise à les multiplier, on voit que cette règle s'applique quel que soit le nombre des équations, et qu'il faut les écrire de manière que le second membre de chacune soit de la même espèce d'unités que le premier membre de l'équation suivante. La règle est posée quand on est arrivé à un second membre de même espèce que le terme initial ; on égale le produit de la première colonne à celui de la deuxième.

Les exemples suivants montreront l'emploi de la règle conjointe, et feront concevoir toute son utilité. Il est commode de commencer toujours la règle par le terme inconnu  $x$



On demande le rapport de l'arpent parisien à l'hectare. On sait que cet arpent est composé de 900 toises carrées. le rapport de la toise au mètre nous apprend que la toise carrée vaut 3,8 mètres carrés. Ces rapports seront donc enchaînés ainsi :

$$\begin{aligned} x \text{ arpents} &= 1 \text{ hectare.} \\ 1 \text{ hectare} &= 100 \text{ ares} \\ 1 \text{ are} &= 100 \text{ m. car} \\ 3,8 \text{ m. car} &= 1 \text{ toise car} \\ 900 \text{ toises car.} &= 1 \text{ arpent.} \end{aligned}$$

La règle est posée, puisque ce dernier terme est exprimé en arpents, ainsi que le terme initial. Égalant les produits,

$$900 \times 3,8 \times x = 100 \times 100, \text{ ou } 9 \times 3,8 \times x = 100,$$

en divisant les deux membres par 100; donc  $100 = 34,2x$

$x = \frac{1000}{342} = 2,924$ , un hectare vaut donc 2 arpents de Paris, et  $\frac{4+1}{1000}$ , ou à peu près 3 arpents

83. Quand on compare des sommes exprimées en monnaies de divers pays, la règle conjointe prend le nom d'*arbitrage* ou *règle de changes*. En voici des exemples.

La livre sterling vaut 25<sup>l</sup>,50, on demande combien il faut donner de francs pour payer à Londres 120 livres sterling. On pose

$$\begin{aligned} x \text{ fr.} &= 120 \text{ liv. sterl.}, \\ 1 \text{ liv. st.} &= 25,50 \text{ francs,} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } x = 120 \times 25,50 = 3060 \text{ fr.}$$

On demande le prix de 100 pistoles d'Espagne, le change étant de 108 sous de France pour 1 piastre, sachant d'ailleurs que la pistole vaut 4 piastres. On a

$$\begin{aligned} x \text{ fr.} &= 100 \text{ pistoles d'or,} \\ 1 \text{ pist.} &= 4 \text{ piastres,} \\ 1 \text{ piastr.} &= 108 \text{ sous,} \\ 20 \text{ sous} &= 1 \text{ fr.} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } 20 \times x = 100 \times 4 \times 108, \quad x = 5 \times 4 \times 108 = 2160 \text{ fr.}$$

Voici une dernière question. Combien 100 pistoles d'Espagne valent-elles de francs, sachant que 1 ducat d'Espagne vaut 95 deniers de gros d'Amsterdam; que 34 sous de gros valent 1 livre sterling de Londres, et que 32 deniers sterling valent 3 francs? On sait d'ailleurs que la pistole d'Espagne vaut 1088 maravedis, dont il en faut 375 pour 1 ducat; la livre de gros et la livre sterling sont divisés en 20 sous de 12 deniers chaque. L'opération s'écrit comme on le voit ci-contre, et l'on trouve

$x$ fr.	$=$	100 pist.
1 pist.	$=$	1088 marav.
375 marav.	$=$	1 ducat.
1 ducat	$=$	95 den. gr.
12 den. gr.	$=$	1 s. gr.
34 s. gr.	$=$	1 liv. st.
1 liv. st.	$=$	240 den. st.
32 den. st.	$=$	3 fr.

$x = \frac{100 \cdot 1088 \cdot 95 \cdot 240 \cdot 3}{375 \cdot 12 \cdot 34 \cdot 32}$ , qui se réduit à  $x = 4 \times 19 \times 20$ ; ainsi 100 pistoles valent 1520 fr.

84. Pour convertir une quantité donnée, en sa valeur exprimée en une autre unité, il faut avoir le rapport de ces deux unités, et recourir aux proportions, ou aux règles conjointes. La multitude de ces mesures nous empêche de donner leurs rapports; nous nous bornerons à établir ceux des mesures anciennes et nouvelles, tels qu'on les trouve à la page 126. Voyons quel est l'usage de cette table pour convertir les toises, boisseaux, arpens... en mètres, litres, hectares....

On demande combien  $57^T 5^P 8^{Po}$  valent de mètres? Je vois, page 126, que la toise  $= 1^m,949$ ; je pose

$$1^T : 1^m,949 :: 57^T 5^P 8^{Po} : x = 112^m,9337.$$

Combien  $13^m 5^o 7''$  valent-ils de kilogrammes? Je trouve qu'une livre, ou 2 marcs  $= 0^k,4895$ ; d'où

$$2^m : 0^k,4895 :: 13^m 5^o 7'' : x = 3^k,3615.$$

Pour convertir  $44^m,669$  en toises, on pose

$$1^m : 0^T,513074 :: 44^m,669 : x = 22^T,919;$$

ou (page 79), multipliant la fraction par 6, et celle du produit par 12,  $x = 22^T 5^P 6^{Po},17$

Dans ces calculs, il convient d'exprimer les parties complexes

en décimales pour faciliter les multiplications. Nous avons donné, dans la table, page 126, outre les rapports exacts, d'autres valeurs approchées, dont l'usage est plus facile, et qui sont suffisamment exactes. (Voy. n° 595.) La table contient aussi les logarithmes des rapports, afin d'abréger les calculs, ainsi qu'on va l'exposer p. 116.

Combien un litre ou décimètre cube vaut-il de pintes, sachant que la pinte contient 46,95

pouces cubes et que le ponce cube  
vaut 19,8364 centimètres cubes? Ces  
rapports s'enchaînent ainsi qu'on le  
voit ci-contre. Égalant les produits

$$\begin{array}{rcl} x \text{ pinte} & = & 1 \text{ litre.} \\ 1 \text{ litre.} & = & 1000 \text{ cent. cu.} \\ 19,8364 & = & 1 \text{ ponce cub.} \\ 46,95 \text{ po. c.} & = & 1 \text{ pinte} \end{array}$$

des deux colonnes, il vient  $x \times 19,8364 \times 46,95 = 1000$ , d'où  $x = 1,073\ 747$  pinte, capacité égale à celle du litre

C'est par de semblables règles conjointes qu'on a deduit la plupart des nombres du tableau, de ce que le quart du méridien a 5130740,74... toises. (Voy. p. 69.)

### Des Progressions.

85. Une suite de termes dont chacun surpasse celui qui le précède, ou en est surpassé, de la même quantité, est ce qu'on appelle une *Progression arithmétique* ou *par différence*: tels sont les nombres 1, 4, 7, 10 .. On l'indique ainsi : 1.4.7.10.13.16... La *raison* ou *différence* est ici 3.

Il est clair que le second terme est égal au premier plus la raison; le troisième au second plus la raison, c'est à-dire au premier plus 2 fois la raison; le quatrième est de même composé du premier plus 3 fois la raison, etc. En général, un terme quelconque d'une progression par différence est composé du premier plus la raison répétée autant de fois qu'il y a de termes qui précèdent. Donc

1°. On peut trouver un terme quelconque d'une progression sans calculer tous les intermédiaires. C'est ainsi que le 100° terme est ici  $= 1 + 3 \times 99$  ou 298

2°. Pour insérer entre 4 et 32, six moyens proportionnels

par différence, c'est-à-dire pour lier ces deux nombres par 6 intermédiaires, qui forment une progression composée de 8 termes, je remarque que le dernier terme 32 de la progression étant égal au premier 4 augmenté de la raison prise 7 fois,  $32 - 4$  ou 28, est 7 fois la raison inconnue; donc la raison  $= \frac{28}{7} = 4$ ; et l'on a la progression : 4.8.12.16.20.24.28.32.

Pour insérer, entre deux nombres donnés, des moyens proportionnels arithmétiques ou par différence, on divisera la différence de ces quantités par le nombre de moyens plus un; le quotient sera la raison.

De même, pour insérer 8 moyens entre 4 et 11, on trouve la raison  $= \frac{11 - 4}{9} = \frac{7}{9}$ ; la progression est

$$: 4 . 4\frac{1}{9} . 5\frac{2}{9} . 6\frac{1}{3} . 7\frac{1}{9} . 7\frac{8}{9} . 8\frac{5}{9} . 9\frac{2}{3} . 10\frac{1}{9} . 11 .$$

86. Une progression géométrique, ou par quotient, est une suite de termes dont chacun contient celui qui le précède, ou s'y trouve contenu, le même nombre de fois. Telle est la suite  $\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96$ ; . la raison ou le quotient est 2.

Le second terme est égal au premier multiplié par la raison; le troisième est égal au second multiplié par la raison, et par conséquent au premier multiplié par le carré de la raison; de même, le quatrième est le produit du premier par le cube de la raison, etc. En général, un terme quelconque d'une progression par quotient est le produit du premier, par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent. On peut donc,

1°. Calculer la valeur d'un terme, sans être obligé de passer par tous ceux qui le précèdent. Le dixième terme de notre progression ci-dessus est  $3 \times 2^9 = 3 \times 512 = 1536$ .

2°. Pour insérer 8 moyens proportionnels géométriques entre 3 et 1536, je remarque que la progression doit avoir 10 termes, et que le dernier terme 1536 étant égal au premier 3, multiplié par la raison élevée à la puissance 9: si l'on divise 1536 par 3, le quotient 512 est la neuvième puissance de la raison, d'où la raison  $= \sqrt[9]{512} = 2$  (p. 93). Donc, pour in-

pour entre deux nombres donnés des moyens proportionnels géométriques, il faut prendre leur quotient, et en extraire une racine d'un degré égal au nombre des moyens plus un : cette racine sera la raison.

Pour insérer quatre moyens entre 8 et 64, il faudrait extraire la racine cinquième de  $\frac{64}{8}$  ou  $\sqrt[5]{8}$ , quantité irrationnelle (n° 63) ; on ne peut donc assigner exactement ces moyens, mais on en approche autant qu'on veut. La raison est  $\sqrt[5]{8} = 1,5157$ , ainsi la progression cherchée est

$$\therefore 8 : 12,1257 : 18,3792 : 27,8576 : 42,2243 : 64.$$

### *Des Logarithmes.*

87. Remarquons que les théorèmes relatifs aux progressions par différence deviennent ceux qui se rapportent aux progressions par quotient, en changeant l'addition en multiplication, la soustraction en division, la multiplication en élévation de puissances, et la division en extraction de racines. C'est sur cette observation qu'est fondée la théorie des Logarithmes.

Concevons deux progressions, l'une par quotient, l'autre par différence, dont les termes se répondent deux à deux, telles que

$$1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 \dots \text{Nombres.}$$

$$0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \dots \text{Logarithmes.}$$

Chaque terme de la seconde est appelé le *Logarithme* du nombre correspondant de la première ; 0 est le logarithme de 1, 2 l'est de 3, 4 de 9 ; 6 est le logarithme de 27, etc. Les logarithmes sont donc des nombres en progression par différence, qui répondent, terme à terme, à d'autres nombres en progression par quotient.

Comme les logarithmes n'offrent d'utilité qu'en vertu de propriétés qui supposent que ces progressions commencent, l'un



par 1, l'autre par 0; nous ne nous occuperons que de celles qui remplissent cette condition.

Il suit de ce qu'on a dit (n<sup>os</sup> 85 et 86), et de ce que nos progressions commencent, l'une par un, l'autre par zéro, qu'un terme quelconque est formé de la raison, autant de fois facteur pour la première, et autant de fois ajoutée, pour la seconde, qu'il y a de termes avant lui. Les sixièmes termes, par exemple, sont 243, 5<sup>e</sup> puissance de la raison 3, et 10 qui est 5 fois la raison 2. Ainsi la raison est autant de fois facteur dans un nombre qu'elle est de fois ajoutée dans son logarithme.

Si l'on multiplie entre eux deux termes de la progression par quotient, tels que 9 et 243, la raison 3 sera 7 fois facteur dans le produit (page 81), parce qu'elle l'est 2 fois dans 9, et 5 fois dans 243 : le produit  $9 \times 243$ , ou 2187, sera donc le huitième terme de la première progression. Mais si l'on ajoute les termes 4 et 10 correspondans dans la progression par différence, la raison 2 sera aussi 7 fois ajoutée dans la somme 14, donc le produit 2187 et la somme 14 seront des termes correspondans, ainsi 14 est le logarithme de 2187, donc la somme des logarithmes de deux nombres est le logarithme de leur produit. Pour multiplier par 27, par exemple, il suffit d'ajouter les logarithmes 4 et 6 qui répondent à ces facteurs, et de chercher le nombre 243, qui répond à la somme 10 prise parmi les logarithmes ; 243 est le produit cherché.

Il suit de là que le double du logarithme d'un nombre est le logarithme du carré de ce nombre, le triple est le logarithme du cube, et, en general, en multipliant le logarithme d'un nombre par un facteur quelconque, on aura le logarithme d'une puissance de ce nombre marquée par ce facteur. Pour 9, on triple 4, qui répond au nombre 9 et en est le logarithme ;  $3 \times 4 = 12$  répond à  $729 = 9^3$ .

Les inverses de ces opérations sont faciles à démontrer, car le logarithme du quotient plus celui du diviseur devant donner celui du dividende, il s'ensuit que le logarithme du quotient de deux nombres est la différence des logarithmes de ces nombres. Pour diviser 243 par 27, retranchez 6 de 10, la dif-

férence 4 est le logarithme de 9, ainsi 9 est le quotient demandé.

De même aussi, le logarithme de la racine quelconque d'un nombre, est le quotient du logarithme de ce nombre divisé par le degré de cette racine.  $\sqrt[3]{729}$  s'obtient en prenant le tiers de 12, et cherchant 4 parmi les logarithmes. Le nombre correspondant 9 est la racine cherchée.

88. Si, au lieu de prendre 3 pour raison de la progression par le quotient, on eût choisi une quantité beaucoup plus petite, ces propriétés auraient encore subsisté : les quantités dont cette progression serait composée auraient été plus près les unes des autres, et l'on y aurait trouvé, par approximation, les nombres 1, 2, 3, 4, 5, ... Concevons donc qu'on ait formé une progression, dont le quotient eût été assez petit pour qu'on y ait trouvé, à très peu près, tous les nombres entiers, et qu'on en ait composé une table, dans laquelle on aurait inscrit ces nombres et leurs logarithmes, en supprimant d'ailleurs tous les autres termes intermédiaires : les principes qu'on vient de démontrer auraient également été vrais. Supposons cette table formée : on voit que

1°. Pour multiplier des nombres entiers donnés, il suffit de prendre dans la table leurs logarithmes, de les ajouter et de chercher la somme parmi les logarithmes ; le nombre correspondant est le produit cherché (\*).

2°. Pour diviser deux nombres, on retranchera le logarithme du diviseur de celui du dividende ; on cherchera le reste parmi les logarithmes : le nombre correspondant sera le quotient demandé (\*\*).

\*) On demande, par exemple, le produit  $42 \times 863$  ; la table donne les logarithmes de ces nombres, on les ajoute, comme on le voit ci-dessous, on cherche la somme parmi les logarithmes ; la table donne 40561 pour le nombre correspondant, qui est le produit demandé.

$$\begin{array}{rcl} \log. 42 & = & 1,6230979 \\ \log. 863 & = & 2,9360108 \\ \hline \text{Somme} & = & 4,6031087 \end{array}$$

\*\*) Si l'on veut diviser 40561 par 863, la table fera connaître les loga-

3°. Pour faire une règle de trois, on ajoutera les logarithmes des moyens; on en retranchera celui de l'extrême connu: le nombre repondant au résultat sera l'inconnue (\*).

4°. Pour obtenir le logarithme d'une fraction, on retranchera le logarithme du dénominateur de celui du numérateur: le reste sera le logarithme demandé. Les tables ne contiennent que les logarithmes des nombres entiers; ce théorème en étend l'usage aux fractions (n° 91, I) (\*\*).

5°. Pour élever un nombre à une puissance, on multipliera son logarithme par le degré de la puissance, on cherchera le produit parmi les logarithmes; il répondra à la puissance demandée (\*\*\*).

6°. Pour extraire une racine d'un nombre, on divisera le logarithme de ce nombre par le degré de la racine, et l'on cher-

chera dans ces deux nombres; et, les retranchant, on cherchera la différence parmi les logarithmes des tables le nombre 47 qui y correspond sera le quotient

\* Pour la proportion  $153 : 459 :: 17 : x$ , après avoir pris les logarithmes de ces trois nombres, on retranchera celui du premier terme 153 de la somme des deux autres, et observez que cette double operation peut être faite d'un seul trait. On peut aussi ajouter le complément arithmétique du logarithme de 153 (voyez n° 10), au lieu de retrancher ce log. Le résultat cherché dans la table parmi les log. répond à 51, qui est le quatrième terme inconnu

$$\begin{array}{r} \log 17 = 1,2304489 \\ \log 459 = 2,6618127 \\ - \log 153 = 2,1846914 \\ \hline 1,7075702 \end{array}$$

(\*\*), Pour avoir le log de  $3\frac{5}{7}$  ou  $\frac{26}{7}$ , on retranchera le log 7 du log 26. Pour obtenir le produit de  $3\frac{5}{7}$  par  $2\frac{2}{13}$ , ou de  $\frac{26}{7}$  par  $\frac{28}{13}$ , il faudra ajouter les logarithmes de ces deux fractions, ou  $\log 26 - \log 7 + \log 28 - \log 13$ . On voit ce calcul effectué ici d'un seul coup. Le résultat est log 8 donc 8 est le produit demandé, ce qui est d'ailleurs visible

$$\begin{array}{r} \log 26 = 1,4149734 \\ \log 28 = 1,4471580 \\ - \log 7 = 0,8450980 \\ - \log 13 = 1,1139434 \\ \hline 0,9039800 \end{array}$$

\*\*\*, La puissance cinquième de 17 se trouve en repétant 5 fois log 17, et cherchant le produit dans la colonne des logarithmes, il répond au nombre cherché  $17^5 = 1419857$

$$\begin{array}{r} \log 17 = 1,2304489 \\ \times 5 \\ \hline 6,1522445 \end{array}$$

chera le quotient parmi les logarithmes; le nombre qui s'y rapporte sera la racine cherchée (\*).

On voit donc que les calculs les plus compliqués sont rendus très-simples: les multiplications et divisions sont remplacées par des additions et soustractions; les élévations de puissances et les extractions de racines sont réduites à des multiplications et des divisions. Ces admirables propriétés des logarithmes en rendent l'usage si important, que c'est un devoir de consacrer la mémoire du célèbre géomètre écossais NÉPER, qui en est l'inventeur.

89. *Formation des tables.* Il s'agit maintenant d'expliquer comment on peut obtenir les logarithmes de tous les nombres entiers. Jusqu'ici, nos progressions par différence et par quotient sont quelconques l'une et l'autre; ainsi, *un même nombre a une infinité de logarithmes.* Nous verrons bientôt la raison qui a fait préférer les séries suivantes.

$\div$	1	:	10	:	100	:	1000	:	10 000	:	.....	Nombres.
$\div$	0	.	1	.	2	.	3	.	4	.	.....	Logarithmes.

0, 1, 2, .... sont les logarithmes de 1, 10, 100..., ils s'agit de trouver ceux de 2, 3, 4, ...., qui sont visiblement compris entre 0 et 1; ceux de 11, 12...99, sont entre 1 et 2, etc. On ne peut obtenir ces logarithmes que par approximation; on se contente ordinairement de 7 décimales.

Observons que si, dans une progression, telle que  $\div 0.2.4.6.8.10...$  on omet un terme sur 2 consécutifs, ou 2 sur 3, .... on formera d'autres progressions..  $\div 0.4.8.12...$  ou  $\div 0.6.12...$  On peut de même imaginer que les progressions que nous avons prises sont seulement partie de deux autres dont les termes étaient beaucoup plus voisins, et dont on avait omis un certain nombre d'entre eux.

---

\*) Le  $\sqrt[5]{1419837}$  s'obtient en divisant par 5 le log. du nombre proposé, et cherchant le quotient parmi les log. de la table. Le nombre correspondant est 17, racine cherchée.



Ainsi, concevons qu'on ait inséré entre 1 et 10 un très grand nombre de moyens proportionnels par quotient ; comme on monte alors de 1 à 10 par des degrés très serrés, il arrivera que, parmi ces moyens, on rencontrera les nombres 2, 3, 4, ... à un dix-millionième près. Cela posé, si l'on insère un pareil nombre de moyens par différence entre 0 et 1, ceux de ces moyens qui occuperont le même rang que 2, 3, 4, ... seront les logarithmes de ces nombres. On raisonnera de même de 10 à 100, etc.

Il est vrai que, pour insérer un grand nombre de moyens par quotient, il faudrait extraire une racine d'un degré très élevé (86) ; mais on évite cette difficulté à l'aide de diverses racines carrées successives. Par exemple, cherchons le logarithme de 3 ; le moyen par quotient entre 1 et 10 est... 3,16227766, et par différence entre 0 et 1 est 0,5 ; 0,5 est donc le logarithme de 3,1622... , nombre déjà voisin de 3. Une pareille opération pour 1 et 3,1622... d'une part, et pour 0 et 0,5 de l'autre, donne 0,25 pour le logarithme de 1,77827941. De même entre 1,7782... , et 3,1622... d'une part, et entre 0,25 et 0,5 de l'autre, on trouve pour moyens 2,37137370 et 0,375. En continuant de resserrer ainsi ces limites, on trouvera 0,30102999 et 0,47712125 pour logarithmes de 2 et 3.

Ces calculs sont très pénibles ; il est vrai qu'on n'est obligé de les pratiquer que pour les nombres premiers, puisque les autres logarithmes s'en déduisent. Mais, malgré cela, il en reste assez pour lasser la patience. Aussi n'avons-nous présenté ce procédé que comme un moyen de concevoir la formation des tables, nous réservant d'en donner de plus expéditifs (626).

90. Il est aisé maintenant d'expliquer pourquoi on a attribué la préférence aux deux progressions adoptées. Tout logarithme est formé d'une partie entière, qu'on nomme *Caractéristique*, et d'une fraction décimale : or,

1°. Les nombres compris entre 1, 10, 100, ... ont leurs logarithmes respectivement compris entre 0, 1, 2, ... c'est-à-dire que le logarithme de tout nombre a pour caractéristique autant d'unités que le nombre a de chiffres entiers moins un ; ce qui



permet de fixer ce nombre de chiffres, lorsque la caractéristique est donnée, et réciproquement. Le nombre 543,21 a deux unités entières à son logarithme : et 3,477121125 est le logarithme d'un nombre dont la partie entière a quatre chiffres. On évite souvent de charger les tables de cette caractéristique qui y est inutile.

2°. Lorsqu'on veut multiplier ou diviser un nombre par 10, 100, 1000,.... il faut ajouter ou ôter à son logarithme 1, 2, 3,.... unités; d'où il suit qu'augmenter ou diminuer la caractéristique de 1, 2, 3,.... c'est multiplier ou diviser le nombre correspondant par 10, 100,.... c'est reculer la virgule du nombre de 1, 2, 3,... rangs à droite ou à gauche. Les logarithmes des nombres 3,4578, 34,578, 345,78, ont la même partie décimale; seulement les caractéristiques sont respectivement 0, 1, 2....

Tels sont les avantages que présente le système de logarithmes de Briggs, qui l'ont fait préférer dans la composition des tables. Nous l'indiquerons à l'avenir par le signe log; ainsi log 5 désignera le logarithme tabulaire de 5, c'est-à-dire le logarithme pris dans l'hypothèse de deux progressions du n° 89.

91. *Usage des tables.* Il faut avoir des tables de logarithmes entre les mains pour en concevoir l'usage; celles de Callet, de Borda et Delambre, sont les plus usitées. Nous n'entreprendrons pas ici d'expliquer leur usage; mais, il est quelques points qui tiennent à la doctrine même, et qu'il est bon d'éclaircir.

I. Les log. des nombres  $< 1$  présentent une difficulté : en général (n° 88, 4°. ) il faut retrancher le log. du dénominateur de celui du numérateur pour avoir le log. d'une fraction : mais, lorsque celle-ci est moindre que 1, la soustraction devient impossible. Par exemple, pour multiplier 5 par  $\frac{1}{4}$ , comme cela équivaut à diviser 5 par 4, il est indifférent d'ajouter  $\log \frac{1}{4}$  à  $\log 5$ , ou de retrancher  $\log 4$  de  $\log 5$ ; c'est alors cette dernière opération qu'on préfère. On voit donc qu'il faut soustraire le log. du numérateur de celui du dénominateur, mais qu'on doit employer ce log. en sens inverse; c'est-à-dire le soustraire s'il fallait l'ajouter, ou réciproquement. On donne le nom de

*Logarithmes négatifs* à ces valeurs; on les distingue par le signe — qu'on place devant.

Un peu d'attention suffit pour éviter les erreurs. Voici divers exemples propres à faciliter l'intelligence de ces calculs.

$$1^{\circ} x = \frac{42,212 \times}{0,04}; \quad \begin{array}{l} \log 5 = 0,6989700 \\ -\log 3 = 0,4771213 \\ \log \frac{1}{2} = -0,3010300 \\ \log 42,212 = 1,6254359 \\ \hline 1,4035872 \end{array} \quad \begin{array}{l} \log 100 = 2,0000000 \\ -\log 4 = 0,6020600 \\ \log 0,04 = -1,3979400 \\ \hline 1,4035872 \\ \log x = 2,8015272 \\ x = 633,18 \end{array}$$

2<sup>o</sup>.  $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ; on ôte  $\log 5$  de  $\log 7$ , et on prend la moitié. Pour trouver le nombre qui répond à ce résultat qui est un logarithme négatif, on le retranche de 1, ce qui rend le nombre 10 fois trop grand; on a  $+0,9269360$ , qui répond à 8,45154; donc  $x = 0,845154$ .

$$\begin{array}{l} \log 7 = 0,8450980 \\ -\log 5 = 0,6989700 \\ \log \frac{1}{2} = -0,3010300 \\ \log x = -0,0730640 \\ \text{compl.} = 0,9269360 \end{array}$$

3<sup>o</sup>.  $x = \frac{\sqrt[3]{0,00027}}{32,41}$ ; on prend le tiers de  $\log 100000 - \log 27$ , etc. On retranche  $\log x$  de 3, ce qui rend le nombre 1000 fois trop grand, il vient  $+0,2997756$ , qui répond à 1,9942 : donc  $x = 0,0019942$ .

$$\begin{array}{l} \log 100000 = 5,0000000 \\ \log 27 = 1,4313638 \\ \log 0,00027 = -3,5686362 \\ \text{le tiers} = -1,1895454 \\ \log 32,41 = 1,5106790 \\ \log x = -2,7002244 \\ \text{compl.} = 0,2997756 \end{array}$$

II Il est préférable d'employer les logarithmes dont la caractéristique seule est négative. Ainsi, dans le deuxième calcul  $\log \frac{1}{2} = \log 5 - \log 7$ ; on rendra la soustraction possible, en ajoutant 1 à la caractéristique de  $\log 5$ ; mais il faudra ôter de la différence cette unité ajoutée,

$$\begin{array}{l} 1 + \log 5 = 1,6989700 \\ \log 7 = 0,8450980 \\ \log \frac{1}{2} = 1,8538720 \\ \text{ou } -2 + 1,8538720 \\ \log x = 1,9269360 \end{array}$$

et l'on aura  $\log \frac{1}{2} = -1 + 0,8538720$ , qu'on écrit  $\bar{1},8538720$ . La caractéristique est alors seule négative, et il faudra, comme ci-dessus, y avoir regard dans les calculs subséquens. Ici, où l'on doit prendre la moitié, pour éviter les fractions à la caractéristique, on y ajoute 1, et elle devient  $-2$ , et aussi 1 au chiffre 8 des dixièmes, qui devient 18 : ces deux additions de l'unité

positive et négative n'altèrent pas le logarithme ; la moitié est comme ci-dessus,  $\log x = 1,9269360$ .

Observez donc, lorsqu'il faudra diviser un log. à caractéristique négative, d'y ajouter assez d'unités pour qu'elle devienne un multiple du diviseur, et d'ajouter autant d'unités de dizaines au chiffre suivant, qui est la première des figures décimales. La première et la troisième opération sont exécutées ici d'après ces principes, et l'on peut reconnaître que les calculs sont devenus plus faciles et plus prompts.

$$\begin{array}{r} \log 3 = 0,4771213 \\ \log 42,212 = 1,6254351 \\ - \log 5 = 0,6989700 \\ \hline \log 0,04 = 2,6020600 \\ \log x = 2,8015272 \end{array}$$

On ajoute 2 à la caractéristique pour prendre le tiers.

$$\begin{array}{r} \log 0,00027 = 7,4313638 \\ \log 32,41 = 1,5106790 \\ \hline \log x = 3,2997736 \end{array}$$

4°. On peut, au lieu de soustraire des logarithmes (10), ajouter leurs compléments arithmétiques. Dans la première opération, pour  $\log \frac{3}{5}$ , on ajoute au  $\log 3$  le complément de  $\log 5$ . L'avantage qu'on en retire est à peu près nul, attendu qu'on peut faire, d'un seul trait, toutes ces additions et soustractions.

$$\begin{array}{r} \log 3 = 0,4771213 \\ \text{C. } \log 5 = 1,3010300 \\ \log 42,212 = 1,6254351 \\ \text{C. } \log 0,04 = 2,3979400 \\ \hline \log x = 2,8015272 \end{array}$$

Lorsqu'on veut exécuter un calcul par log., il convient de simplifier avant tout les expressions ; ainsi le premier exemple se réduit à  $x = \frac{1}{5} \times 3 \times 422,12 = 1,5 \times 422,12$ .

III. Pour obtenir les log. des entiers compris entre deux nombres quelconques, tels que 10 et 20, il faut concevoir qu'on a inséré un assez grand nombre de moyens par quotient, pour que parmi ces moyens, très peu différens les uns des autres, il y en ait qu'on puisse regarder, par approximation, comme égaux à 11, 12, 13, . . . c'est-à-dire que ces moyens ne doivent différer de 11, 12, 13, . . . que dans l'ordre des décimales négligées.

Dans une progression géométrique, telle que  $8 : 32 : 128 \dots$  dont la raison est 4; on a  $32 = 8 + 8 \cdot 3$ ,  $128 = 32 + 32 \cdot 3 \dots$  Ainsi l'excès d'un terme sur celui qui le précède est le produit

de celui-ci multiplié par la raison moins un : l'un de ces facteurs croît avec le rang du terme, l'autre est constant : cet excès croît donc sans cesse, et il y a moins d'entiers compris entre 8 et 32, qu'entre 32 et 128.... Pour obtenir les log. de ces entiers intermédiaires, il faudrait y insérer des moyens géométriques en quantités suffisantes, et aussi des moyens arithmétiques en égal nombre entre les deux termes correspondans de la progression des log. La différence constante de celle-ci sera donc partagée entre un plus grand nombre de termes à mesure que l'entier croîtra ; ce qui démontre que *plus un nombre est grand, et moins son logarithme diffère de celui qui le suit dans la table.* Aussi voyons-nous que les log. de 1, 10, 100.... étant 0, 1, 2,.... les neuf nombres de 1 à 10 se partagent entre eux, quoique inégalement, une unité entre leurs log. ; et que les 90 nombres de 10 à 100, les 900 de 100 à 1000... se partagent aussi une seule unité.

La différence entre les log. ne tarde même pas à devenir assez petite pour n'affecter que les deux ou trois dernières décimales, et à être la même dans une certaine étendue de la table. Par exemple, en se bornant à sept figures seulement, 79 est l'excès de tous les log. des nombres, depuis 54700 jusqu'à 55300 environ. La différence n'est pourtant pas constante, et si l'on conservait un plus grand nombre de décimales, on la verrait varier sans cesse.

Ainsi, quoiqu'il soit faux de dire que *les nombres croissent proportionnellement à leurs logarithmes*, on voit qu'on peut le supposer sans erreur, du moins pour de grands nombres, et dans une petite étendue. Cela pose, soit demande le log. d'un nombre qui excède les limites des tables, tel que 5487343, par exemple, dans celles de Callet, qui ne vont que jusqu'à 108 mille. En négligeant 43, on cherche le log. de 54873, qu'on trouve être 7.393587, et qui ne diffère de celui de 54874 que de 79. Puisque une unité de différence entre les nombres, répond à 79 de différence entre les log., on posera cette proportion ;

Si 1 diff. entre les nombres, donne 79 diff. entre les log.  
combien 0,13, diff. entre les nombres, donnera-t-il de diff. entre les logarithmes ? ou  $1 : 79 :: 0,13 : x = 31$



Ainsi 34 est l'excès du log. de 54873,43 sur celui de 54873 : en ajoutant 34 à ce dernier, on a 7393621, et il ne s'agit plus, pour avoir le log. cherché, que de mettre la caractéristique, d'après la place que la virgule occupe dans le nombre proposé : ainsi (n° 90)

$$\log 54,87343 = 1,7393621, \log 0,5487343 = \bar{1},7393621, \text{ etc.}$$

Il est inutile de remarquer que dans notre proportion 79 et 34 tiennent lieu de 0,0000079 et 0,0000034. D'ailleurs les tables de Callet offrent à chaque différence logarithmique la valeur de 1, 2, 3, ... 9 dixièmes de cette différence, en sorte que le quatrième terme de la proportion est de suite calculé.

IV. Pour trouver le nombre qui répond à 1,7393621, on voit d'abord que ce logarithme, abstraction de la caractéristique, tombe entre les nombres 5487300 et 5487400, et que la différence entre le log. proposé et celui de 5487300 est 34, ainsi on fera la proportion suivante, 79 : 1 :: 34 :  $x = \frac{34}{79}$ , inverse de celle qu'on vient d'employer : on trouve  $x = 0,43$ ; ainsi le log. proposé est celui du nombre 0,5487343.

Voici des règles conjointes où les log. simplifient le calcul.

I. La toise ou le pied anglais vaut 0,938293 toise ou pied français, en trouver la valeur en mètre ?

$x$ mètres	= 1 toise angl.	.....	
1 toise angl.	= 0,938293 toise franç.	.....	log = 1,9723385
1 toise franç.	= 1,049036 metre	.....	log = 0,2898199
<hr/>			
$x = 1^m 828^s 67$	= 1 toise angl.	.....	log = 0,2621584
On trouve de même 1 pied angl.	= 0 <sup>m</sup> 3047946	.....	log = 1,4840072

II. Un centimètre cube d'eau pèse un gramme ; combien de livres pèse un pied cube d'eau ?

$x$ livres	= 1 pied cube	
29,17386 pieds cub.	= 1000 dec. cubes	log = - 1,4649739
1 decim. cube	= 1000 cent. cubes	..... log = + 3,0000000
1 centim. cube	= 1 gramm. p. 69.	
1000 grammes	= 2 <sup>g</sup> ,04288	..... log = + 0,3102421
<hr/>		
29,17386 $\times x$	= 1000 $\times$ 2,04288	log $x$ = + 1,8452482
1	= 70 <sup>g</sup> ,0242 = poids d'un pied cube d'eau pure	



III. Dans un pays où la longueur du pied est de 13 pouces de Paris, et où la perche vaut 20 pieds, on demande combien cette perche vaut de centiares, et combien l'arpent de ce pays vaut d'ares?

1 are = 26,3245 toises carrées	169.....	2,2278867
1' = 36 pieds carrés	400.....	2,6020600
1 = 12 x 12 pouces carrés	26,3245.....	— 1,4203600
13 x 13 = 1 pied carré	36.....	— 1,5563025
20 x 20 = 1 perche carrée	144.....	— 2,1583625
1 = x ares.		
<hr/>		
13 <sup>2</sup> .20 <sup>2</sup> = 26,3245 x 36 x 12 <sup>2</sup> .x	x.....	1,6949217
169.400 = 26,3245 x 36 x 144.x		x = 0,4954 ares.

Ainsi la perche vaut 49,54 centiares ; l'arpent 49,54 ares.

IV. Pour montrer comment on a pu calculer les nombres qui composent le tableau suivant, nous choisirons cet exemple. En partant de la longueur du *mètre légal*, qui est de 443'',296 de la toise du Pérou, et sachant que l'ancien boisseau était une capacité de 655,78 pouces cubes, on demande combien le boisseau vaut de décalitres.

x décal. = 1 boisseau	100.....	2,
1 = 655,78 pouces cub.	1728.....	3,2375437
1 = 1728 lignes cubes	655,78.....	2,8167582
(443,296) <sup>3</sup> = 1 mètre cube	(443,296) <sup>3</sup> .....	— 7,9400814
1 = 1000 décim. cubes	x.....	0,1142205
1 = litre		x = 1,30083
10 = 1 décalitre		1 boisseau vaut 1,30083 décal.
<hr/>		
(443,296) <sup>3</sup> .x = 100.1728.655,78		

## 126 RAPPORTS DES MESURES ANCIENNES ET NOUVELLES.

Un metre = 0,513071074 toise =  $a$  . . . . .  $\log a = 1,71018007$   
 Un toise = 3 pi 0 po 1 li 296 = 3 pi 0,83444 =  $b$   $\log b = 0,48833132$   
 Une toise = 1,9490303 metre =  $c$  . . . . .  $\log c = 0,28981993$   
 Un pied = 0,3248304 metre =  $d$  . . . . .  $\log d = 1,51160868$   
 Un pouce = 2,706995 centimètres . . . . .  $\log = 0,43248743$   
 Une aune = 13 po 10 lg 5 = 1,187694 metre . . . . .  $\log = 0,0747045$   
 $M$  metres valent  $(a \times M)$  toises ou  $(b \times M)$  pieds.  
 $T$  toises valent  $(c \times T)$  metres,  $P$  pieds valent  $(d \times P)$  metres

Un are = 26,3245 toises carrees . . . . .  $\log = 1,42036014$   
 Un arpent de 900 t. carr. (100 perches de 18 pi) = 34,18867 ares  
 Un hectare = 2,92494 arpens . . . . .  $\log = 0,46611763$   
 Une toise carr. = 3,798743 metres carrees . . . . .  $\log = 0,57983986$   
 Un pied carr. = 10,552 decimètres carres, 1 po carr. = 7,32782 cent. carr

Un stère = 0,135064 toise cube = 29,17386 pieds cubes  
 Un stère = 0,521 voie = 0,261 corde, 1 voie = 1,920 stère.  
 Une toise cub = 7,403887 mètres cubes . . . . .  $\log = 0,86945979$

Un litre = 1,2300 litron . . . . .  $\log = 0,0899051$   
 = (50,4124 pouce cub) = 1,07376 pinte.  $\log = 0,0309020$   
 Un litron = 0,81302 litre, une pinte = 0,9313 litre  
 Un boisseau = 1,3008 decalitre, 1 hectol = 7,6874 boiss

Une livre = 4,87506 hectogr =  $h$  . . . . .  $\log h = 0,68975788$   
 Un kilogramm. = 2,0428765 livres =  $l$  . . . . .  $\log l = 0,31024212$   
 $L$  livres valent  $(h \times L)$  hectogr.  $K$  kilogr valent  $(l \times k)$  livres.

80 francs = 81 livres tournois. Pour traduire des francs en livres, ajoutez le 80° (ou le 8° du 10°, c'est-à-dire un liard par franc) l'our changer des livres en francs, ôtez le 81°, ou le 9° du 9°

D'après les reductions des anciennes monnaies, 5 pieces de 6 livres valent 29 fr. ; 4 de 3 livres valent 11 fr ; le louis vaut 23 fr 55, et le double louis 47 fr 20

### Rapports approchés.

76 metres = 39 toises	13 decimetr. = 4 pieds	181 centimetr = 21 pieds
19 metres = 16 aunes	3 decimetr = 11 pouces	97 millimètres = 43 lignes
40 hectar = 117 arpens	19 mètr. car. = 5 t. carr	21 decim car = 2 pi car.
37 stères = 5 toi cu	5 decim. cu = 252 po. cu.	22 centim car = 3 po car
13 litres = 16 litrons	13 decalitres = 10 boiss.	27 litres = 29 pintes
70 kilogr = 143 livres	11 hectogr = 36 onces.	8 decigram = 15 grains

1 micrometres valent 9 lignes de 25 au degré, ou de 2283 toises ;

## TABLE

Des nombres  $M < 2461$  qui sont multiples des nombres premiers autres que 2, 3 et 5, avec leur plus petit diviseur  $d$ .

M	d	M	d	M	d	M	d	M	d	M	d	M	d	M	d
49	7	169	13	779	19	1073	29	1349	19	1651	13	1907	23	2183	37
77	11	173	11	781	11	791	13	51	13	61	11	19	19	89	11
91	13	181	13	791	13	803	11	52	23	73	7	21	17	97	13
119	7	193	17	793	13	817	19	1363	29	79	23	27	41	1201	31
121	11	397	7	799	17	1111	11	69	37	81	41	37	13	69	47
133	7	311	7	803	11	21	19	79	7	87	7	39	7	19	7
143	11	517	11	817	19	27	7	87	19	91	19	43	29	27	17
161	7	527	17	833	7	33	11	13	1703	13	57	19	31	23	1
169	13	529	23	841	29	39	17	93	2	11	29	61	37	1	7
187	11	533	13	847	7	41	7	97	11	17	17	63	13	49	13
203	7	539	7	851	23	1147	31	1403	23	27	11	67	7	57	37
209	11	551	19	861	11	57	13	11	17	29	37	69	11	1261	7
217	13	553	7	871	13	59	19	17	13	39	37	1	7	63	31
221	13	559	11	883	7	69	7	21	7	51	17	91	11	1	43
247	13	581	7	893	11	77	11	41	11	57	7	2009	7	91	29
253	11	583	11	899	29	83	7	57	31	63	41	21	43	99	11
259	13	587	19	901	17	89	29	63	7	69	29	33	19	2303	1
287	7	611	13	913	11	99	11	69	13	71	7	41	13	17	7
289	17	623	7	917	7	1207	17	77	7	81	13	2017	23	21	11
293	13	629	17	923	13	11	7	1501	19	93	11	51	7	23	23
301	7	637	7	931	7	19	23	07	11	99	7	57	11	27	13
319	11	649	11	943	23	41	17	13	17	1807	13	59	19	29	17
323	17	667	23	949	13	43	11	17	37	13	7	71	19	53	13
329	7	671	11	957	7	47	29	19	7	17	23	73	31	59	7
341	11	679	7	961	31	53	7	29	11	19	17	93	7	63	17
343	7	689	13	973	7	61	13	37	29	1809	31	2101	11	69	23
361	19	697	17	979	11	67	7	41	23	37	11	07	7	87	7
371	7	703	19	989	23	71	31	47	7	41	7	17	29	2401	7
377	13	707	7	1001	7	73	19	61	7	43	19	19	13	07	29
391	17	713	23	1003	17	1309	7	73	11	49	43	23	11	13	19
403	13	721	7	1007	19	11	13	77	19	53	17	47	19	19	41
407	11	731	17	27	13	31	11	89	7	59	11	59	17	29	7
413	7	737	11	37	17	33	31	501	37	83	7	67	11	31	11
427	7	749	7	43	7	37	7	1603	7	91	31	71	13	43	7
437	17	763	7	57	7	39	13	31	7	97	7	73	41	49	31
451	11	767	13	67	11	43	17	49	17	1903	11	2177	7	2453	11

On demande si les nombres 1843, 1907 et 29055 sont premiers, ou quels en sont les diviseurs? 1°. la table indique que 1843 est multiple de 19, et  $= 19 \times 97$ ; 2°. 1907 est un nombre premier, puisqu'il n'est pas dans la table, et que 2, 3 ni 5 ne le divisent, 3°. 29055 est divisible par 3 et 5, et le quotient est 1937, multiple de 13; donc  $29055 = 3 \times 5 \times 13 \times 149$ .

---

# LIVRE SECOND.

## ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

---

### I. CALCULS ALGÈBRIQUES.

---

#### *Notions générales.*

92. En Arithmétique on a pour but de combiner entre eux des nombres, selon de certaines règles : en Algèbre, ce n'est pas un résultat numérique qu'on veut obtenir, mais on cherche la manière dont chaque nombre entre dans le calcul. La solution de tous les problèmes de même nature, qui ont seulement des données différentes, exige des calculs semblables pratiqués sur ces données. Par exemple, l'intérêt d'un capital se trouve en multipliant ce capital par le temps écoulé et par le 100<sup>e</sup> de l'intérêt que rapportent 100 francs dans l'unité de temps (n° 150). L'Algèbre s'occupe de la recherche des calculs à faire dans chaque problème, et pour y parvenir, on y représente les données par des lettres  $a, b, c, \dots$  propres à désigner tous les nombres, afin de reconnaître dans le résultat, à travers toutes les réductions et les modifications, la manière dont chacun s'y comporte.

Cherchons, par exemple, le nombre dont le triple est égal à 100, plus la moitié de ce nombre; nous raisonnerons ainsi

3 fois l'inconnue égale 100 plus la moitié de l'inconnue. . . . .  $3x = 100 + \frac{1}{2}x$

Retranchant de part et d'autre la moitié de l'inconnue, on a

3 fois l'inconnue moins sa moitié égale 100,  $3x - \frac{1}{2}x = 100$   
ou 2 fois l'inconnue égale 100. . . . .  $\frac{5}{2}x = 100$

Enfin (5) divisant des deux côtés par  $\frac{5}{2}$ ,

L'inconnue égale  $\frac{2}{5}$  de 100 ou égale 40. . .  $x = \frac{2}{5}100 = 40$   
L'algebriste représente l'inconnue par  $x$ , et à l'aide des signes, exprime les parties de ce raisonnement, comme on le voit ci-contre. Et s'il met  $a$  au lieu du nombre 100, il aura

$$3x = a + \frac{1}{2}x, \quad 3x - \frac{1}{2}x = a, \quad \text{ou} \quad \frac{5}{2}x = a, \quad x = \frac{2}{5}a.$$

Ainsi, l'inconnue dont le triple est égal à sa moitié, plus une quantité donnée, est les  $\frac{2}{5}$  de cette quantité, quelle qu'elle soit (voyez page 147).

La manière de démontrer les théorèmes peut encore différer beaucoup en Algèbre et en Arithmétique. Veut-on prouver une proposition? On prendra en Arithmétique un exemple numérique quelconque, et l'on procédera de manière à conclure la proposition, non-seulement pour l'exemple individuel sur lequel on a opéré, mais encore pour tout autre. On fera donc un *raisonnement général sur un exemple particulier*. En Algèbre, au contraire, on prendra un exemple formé de symboles assez généraux pour représenter tous les nombres, on pourra raisonner d'une manière qui soit particulière, et souvent les combinaisons seront purement mécaniques. C'est ce que la suite expliquera mieux (n° 106).

93. Convenons donc de représenter les quantités connues par des lettres  $a, b, c, \dots$ ; ce sont les nombres donnés qui servent de base aux raisonnemens, et de la grandeur desquels nous voulons rester maîtres de disposer ensuite. Si  $s$  est la somme des quatre nombres  $a, b, c$  et  $d$ , nous écrirons  $s = a + b + c + d$ .

$s = a + a + a + a$ , se réduit à  $s = 4 \times a$ , ou simplement  $= 4a$ , en ôtant le signe de la multiplication qui devient inutile.



Le chiffre 4 se nomme *Coefficient* (\*). Si le nombre  $a$  doit être répété 2, 5, 7, ....  $n$  fois, on écrira  $2a$ ,  $5a$ ,  $7a$ , ....  $na$ . De même on désigne par  $a^2$ ,  $a^3$ ,  $a^4$ , ....  $a^n$  que  $a$  est 2, 5, 7, ...  $n$  fois facteur, savoir,  $aa$ ,  $aaaaa$ , etc.

On nomme *Terme* toute quantité séparée d'une autre par les signes  $+$  ou  $-$ ; le *binôme* a deux termes, tels sont  $a+b$ ,  $ac-4ab$ ; le *trinôme* trois, tels que  $a+b-c$ ,  $ad-4ab-2bc$ ; le *polynôme* enfin a plusieurs termes.

Le trinôme  $a-b-c$  désigne qu'après avoir ôté  $b$  de  $a$ , il faudra encore retrancher  $c$  du reste, ce qui revient à  $a-(b+c)$ ;  $a-b-b$  est visiblement égal à  $a-2b$ ; de même. ....  
 $a-b-3b-2b = a-6b$ .

### *De la Réduction, l'Addition et la Soustraction.*

94. On appelle *Réduction* l'opération algébrique qui tend à réunir plusieurs termes en un seul; mais il faut pour cela que ces termes ne diffèrent que par les coefficients, et qu'ils soient formés des mêmes lettres affectées des mêmes exposans.  $3a-2ab-b$ ,  $3a^2-2a$ ,  $5a^2b^2+2a^2b^2-3b^2$ , sont des quantités irréductibles. On verra aisément que

$$\begin{aligned} 3abc^2 - abc^2 - bc^2 + 2bc^2 + a^2d^2 &= 2abc^2 + bc^2 + a^2d^2, \\ 2a - 3b + a - c + 3b &= 3a - c, \\ 3b + 2ac - 5b - 3ac + ac + d &= d - 2b \end{aligned}$$

En général, on ne prend d'abord que deux termes semblables, et la réduction ne frappe que sur leurs coefficients, c'est-à-dire qu'on ajoute ces coefficients lorsque leurs signes sont les mêmes, et qu'on les retranche s'ils sont différens: on donne ensuite au résultat le signe commun dans le premier cas, et le signe du plus

---

[\*] On doit bien se garder de confondre les exposans avec les coefficients,  $a^2$ , par exemple, avec  $4a$  || les exposans indiquent la multiplication répétée d'une quantité par elle-même, les coefficients en marquant l'addition,  $4a = a + a + a + a$ ,  $4a^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2$  et  $a$  représente le nombre 5,  $a^4 = 5a^2$ , et  $4a = 20$

grand coefficient dans le second. Les lettres et leurs exposans demeurent d'ailleurs les mêmes.

On doit attribuer le facteur 1 aux termes qui n'ont pas de coefficient (n° 54);  $b$  et  $ac$  équivalent à  $1b$  et  $1ac$ .

A proprement parler, il n'y a en Algèbre ni addition, ni soustraction, mais bien une réduction lorsqu'elle est possible; l'addition et la soustraction restent encore à exécuter dans  $a + b$  et  $a - b$ .

Ainsi, pour faire l'addition ci-contre, on n'éprouvera d'autre embarras que celui de la réduction, après avoir attribué le signe  $+$  au premier terme de chaque trinôme.

$$\begin{array}{r} 3a^2 + 5bc - 2c^2 \\ 7a^2 - 1bc + 4d \\ a^2 - 4bc + 2c^2 \\ \hline 11a^2 - 2bc + 4d \end{array}$$

95. Proposons-nous de soustraire  $b - c$  de  $a$ ; il est certain qu'on ne changera pas la différence cherchée, en ajoutant  $c$  à ces deux nombres; ainsi  $b - c$  deviendra  $b$ ,  $a$  sera changé en  $a + c$ ; soustrayant  $b$  de  $a + c$ , on a

$$a - (b - c) = a + c - b.$$

On voit en effet (n° 4) que si l'on ajoute  $a + c - b$  à  $b - c$ , on retrouve  $a$ . Donc, pour soustraire un polynôme, il faut en changer tous les signes, et réduire, s'il y a lieu. Par exemple,

$$\begin{array}{r} 4ab - 3bc \\ - (2ab - 6bc) \\ \hline 4ab - 3bc \\ - 2ab + 6bc \\ \hline 2ab + 3bc \end{array} \quad \begin{array}{r} 4ab - 3c^2 + bc \\ - ab - c^2 - 2bc \\ \hline 4ab - 3c^2 + bc \\ - ab + c^2 + 2bc \\ \hline 3ab - 2c^2 + 3bc \end{array} \quad \begin{array}{r} 5a^2 - 3ac \\ - (2a^2 - 3ac) \\ \hline 5a^2 - 3ac \\ - 2a^2 + 3ac \\ \hline 3a^2 \end{array}$$

On remarquera que, si le premier terme ne porte aucun signe, il faut lui attribuer le signe  $+$ , afin de rendre applicable la règle ci-dessus à ce terme comme aux autres. C'est ce qu'on fera aussi dans la multiplication et la division, d'après le même motif.

### De la Multiplication.

96. La multiplication des monômes ne donne lieu à aucune difficulté: car soit  $4ab \times 5cd$ , en changeant l'ordre des facteurs,

on a  $4.5.ab\ cd$  ou  $20\ abcd$ . S'il y a des exposans, comme  $a^2 \times a$ , en revenant aux principes, on trouve  $aa \times aaa$  ou  $aaaaa = a^5$ , de sorte qu'on a ajouté les exposans 2 et 3 : de même  $8a^2b^3 \times 4a^2b = 32a^4b^4$ . En général, pour multiplier des monômes, on multipliera leurs coefficients, on ajoutera les exposans qui affectent les mêmes lettres; enfin, on écrira à la suite les unes des autres les lettres différentes. On attribue l'exposant 1 aux lettres qui n'en ont pas.

Multiplications maintenant  $a + b$  par  $c + d$ , ce qu'on indique par  $(a + b) \times (c + d)$ . Il est évident que pour répéter  $a + b$  autant de fois qu'il y a d'unités dans  $c + d$ , il faut prendre  $a + b$ ,  $c$  fois, puis  $d$  fois, et ajouter. Mais pour prendre  $c$  fois  $a + b$ , il faut multiplier séparément  $a$  et  $b$  par  $c$ , de sorte que  $(a + b) \times c = ac + bc$ ,  $(a + b) \times d = ad + bd$ , ce qui donne le produit  $ac + bc + ad + bd$ .

Multiplications  $a - b$  par  $c$ . En prenant le produit  $ac$  de  $a$  par  $c$ , on est supposé avoir ajouté  $c$  fois  $a$ , mais il fallait multiplier, non pas  $a$ , mais  $a - b$  par  $c$ , chaque fois qu'on a ajouté  $a$ , on a pris une quantité trop grande de  $b$  unités, de sorte que le produit  $ac$  doit être diminué de  $b$  pris autant de fois qu'on a répété  $a$ , ou  $c$  fois. Otons donc  $bc$  de  $ac$ , et nous aurons  $(a - b) \times c = ac - bc$ .

Pour multiplier  $a - b$  par  $c - d$ , on fait d'abord le calcul précédent, mais au lieu de répéter  $a - b$ ,  $c$  fois, il ne fallait prendre  $a - b$  que  $c - d$  fois : on a donc pris  $d$  fois de trop  $(a - b)$ ; ainsi, du produit précédent  $ac - bc$ , il faut retrancher celui de  $a - b$  par  $d$ , ou  $ad - bd$ , ce qui donne (n° 95)  
 $(a - b) \times (c - d) = ac - bc - ad + bd$ .

La multiplication de tout polynôme peut toujours être ramenée à ces deux cas, en représentant par  $a$  et  $b$  les sommes des termes positifs de chaque facteur, et par  $c$  et  $d$  celle des négatifs. On ramène ensuite sur le premier cas, quand il s'agit de multiplier deux polynômes. En observant ce qui vient

d'être développé, on voit que chaque terme du multiplicande a été multiplié séparément par chacun de ceux du multiplicateur : en outre, quand les deux facteurs partiels monomes ont eu des signes différents, leur produit a reçu le signe —, tandis que dans le cas contraire on a mis le signe +.

Concluons de là que le produit de deux polynomes se trouve en multipliant chaque terme de l'un par tous ceux de l'autre, d'après la règle donnée pour les monomes; puis on prend chaque produit partiel négativement lorsque ses facteurs ont des signes contraires, et positivement lorsqu'ils sont de même signe (tous deux +, ou tous deux —) (\*). On doit affecter du signe + le premier terme, lorsqu'il n'en porte aucun, comme n° 95

97. Voici quelques exemples de la multiplication des polynômes :

$$\begin{array}{r} a + 3c - d \\ 2a - d \\ \hline 3a^2 + 6ac - 2ad \\ - ad - 3cd + d^2 \\ \hline 3a^2 + 6ac - 3ad \\ - 3cd + d^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 2a & + & bc & - & 2b^2 \\
 2a & - & bc & + & 2b^2 \\
 \hline
 4a^2 & + & 2abc & - & 4ab^2 \\
 - 2abc & - & b^2c & + & 2b^2c \\
 + 4ab^2 & + & 2b^2c & - & 4b^3 \\
 \hline
 4a^2 & - & b^2c & + & 4b^2c - 4b^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ + a^2 + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + 3ab^2 + b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

On a coutume de dire que la multiplication comporte quatre règles, pour les coefficients, les lettres, les exposans et les signes. Les premières ont été données pour les monômes; la quatrième s'exprime ainsi

$$+x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + x - 1 = -x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - x - 1 = +$$

Il semble alors étrange aux oreilles peu faites au langage algébrique d'entendre lire que —  $x$  — donne +, l'espèce de doute qu'on éprouve tient au vice du langage, car il est absurde de prétendre multiplier un signe par un autre. Il ne faut pas attacher un sens rigoureux aux expressions dont on se sert, qui ne sont obscures que parce qu'on sacrifie la correction de l'énoncé au besoin de l'abréger, pour en faciliter l'application. Ce n'est donc pas — qu'on multiplie par — pas même —  $b$  par —  $d$ , mais bien  $a - b$  par  $c - d$ , et la logique la plus exacte conduit au théorème que nous avons donné. En un mot, on ne doit pas appeler le principe dont il s'agit, *la règle des signes* mais bien *la règle de la multiplication des polynômes*.

Ces exemples nous fournissent des remarques intéressantes.

I. Le carré de  $(a + b)$  est  $a^2 + 2ab + b^2$ . (Voyez n° 61.)

II. Le cube est  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ . (Voyez n° 67.)

III. De  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ , on conclut que la somme de deux quantités multipliée par leur différence, donne pour produit la différence de leurs carrés;  $(7+5) \times (7-5) = 7^2 - 5^2$ , ou  $12 \times 2 = 49 - 25 = 24$ .

Coupons  $a$  en deux parties quelconques; si  $a - x$  désigne l'une, l'autre est  $a + x$ , et le produit est  $a^2 - x^2$ ; cette quantité est  $< a^2$ , tant que  $x$  n'est pas nul. Donc, si l'on fait croître depuis zéro l'une des parties d'un nombre  $a$ , l'autre diminue et le produit augmente; mais dès que la première partie devient  $a$ , le produit est le carré de cette moitié, et atteint sa plus grande valeur, en sorte qu'il décroît lorsque la première partie continue de croître.

Ces theoremes servent surtout à abréger les calculs: ainsi, dans le second exemple du n° 97, on reconnaît aisément qu'on cherche le produit de  $2a + (bc - 2b^2)$  par  $2a - (bc - 2b^2)$ : ainsi l'on doit trouver la différence des carrés de  $2a$  et  $(bc - 2b^2)$ , ou  $4a^2 - (bc - 2b^2)^2$ : or la première de nos règles donne  $(bc - 2b^2)^2 = b^2c^2 - 4b^3c + 4b^4$ , le produit cherché est donc  $4a^2 - b^2c^2 + 4b^3c - 4b^4$ .

IV. On trouve que  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2$ ; ajoutant et retranchant  $2abcd$ , le produit revient à...

$$(ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2 :$$

propriété curieuse qui prouve que le produit est décomposable de deux manières en deux carrés. Ainsi  $(7^2 + 2^2)(10^2 + 4^2) = 6148$ , nombre qui equivaut à  $(76 \pm 8)^2 + (28 \mp 20)^2$ ; donc 6148, est décomposable en  $78^2 + 8^2$  et  $62^2 + 48^2$ .

V. Il est facile d'obtenir la forme du produit de  $m$  facteurs binomes  $(x + a)(x + b)(x + c) \dots$ , en effet, pour deux ou trois facteurs, on obtient les produits

$$\begin{array}{l|l} x^2 + ax + ab & x^2 + ax^2 + abx + abc \\ + bx & + bx^2 + acx \\ & + cx^2 + bcx \end{array}$$



Or, il suit du procédé même de la multiplication, que,

1°. Les divers termes du produit ne peuvent éprouver de réduction entre eux; en sorte que les lettres  $a, b, c, \dots$  n'ont ni coefficients numériques, ni exposans

2°. Le premier terme est le produit de tous les premiers termes, et le dernier est le produit de tous les seconds termes des facteurs : entre ces extrêmes, les exposans de  $x$  vont en décroissant d'une unité de terme en terme, et le produit a, en général, la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \dots + abcd.$$

3°. Tous les termes doivent être composés du même nombre  $m$  de facteurs, en sorte que le coefficient  $A$  de  $x^{m-1}$  ne doit pas contenir les lettres  $a, b, c, \dots$  multipliées entre elles; que celui  $B$  de  $x^{m-2}$  doit être formé de produits 2 à 2 de ces lettres, ou  $ab, ac, bc, \dots$

4°. Si la lettre  $a$  entre d'une manière quelconque dans l'un des coefficients  $A, B, \dots$ , toutes les autres lettres  $b, c, \dots$  doivent y entrer de la même manière, puisque le produit ne doit pas changer en mettant  $a$  pour  $b$  et  $b$  pour  $a$ , etc.; donc

*A est la somme de tous les seconds termes des binômes;*

*B est celle de tous leurs produits différens 2 à 2;*

*C celle de leurs produits différens 3 à 3, etc.*

*Le dernier terme est le produit de tous les seconds termes.*

On ne doit pas négliger les simplifications lorsqu'elles sont possibles. Ainsi, pour  $(4ab - 2ac)(6ab - 3ac)$ , on voit que le premier facteur équivaut à  $2a(2b - c)$ , et le second à  $3a(2b - c)$ ; le produit est donc  $6a^2(2b - c)^2$  ou  $6a^2(4b^2 - 4bc + c^2)$ .

Il y a quelquefois de l'avantage à décomposer les produits en facteurs (la division nous apprendra bientôt à faire ces sortes de décompositions) : ainsi, pour  $3y^2z + 3yz^2 + py + pz$ , on reconnaît que les deux premiers termes équivalent à  $3yz(y + z)$ , et les deux autres à  $p(y + z)$ ; donc on a  $(3yz + p) \times (y + z)$ .

*De la Division.*

98. Soit  $a$  le dividende,  $m$  le diviseur,  $q$  le quotient et  $r$  le reste,  $r$  étant  $< m$ , toute division donne l'équ. (n° 16)

$$a = mq + r.$$

Pour diviser un monome par un autre, comme on peut, sans changer le quotient, diviser par un même nombre le dividende et le diviseur (n° 15 et 13), on supprimera les lettres communes à ces deux monomes, on soustraira les exposans qui affectent les mêmes lettres, enfin on divisera les coefficients entre eux. On voit d'ailleurs que cette règle est l'inverse de celle de la multiplication (n° 96)

$$\frac{12a^2b^2c}{3ab} = 4a^1b^1c; \quad \frac{15a^2b^3}{5a^1b^1} = 3ab^2; \quad \frac{8a^2b^2c}{4ab^1} = 2ac;$$

$b^1$  disparaît dans le troisième exemple, parce que les deux termes ont  $b^1$  pour facteur commun

$$\frac{3abc}{3abc} = 1; \quad \frac{4ac^2de^1}{8bd^2c} = \frac{ac^2e^1}{2bd^1};$$

on ne peut pousser le calcul plus loin, et il restera à diviser  $a^1c^2$  par  $2bd^1$ , quand on connaîtra les valeurs numériques de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ .

Soit propose de diviser.

$$20a^2b^2 + 4a^2 - 25a^2b^1 - 4b^3 \text{ par } 2b^3 + 2a^2 - 5ab^1.$$

Le quotient, multiplié par le diviseur, devra reproduire le dividende : si l'on connaissait un terme du produit  $20a^2b^2 + 4a^2 - \dots$  qui résulterait sans réduction de la multiplication d'un terme donné du diviseur par un terme du quotient, une simple division donnerait celui-ci. Or, on sait que les termes en une lettre quelconque, telle que  $a$ , à le plus haut exposant dans les deux facteurs, donnent au produit un terme qui ne se résout avec aucun autre, puisque cette même lettre  $a$  y porte également le plus haut exposant. Les termes  $4a^2$  d'une part, et  $2a^2$  de l'autre étant dans ce cas,  $4a^2$  est le produit exact du terme  $2a^2$  du diviseur et du terme du quotient où  $a$  est affecté du plus haut exposant;

ainsi ce terme est  $\frac{4a^6}{2a^3}$  ou  $2a^3$ . Si l'on multiplie tout le diviseur par  $2a^3$ , et qu'on retranche du dividende, le reste sera le produit du diviseur par les autres parties du quotient. On est donc conduit à diviser ce reste par le diviseur, afin d'obtenir ces parties, ce qui exige qu'on reproduise le même raisonnement, et qu'on divise encore par  $2a^3$  le terme du reste où la lettre  $a$  porte le plus haut exposant.

Pour éviter l'embarras de démêler parmi les termes du dividende, celui où  $a$  porte le plus haut exposant, ainsi que dans les restes successifs, il est convenable d'ordonner le dividende et le diviseur, c'est-à-dire de placer, comme on le voit ici, au premier rang, le terme où  $a$  porte le plus haut exposant; au second rang, le terme où  $a$  porte l'exposant immédiatement moindre, et ainsi de suite.

$$\begin{array}{r}
 4a^6 - 25a^4b^2 + 20ab^5 - 4b^6 \\
 - 4a^6 + 10a^4b^2 - 4a^3b^3 \\
 \hline
 1^{\text{er}} \text{ reste} \dots + 10a^4b^2 - 25a^3b^3 - 4a^3b^3 + 20ab^5 - 4b^6 \\
 \quad \quad \quad - 10a^4b^2 + 25a^3b^3 - 10ab^5 \\
 \hline
 2^{\circ} \text{ reste} \dots \quad \quad \quad - 4a^3b^3 + 10ab^5 - 4b^6 \\
 \quad \quad \quad + 4a^3b^3 - 10ab^5 + 4b^6 \\
 \hline
 3^{\circ} \text{ reste} \dots \dots \dots 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \{ 2a^3 - 5ab^3 + 2b^3 \\
 \{ 2a^3 + 5ab^3 - 2b^3
 \end{array}$$

On voit qu'après avoir divisé  $4a^6$  par  $2a^3$ , on a multiplié tout le diviseur par le quotient partiel  $2a^3$ , et retranché le produit du dividende, ce qui a donné un premier reste. On a divisé de nouveau par  $2a^3$  le terme  $+10a^4b^2$ , où la lettre  $a$  porte, dans le reste, le plus fort exposant, ce qui donne  $+5ab^3$  pour second terme du quotient. On a ensuite multiplié le diviseur par ce terme  $+5ab^3$ ; on a retranché du premier reste, ce qui a donné un second reste. Enfin,  $-4a^3b^3 : 2a^3 = -2b^3$  a complété le quotient parce qu'on n'a plus trouvé de reste.

Lorsqu'on est conduit, comme ci-dessus, à diviser des termes qui ont pour signes, l'un  $+$ , l'autre  $-$ , on donne au quotient le signe  $-$ , afin que, dans la multiplication, on reproduise le premier terme du dividende avec son signe. Si les termes à diviser eussent été négatifs l'un et l'autre, le quotient aurait eu le signe  $+$ . Il faut prendre ceci simplement comme un fait de



doivent diminuer, et ceux de  $b$  croître d'une unité dans chaque reste et dans chaque quotient; les restes sont donc des binômes dont le 1<sup>er</sup> terme est successivement  $a^{m-1}b$ ,  $a^{m-2}b^2$ ... Lorsqu'on arrive au reste  $ab^{m-1} - b^m$ , la division par  $(a-b)$  donne le quotient exact  $b^{m-1}$ , en sorte que  $a^m - b^m$  est divisible sans reste par  $(a-b)$ , et l'on a

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + b^{m-1}.$$

Si  $b=1$ ,  $\frac{a^m - 1}{a - 1} = a^{m-1} + a^{m-2} + a^{m-3} + \dots + a + 1.$

Au reste, il est facile de prouver la vérité de ces équations en multipliant les seconds membres par les dénominateurs  $a-b$ ,  $a-1$ , parce qu'on reproduit *identiquement* les numérateurs  $a^m - b^m$ ,  $a^m - 1$ .

Quand on divise  $a$  par  $1-x$ , l'opération n'a pas de fin, et l'on trouve ce quotient indéfini

$$\frac{a}{1-x} = a(1 + x + x^2 + x^3 + \dots).$$

On peut donc regarder le 1<sup>er</sup> membre comme la somme des termes du 2<sup>e</sup>; cette fraction est la somme d'une progression par quotient, qui s'étend à l'infini, dont  $a$  est le 1<sup>er</sup> terme et  $x$  la raison. Si l'on a, par exemple,  $\div 2 : \frac{2}{3} : \frac{4}{9} : \frac{8}{27} \dots$ , savoir  $a=2$  et  $x=\frac{1}{3}$ ,  $1-x=\frac{2}{3}$ , on trouve  $2 : \frac{2}{3}$  ou 3, pour la somme de cette suite prolongée à l'infini. De même  $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \dots) = \frac{1}{2}$ , parce que  $a=\frac{1}{2}$ ,  $x=\frac{1}{2}$ . Enfin,  $\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots) = \frac{1}{2}$ , en faisant  $a=\frac{1}{4}$ ,  $x=-\frac{1}{2}$ .

La fraction décimale périodique 0,(54) revient à  $\dots\dots\dots$ ,  $\frac{5}{10} + \frac{4}{100} + \dots\dots\dots$  ou  $\frac{54}{100} [1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 + \dots] = \frac{54}{99}$ , en faisant  $a=\frac{54}{100}$ ,  $x=\frac{1}{10}$ . En général, si  $p$  est la période composée de  $n$  chiffres, cette fraction est, comme n° 53,

$$\frac{p}{10^n} + \frac{p}{10^{2n}} + \dots = \frac{p}{10^n - 1} = \frac{p}{999\dots}$$

faisons  $a=1$  et  $x=\frac{1}{10}$ ; il vient  $10 = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$ . On ne conçoit pas d'abord comment, en ajoutant des termes





*Des Fractions et Communs diviseurs.*

101. Tout ce qui a été dit (page 46) sur les fractions numériques, doit se dire aussi des algébriques. Ainsi

1°.  $\frac{a}{b}$  désigne que l'unité est partagée en  $b$  parties, et qu'on en prend  $a$ ; en sorte que le produit  $\frac{a}{b} \times b$  est le numérateur  $a$  (n° 37);

2°. Quel que soit  $m$ , on a  $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$  (n° 38);

3°.  $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$  (n° 39);  $\frac{a}{m} \pm 1 = \frac{a \pm m}{m}$ .

Le signe  $\pm$  s'énonce *plus ou moins*; il indique qu'on doit prendre le signe supérieur dans les deux membres, ou, si l'on veut, l'inférieur dans l'un et l'autre.

4°.  $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$ ,  $\frac{a}{mb} \times b = \frac{a}{m}$ ,  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ,

$\left(a + \frac{b}{c}\right) \left(m + \frac{p}{q}\right) = \frac{(ac + b) \times (mq + p)}{cq}$ , (n°s 40, 41);

5°.  $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$ ,  $\frac{am}{b} : m = \frac{a}{b}$ ,  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ ,

$\left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(m + \frac{p}{q}\right) = \frac{q(ac + b)}{c(mq + p)}$  (n°s 41, 42).

102. Cherchons le *plus grand commun diviseur*  $D$  de deux polynomes  $A$  et  $B$ : on nomme ainsi une expression qui divise exactement ces polynomes, et telle, que les deux quotiens n'admettent plus aucun diviseur commun.

I. Si  $A$  et  $B$  sont divisibles par  $D$ , ils sont de la forme  $A = Dx$ ,  $B = Dy$ ; or en divisant  $A$  par  $B$ , et désignant le quotient par  $q$  et le reste par  $R$ , on a l'équation

$$A = Bq + R, \text{ d'où } Dx = Dyq + R, x = yq + \frac{R}{D},$$

en divisant l'équation par  $D$  : ainsi  $R$  doit aussi être divisible par  $D$ , et de la forme  $R = Dz$ , ce qui donne  $x = yz + c$ .  
Tous les diviseurs communs à  $A$  et  $B$  le sont aussi du reste  $R$  de la division de  $A$  par  $B$ .

Maintenant supposons que  $D$  soit le plus grand diviseur commun de  $A$  et  $B$ , c'est-à-dire que  $x$  et  $y$  n'aient aucun facteur commun, il s'ensuit que  $y$  et  $z$  n'en auront pas non plus, car s'ils en avaient un, on prouverait de même que ce facteur diviserait  $x$ , et que  $x$  et  $y$  ne seraient pas premiers entre eux. Donc le plus grand commun diviseur de  $A$  et  $B$ , est aussi celui de  $B$  et du reste  $R$  de leur division. C'est ce qu'on a vu n° 23.

II Si l'on multiplie ou divise  $A$  par une quantité qui soit première avec  $B$ , le plus grand commun diviseur demeurera le même. Car soient  $A$  et  $B$  de la forme  $A = Dx$ ,  $B = Dy$ ,  $x$  et  $y$  étant premiers entre eux, il est visible que  $D$  sera encore le plus grand diviseur commun, si l'on supprime  $x$ , ou  $y$ , ou seulement quelqu'un de leurs facteurs, comme aussi si l'on multiplie  $A$  par une quantité  $z$  qui soit première avec  $B$ .

III Si un polynôme  $A$ , ordonné par rapport à  $a$ , est divisible par une quantité  $F$  indépendante de  $a$ , les coefficients de chaque puissance de cette lettre  $a$  doivent en particulier être divisibles par  $F$ . En effet, soit  $Ma^n + Ha^1 + \dots$ , le quotient de  $A$  divisé par  $F$ , on a donc  $A = FMa^n + FHa^1 + \dots$ ; or  $F$  ne contenant pas  $a$ , il ne peut s'opérer de réduction d'un terme l'autre. Donc chaque coefficient conserve le facteur  $F$ .

Voici l'usage de ces théorèmes. Si, par la méthode que nous allons exposer, on cherche le plus grand commun diviseur entre deux quelconques des coefficients de  $A$ , puis entre ce diviseur et quelque autre coefficient de  $A$ , et ainsi de suite pour tous les coefficients, il est clair que si  $A$  a un facteur  $F$  indépendant de  $a$ , comme il devra l'être de chaque terme en particulier, on obtiendra ainsi ce diviseur commun  $F$  indépendant de  $a$ , et l'on aura  $A = F \cdot Q$ ,  $Q$  étant un polynôme connu, qui n'admettra plus de facteur sans  $a$ . Le même calcul mettra en évidence aussi le facteur  $F$  indépendant de  $a$ , s'il en existe un, et l'on aura  $B = F \cdot R$ .

Or, le plus grand diviseur  $K$ , entre  $F$  et  $F'$  est le facteur indépendant de  $a$ , qui est commun entre  $A$  et  $B$  : c'est-à-dire que si le plus grand commun diviseur cherché entre  $A$  et  $B$ , est le produit  $QK$  de deux facteurs, l'un  $Q$  contenant  $a$ , l'autre  $K$  sans  $a$ , on sera parvenu à connaître ce dernier, et il ne restera plus qu'à trouver  $Q$ , qui ne peut être divisible par un facteur indépendant de  $a$ . Une fois  $K$  connu, on aura donc  $F = Ka$ ,  $F' = K\beta$ , d'où  $A = KA'a$ ,  $B = KB'\beta$ ; ôtant le facteur  $K$ ,  $Q$  sera le plus grand commun diviseur entre  $A'a$  et  $B'\beta$ , ou plutôt entre  $A'$  et  $B'$ , puisqu'on peut supprimer  $a$  et  $\beta$  (11).

Concluons de là, qu'après avoir trouvé les facteurs  $F$  et  $F'$  indépendans de  $a$ , ou communs à tous les termes, l'un de  $A$ , l'autre de  $B$ , on supprimera ces facteurs, ce qui rendra les polynomes plus simples, tels que  $A'$  et  $B'$  : mais on mettra à part le facteur  $K$ , commun à  $F$  et  $F'$ ; on cherchera le plus grand commun diviseur  $Q$  entre  $A'$  et  $B'$ , et on le multipliera par  $K$ ;  $KQ$  sera celui qu'on demande.

Procedons maintenant à la recherche du facteur  $Q$  dépendant de  $a$ .

Comme le quotient  $q$  de  $A'$  divisé par  $B'$  doit nécessairement être entier, il ne suffit pas ici de procéder comme on l'a fait sur les nombres. Après avoir ordonné les polynomes, ils deviendront

$$A' \dots Ma^m + M'a^{m'} + \dots$$

$$B' \dots Na^n + N'a^{n'} + \dots$$

On divisera le premier terme  $Ma^m$  par le premier  $Na^n$ ; or si  $N$  contient quelque facteur  $a$  qui ne divise pas  $M$ , le quotient n'est pas entier. Pour éviter cette difficulté, comme on admet qu'on a délivré  $B'$  de tous les facteurs communs indépendans de  $a$ ,  $a$  n'est pas diviseur de  $B'$ , et l'on a le droit de multiplier  $A'$  en totalité par  $a$  : alors  $M$  deviendra  $Ma$  divisible par  $N$ . Ainsi les deux premiers termes seront toujours réduits à l'état convenable pour que la division soit possible, parce qu'on aura ôté de  $B$ , ou introduit dans  $M$ , les facteurs qui s'opposaient à la division exacte. On aura soin de faire une semblable opération sur

chacune des divisions subséquentes qu'exige le théorème, afin de rendre tous les quotiens entiers.

Soient, par exemple, les polynomes

$$36a^2cd - 120abcd + 100b^2cd, \text{ et } 36a^2c - 6a^2bc - 90ab^2c$$

Le commun diviseur entre  $120abcd$  et  $100b^2cd$  est  $20bcd$ , entre  $20bcd$  et  $36a^2cd$ , il est  $4cd$ . On obtient de même  $6ac$  pour facteur commun de tous les termes du second polynome. Supprimant ces facteurs, les proposés se réduisent à

$$9a^2 - 30ab + 25b^2 \text{ et } 6a^2 - ab - 15b^2.$$

Mais comme  $4cd$  et  $6ac$  ont  $2c$  pour diviseur, on réservera  $2c$  pour multiplier le commun diviseur entre les polynomes réduits :  $2c$  est le facteur indépendant de  $a$ . Voici la fin du calcul :

$$\begin{array}{l} 9a^2 - 30ab + 25b^2 \\ 6a^2 - 6ab + 5b^2 \\ \hline 3a^2 - 7ab + 10b^2 \\ \hline 3a^2 - 6ab + 5b^2 \\ \hline -ab + 5b^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{er}} \text{ quot } 3 \\ 2^{\text{e}} \text{ Reste } -ab + 5b^2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 3a - 5b \text{ comm divis} \\ 2a + 3b \end{array} \right.$$

On voit que la division de  $9a^2$  par  $6a^2$  ne pouvant se faire exactement, il a fallu multiplier la totalité du dividende par 2 ; après quoi le quotient 3 a conduit au reste  $-57ab + 95b^2$ , et la question est réduite à trouver le plus grand facteur commun entre ce binome et le diviseur ; il faut donc recommencer les calculs de préparation sur l'un et l'autre. Or, on trouve que le binome  $a - 10b$  pour facteur, qu'il faut supprimer ; et, comme la division par  $3a - 5b$  réussit, le plus grand diviseur commun cherché est  $2c(3a - 5b)$  ou  $6ac - 10bc$ .

On propose de réduire à sa plus simple expression la fraction  $\frac{6a^3 - 6a^2x + 12ax^2 - 2x^3}{12a^3 - 15ax^2 + 3x^3}$  : ces polynomes ont respectivement  $a$  et  $3x$  pour facteurs qu'on peut ôter sans changer le plus grand facteur commun des deux termes : le diviseur sera réduit à  $6a^2 - 5ax + x^2$ , et le premier terme du dividende à  $3a^2$ . Pour rendre la division exacte, il faudra multiplier par 4, c'est-à-dire doubler le numérateur, ainsi il faut chercher le plus grand commun diviseur de  $12a^3 - 12a^2x + 4ax^2 - 2x^3$  et  $6a^2 - 5ax + x^2$ .



Une première division donne le quotient  $3a$  et le reste  $3a'y + ay^2 - 4y^3$ . Pour rendre de nouveau la division possible, on multipliera ce reste par  $4$ ; on pourra aussi supprimer le facteur  $y$ ; et le dividende deviendra  $12a^2 + 4ay - 16y^2$ .

Une seconde division conduit au reste  $19ay - 19y^2$ , qui doit être pris pour diviseur de  $4a^2 - 5ay + y^2$ . On supprimera les facteurs  $19$  et  $y$  dans ce diviseur, qui devient  $a - y$ , et qui divise exactement;  $a - y$  est donc le plus grand commun diviseur cherché. La fraction proposée se réduit à  $\frac{6a^2 + 2y^2}{12a - 3y}$ .

Voici le calcul :

$$\begin{array}{r} 12a^2 - 12a^2y + 4ay^2 - 4y^3 \\ + 3a^2y + ay^2 - 4y^3 \\ \hline 12a^2 + 4ay - 16y^2 \\ 19ay - 19y^2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{4a^2 - 5ay + y^2}{3a + 3} \\ -ay + y^2 \\ \hline 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{19ay - 19y^2}{a - y \text{ comm. divs.}} \\ \frac{4a - y}{4a - y} \end{array} \right.$$

En cherchant le plus grand diviseur des deux termes, qui est  $2a^2 + 2ab - b^2$ , on verra de même que la fraction

$$\frac{4a^2 - 4a^2b^2 + 4ab^2 - b^4}{6a^2 + 4a^2b - 9a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4} = \frac{2a^2 - 2ab + b^2}{3a^2 - ab - 2b^2}$$

Pour la fraction  $\frac{54a^2b - 24b^3}{45a^2b + 3a^2b^2 - 9ab^2 + 6b^3}$ , le facteur commun indépendant de  $a$  est  $3b$ ; en le supprimant dans les deux termes, ainsi que  $2$  au numérateur, on est conduit à chercher le plus grand commun diviseur entre  $9a^2 - 4b^2$  et  $15a^2 + a^2b - 3ab^2 + 3b^3$ . On trouve qu'il est  $3a + 2b$ ; ainsi  $3b(3a + 2b)$  est celui qu'on cherche, et la fraction se réduit à

$$\frac{6a - 4b}{3a^2 - 3ab + b^2}$$

On ne doit pas oublier qu'ici, comme au n° 100, il faut regarder les termes qui contiennent une même puissance de la lettre par rapport à laquelle on ordonne, comme ne faisant qu'un seul terme. C'est ce qui a lieu pour la fraction

$$\frac{a^2(b^2 - c^2) - ab(2b^2 + bc - c^2) + b(b + c)}{a^2(b^2 + 2bc + c^2) - a^2b(2b^2 + 3bc + c^2) + ab^2(b + c)}$$

La considération des coefficients  $(b+c)$ ,  $(2b^2+bc-c^2)$ ,  $(b^3-c^3)$ , etc., fait bientôt reconnaître que  $(b+c)$  est un facteur commun indépendant de  $a$ . En le supprimant, on cherche le plus grand diviseur entre

$$a^3(b-c) - ab(2b-c) + b^3$$

$$\text{et } a^2(b+c) - a^2b(2b+c) + ab^3,$$

qu'on trouve, par le calcul, être  $a-b$ ; ainsi, celui des deux termes de la fraction proposée est  $a(b+c) - b(b+c)$ ; elle se

réduit à  $\frac{a(b-c) - b^3}{a^2(b+c) - ab^3}$ .

103. Cherchons le plus petit nombre  $n$  divisible par deux nombres donnés  $a$  et  $b$ . Ce nombre serait  $a \times b$ , si  $a$  et  $b$  étaient premiers entre eux, mais soit  $D$  un diviseur quelconque de  $a$  et de  $b$ ,  $a = Da'$ ,  $b = Db'$ ; comme  $Da'b' = ab' = db$ ,  $Da'b'$  est divisible par  $a$  et par  $b$ . Mais  $\frac{ab}{D}$  est d'autant plus petit que  $D$  est plus grand, donc la quantité  $n = Da'b'$  est le plus petit nombre divisible par  $a$  et par  $b$ , quand  $D$  est leur plus grand commun diviseur. Ainsi, 312 et 132 ont 12 pour plus grand diviseur; les quotiens sont 26 et 11; donc  $12 \cdot 26 \cdot 11 = 3432$  est le plus petit multiple de 312 et 132.

## II. ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

### *Premier Degré à une seule inconnue.*

104. Le degré d'une équation est marqué par la plus haute puissance de l'inconnue qu'elle renferme :  $x, y, z, \dots$  désignent les inconnues,  $a, b, c, \dots$  les données. Ainsi,  $ax = b$  est du premier degré;  $ax^2 + dx = c$  est du second;  $ax^3 + bx^2 + cx + d = e$  est du troisième, etc.

Pour résoudre un problème proposé, il faut d'abord exprimer les conditions qui lient les données aux inconnues par une équation.

inconnues : cette traduction du problème en langage algébrique une fois faite, il faut résoudre l'équation, c'est-à-dire dégager l'inconnue de tout ce qui l'affecte, et l'amener à la forme  $x=A$ ;  $A$  est la valeur cherchée.

Par exemple, un père a 4 fois l'âge de son fils, la somme des deux âges est 45 ans : quel est l'âge de chacun ? Soit  $x$  l'âge du fils,  $4x$  sera celui du père ; ainsi,  $x + 4x$  doit faire 45 ans, d'où  $5x=45$ . Telle est l'équation qui, dans notre problème, exprime la liaison de l'inconnue aux quantités données 5 et 45. Il faut maintenant résoudre cette équation, ce qui se fait en divisant le produit 45 par 5 ; le quotient 9 est l'autre facteur (n° 5) ;  $x=9$  donne 9 ans pour l'âge du fils, et 36 ans pour celui du père.

On voit ici bien distinctement les deux difficultés qu'offre tout problème : 1°. *poser l'équation*, 2°. *la résoudre*. Nous traiterons ces deux sujets, en commençant par le second.

105. L'inconnue ne peut être engagée dans une équation du premier degré, que par addition, soustraction, multiplication et division. Voici les règles qu'il faut pratiquer pour la dégager.

I. *Si l'inconnue a quelques coefficients fractionnaires, multipliez toute l'équation par le nombre qui serait dénominateur commun (n° 38, 1°. et 2°.).* Cette opération, sans altérer l'équation, fera disparaître les diviseurs. Cela revient à réduire tout au même dénominateur, puis à le supprimer. Soit, par exemple,

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 20 = \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x - 8.$$

En multipliant tout par 12, cette équation devient

$$8x + 6x - 240 = 2x - 9x - x - 96,$$

qui se réduit à  $12x - 240 = 8x - 96$

II. *On réunira tous les termes inconnus dans l'un des membres, et les quantités connues dans l'autre, en donnant un signe contraire aux termes qui changent de membre ; c'est ce qu'on appelle transposer.* Ainsi notre exemple deviendra. . .

$12x - 8x = 240 - 96$ , ou  $4x = 144$ . On voit en effet qu'en

Notre règle, pour poser un problème en équation, consiste donc à faire subir à  $x$  toutes les opérations qu'on fera sur le nombre cherché, lorsque après l'avoir trouvé, on voudra vérifier s'il répond en effet à la question.

La valeur arbitraire attribuée à l'inconnue ne sert qu'à mettre ces calculs en évidence, et l'usage apprend bientôt à s'en passer. Voici divers autres problèmes.

II. Quel est le nombre dont le tiers et le quart ajoutés ensemble font 63. Soit  $x$  ce nombre,  $\frac{1}{3}x$  en sera le tiers,  $\frac{1}{4}x$  le quart; donc  $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 63$ ; cette équation se réduit à  $7x = 12.63$ , d'où  $x = \frac{12.63}{7} = 12.9 = 108$ .

Remarquons que, pour obtenir le nombre dont le cinquième et le sixième ajoutés forment 22, il faut recommencer de nouveau à poser l'équ., puis la résoudre; on a ainsi  $\frac{x}{5} + \frac{x}{6} = 22$ ; d'où  $11x = 30.22$  et  $x = 30.2 = 60$ .

Si donc on veut résoudre à la fois ces deux problèmes, et tous ceux qui n'en diffèrent que par des valeurs numériques, il faut remplacer ces nombres par des signes  $a, b, c \dots$  propres à représenter toutes valeurs, puis résoudre cette question: Quel est le nombre qui, divisé par  $a$  et  $b$ , donne  $s$  pour somme des quotiens? On trouve

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = s, \text{ d'où } x = \frac{abs}{a+b}.$$

Cette expression n'est pas, à proprement parler, la valeur de l'inconnue dans nos problèmes; mais elle offre le tableau des calculs qui les résolvent tous. On donne le nom de *formule* à cette expression. Cette *formule* montre qu'on a l'inconnue en multipliant les trois nombres que renferme la question, et divisant ce produit  $abs$  par la somme  $a+b$  des deux diviseurs; ou plutôt notre formule n'est qu'une manière abrégée d'écrire cet énoncé. L'algèbre n'est donc qu'une langue destinée à exprimer les raisonnemens, et qu'il faut savoir lire et écrire.

Tel est l'avantage qu'offre cette formule, que l'algebriste le plus expert, et l'arithmétique le moins intelligent, peuvent maintenant résoudre l'un et l'autre le problème. Mais ce dernier n'y parviendra qu'en s'abandonnant à une routine aveugle. d'ailleurs les diverses questions exigent des formules différentes, et l'algebriste a seul le secret de les obtenir. On voit par là pourquoi quelques personnes calculent souvent avec une facilité surprenante sans comprendre ce qu'elles font, quoiqu'elles sachent trouver exactement les résultats.

III. La somme des âges de deux frères est 57 ans, l'aîné a 7 ans de plus que l'autre : on demande l'âge de chacun. Soit  $x$  l'âge du plus jeune,  $x + 7$  est celui de l'aîné; il faut donc que  $x$  ajouté à  $x + 7$  donne 57; d'où  $2x + 7 = 57$  et  $x = 25$  le plus jeune a 25 ans, l'aîné 32 ans.

En examinant l'énoncé de cette question, il sera facile de reconnaître qu'elle renferme des circonstances inutiles : elle se réduit visiblement à la recherche de deux nombres dont la somme est 57 et la différence 7. En général, il convient de dépouiller les questions de tout appareil étranger, qui ne peut qu'obscurcir les idées, et faire perdre la liaison des quantités. C'est un tact particulier qu'on doit à l'exercice; ni maîtres, ni livres, ne peuvent donner la sagacité nécessaire pour démêler, dans l'énoncé, ce qui est indispensable ou inutile.

Pour généraliser le problème précédent; cherchons les deux nombres qui ont  $s$  pour somme, et  $d$  pour différence. Soit  $x$  le plus petit;  $x + d$  est le plus grand, donc ajoutant  $x + (x + d) = s$ , d'où  $2x = s - d$ , et  $x = \frac{1}{2}(s - d)$ . C'est le plus petit des nombres cherchés, le plus grand est  $x + d$ , ou.....  $\frac{1}{2}(s - d) + d = \frac{1}{2}(s + d)$ . Donc

$$x = \frac{1}{2}(s - d), \quad x + d = \frac{1}{2}(s + d)$$

sont les nombres qui répondent à la question. On prendra la moitié de la somme, et la moitié de la différence données; on aura le plus grand en ajoutant ces deux moitiés, et le plus petit en les retranchant l'une de l'autre.



Une maison composée de deux étages a 15 mètres de haut : le premier est plus élevé que le second de 1 mètre : on demande la hauteur de chaque étage.  $7\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$  sont les moitiés des nombres donnés : ainsi  $7\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ , ou 8 mètres, est la hauteur du premier étage;  $7\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ , ou 7 mètres, est celle du second.

IV Partager un nombre  $a$  en deux parties qui soient entre elles comme  $m$  est à  $n$  ?  $x$  étant l'une des parties, pour avoir l'autre, on pose la proportion  $m : n :: x : \frac{nx}{m}$ ; la somme de

cps parties étant  $a$ , on a  $x + \frac{nx}{m} = a$ ; d'où  $x = \frac{ma}{m+n}$ .

Pour partager  $a$  en trois parties qui soient entre elles ::  $m : n : p$ ,  $x$  étant l'une,  $\frac{nx}{m}$  et  $\frac{px}{m}$  seront les deux autres :

donc  $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a$ , d'où  $x = \frac{ma}{m+n+p}$ . (Voyez la règle de société, n° 79.)

V. Un père a 40 ans, son fils en a 12, on demande dans quel temps le père aura le triple de l'âge du fils. Dans  $x$  années, le père aura  $40 + x$  ans, et le fils  $12 + x$ ; or,  $40 + x$  doit être le triple de  $12 + x$ ; ainsi,

$$40 + x = 36 + 3x, \text{ d'où } x = 2.$$

VI. Plusieurs associés, que je nommerai  $A, B, C, \dots$ , font un bénéfice; et conformément à leurs conventions,  $A$  prend sur la masse commune 10 louis, et le 6<sup>e</sup> du reste,  $B$  prend à son tour 20 louis, et le 6<sup>e</sup> du reste;  $C$  en prend 30, et le 6<sup>e</sup> du reste.., ainsi de suite jusqu'au dernier qui prend ce qui reste. Le partage fait, chacun a une somme égale, on demande la masse, le nombre des associés et la part de chacun.

Quoiqu'il y ait ici trois inconnues, un peu d'attention fait reconnaître que si la masse  $x$  était trouvée, en effectuant le partage, on aurait bientôt les deux autres, ainsi, le problème peut être traité comme s'il n'y avait qu'une inconnue  $x$ .

Puisque *A* prend 10 louis, il reste  $x - 10$ , dont le 6<sup>e</sup> est  $\frac{x-10}{6}$ ;

sa part est donc  $10 + \frac{x-10}{6}$ , ou  $\frac{x+50}{6}$ .

*B* prend 20; le reste est  $x - \frac{x+50}{6} - 20 = \frac{5x-170}{6}$ , dont le

6<sup>e</sup> est  $\frac{5x-170}{36}$ ; la part de *B* est donc  $20 + \frac{5x-170}{36}$  ou

$\frac{5x+550}{36}$ . Puisque ces deux parts doivent être égales, on a

$\frac{x+50}{6} = \frac{5x+550}{36}$ ; ou  $6x+300 = 5x+550$ ; d'où  $x = 250$ .

La masse étant formée de 250 louis, la part de chacun est  $\frac{x+50}{6}$  ou 50, divisant 250 par 50, on trouve 5 pour le nombre des associés.

VII. Avec un nombre *a* de cartes, on forme *b* tas, composés chacun de *c* points: la première des cartes de chaque tas est comptée pour 11 points, si elle est un as, 10 si elle est une figure ou un dix... etc. Les autres cartes du même tas ne valent qu'un point. Ces tas formés, on vous remet *d* cartes qui restent, et l'on demande la somme *x* des points formés par les seules cartes qui commencent chacun des tas.

Le nombre des points de chaque tas, multiplié par celui des tas, ou *bc*, est le nombre total des points; si de ce nombre on retranche les cartes qui ne comptent que pour un point, le reste sera  $= x$ . Or, le nombre de ces cartes est  $a - d - b$  le nombre *b* des cartes qui comptent pour plus d'un point. Ainsi,  $x = bc - (a - d - b)$  ou  $x = b(c+1) + d - a$ .

Si l'on a 32 cartes, qu'on fasse trois tas de 12 points, on aura  $x = d + 7$

VIII. Lorsqu'on a obtenu une formule qui exprime en lettres l'inconnue d'un problème, en regardant à son tour cette inconnue comme donnée, et quelque une des données comme inconnue, il suffit de résoudre la même équation par rapport à

cette dernière, pour obtenir la solution du nouveau problème auquel ce changement d'inconnue donne lieu. En général, dans toute équation, on peut prendre pour inconnue celle qu'on veut des lettres qui y entrent. Il n'est donc plus nécessaire de distinguer les élémens d'un problème en données et inconnues : on exprime par une équation la relation de ces diverses quantités, et l'on regarde ensuite comme inconnue celle de ces lettres qu'on juge à propos. Cette remarque tend à faciliter la résolution des problèmes où l'inconnue est engagée d'une manière embarrassante. Voici un exemple assez compliqué auquel ces considérations peuvent s'appliquer.

La Mécanique enseigne que les temps  $t, t'$ , des oscillations de deux pendules sont comme les racines carrées de leurs longueurs  $l, l'$ , comptées du point de suspension au centre d'oscillation, ou  $t : t' :: \sqrt{l} : \sqrt{l'}$ , connaissant trois de ces quantités, on tire la 4<sup>e</sup> de l'équation  $lt' = l't$ . Mais un pendule fait d'autant plus de vibrations qu'il va plus vite, les nombres  $n$  et  $n'$  d'oscillations faites dans la même durée quelconque par les deux pendules  $l$  et  $l'$ , sont donc en raison inverse des temps de chacune,  $t : t' :: n' : n$ ; donc

$$n' : n :: \sqrt{l} : \sqrt{l'}, \quad n'\sqrt{l'} = n\sqrt{l}.$$

Or, l'expérience apprend qu'à Paris, dans le vide, le pendule à secondes, celui qui bat 60 coups par minute, ou 86400 coups par 24 heures moyennes), a pour longueur

$$l = 0,9938267 \text{ mètres, } \log l = \bar{1},9973106, \\ \text{ou } l = 36,713285 \text{ pouces, } \log l = 1,5648232.$$

Il est donc bien facile d'évaluer la quantité  $n'$  d'oscillations faites dans un temps donné par un pendule connu, ou réciproquement de trouver la longueur  $l$  d'un pendule, connaissant le nombre  $n'$  de ses vibrations dans une durée déterminée. Car le second membre de notre équation est connu, et il ne s'agit que de trouver l'un des nombres  $l$  ou  $n'$ . Le calcul des log. facilite l'opération.

Par exemple, quelle est la longueur d'un pendule qui bat 100 000 oscillations en 24 heures? On a l'equ.  $l = \frac{4n^2}{\pi^2}$ , ou

$n = 86400$ ,  $n' = 100\ 000$ ; le calcul ci-contre donne  $l$  en mètres; c'est la longueur du pendule qui bat les secondes, quand on divise le jour en 10 heures, l'heure en 100', la minute en 100''

$$\begin{array}{rcl} \log n & = & 4,9365137 \\ \text{double} & = & 9,8730274 \\ \log l & = & 6,9073106 \\ & - & 10 \\ \log l & = & 7,8703380 \\ l & = & 0^m,7418673 \end{array}$$

IX. *A* et *B* se sont mis au jeu chacun avec une somme égale : la perte de *A* est 12 fr. ; celle de *B*, 57 fr. , par là, *B* n'a plus que le quart de ce qui reste à *A*. Combien chacun avait-il avant le jeu? Réponse, 72 fr.

X. Si l'on doublait le nombre de mes ecus, dit un homme, j'en donnerais 8; on accomplit ce souhait trois fois consécutives, et il ne lui reste rien : combien cet homme avait-il d'écus? Réponse, 7

XI. Quel est le nombre qui, divisé par  $a$  et  $b$ , donne deux quotiens qui ont  $d$  pour différence? On trouve  $x = \frac{abd}{b-a}$ .

XII. Trouver un nombre dont le produit de ses  $m$  parties égales soit le même que celui de ses  $m + 1$  parties égales (le produit des 3 tiers égal, par exemple, à celui des 4 quarts). On a

$$x = \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}.$$

XIII. Un chasseur promet à un autre de lui donner  $b$  fr. toutes les fois qu'il manquera une pièce de gibier, pourvu que celui-ci donne  $c$  fr. chaque fois qu'il l'atteindra. Après  $n$  coups de fusil, ou les deux chasseurs ne se doivent rien, ou le premier doit  $d$  au second, ou le contraire a lieu : on demande une formule propre à ces trois cas, et qui fasse connaître le nombre  $x$  de coups manqués. Le gain est  $c$  fois le nombre  $n - x$  des coups heureux, la perte est  $b$  fois  $x$ ; d'où  $bx - c(n - x) = \pm d$ .

On trouve  $x = \frac{cn \pm d}{b + c}$ ;  $d$  est nul dans le 1<sup>er</sup> cas, on prend le signe supérieur dans le 2<sup>e</sup>, et l'inférieur dans le 3<sup>e</sup>.

XIV. Une fontaine emplit un réservoir en un nombre d'heures désigné par  $h$ , une autre peut le remplir en  $h'$  heures; on demande combien ces fontaines mettraient de temps en coulant ensemble? Réponse,  $x = \frac{hh'}{h+h'}$ . On résoudra facilement le problème pour plus de deux fontaines, même en admettant que le réservoir se vide (Voy. IV, p. 102.)

### *Remarques sur les Équations du premier degré.*

107. Les formules algébriques ne peuvent offrir d'idée nette à l'esprit qu'autant qu'elles représentent une suite de calculs numériques, donc l'exécution est possible. Ainsi la quantité isolée  $b - a$  ne peut signifier qu'une chose absurde lorsque  $a$  est  $> b$ . Il convient donc de reprendre les calculs précédents, parce qu'ils offrent quelquefois cette difficulté.

Toute équation du premier degré peut être ramenée à avoir ses signes tous positifs, telle que (\*)

$$ax + b = cx + d \dots (1).$$

Retranchons  $cx + b$  de part et d'autre, il viendra  $ax - cx = d - b$

d'où 
$$x = \frac{d - b}{a - c} \dots (2).$$

Cela pose, il se présente trois cas : 1°. ou  $d > b$  et  $a > c$  ; 2°. ou l'une de ces conditions a seule lieu ; 3°. ou enfin  $b > d$  et  $c > a$ . Dans le premier cas, la valeur (2) résout le problème ; dans les deux derniers, on ne sait plus quel sens on doit attacher à la valeur de  $x$ , et c'est ce qu'il faut examiner.

\* On changera les termes négatifs de membre, ce qui sera toujours possible, puisque rien n'empêche d'ajouter aux deux membres une même quantité. On ne pourra pas la soustraire dans tous les cas, puisqu'il faudrait que les deux membres fussent plus grands que cette quantité soustraite.



Dans le deuxième cas, l'une des soustractions  $d - b$ ,  $a - c$ , est impossible : soit, par exemple,  $b > d$  et  $a > c$ , il est clair que la proposée (1) est absurde, puisque les deux termes  $ax$  et  $b$  du premier membre sont respectivement plus grands que ceux  $cx$  et  $d$  du second. Ainsi, lorsque cette difficulté se présentera, on sera assuré que le problème est absurde, puisque l'équ. n'en est que la traduction fidèle en langage algébrique.

Le troisième cas a lieu lorsque  $b > d$  et  $c > a$ ; alors on a deux soustractions impossibles : mais nous avons ôté  $cx + b$  des deux membres de l'équation (1) afin de la résoudre, ce qui était manifestement impossible, puisque chacun est  $< cx + b$ . Ce calcul étant vicieux, nous ôterons  $ax + d$  de part et d'autre, et il viendra  $b - d = cx - ax$ , d'où

$$x = \frac{b - d}{c - a} \dots (3).$$

Cette valeur, comparée à (2), n'en diffère que parce que les signes sont changés haut et bas; elle ne présente plus d'obscurité. On voit donc que lorsque ce troisième cas se rencontre, il annonce qu'au lieu de passer tous les termes inconnus dans le premier membre, il aurait fallu les mettre dans le second : et il n'est pas nécessaire, pour rectifier cette erreur, de recommencer les calculs, il suffit de changer les signes haut et bas.

Un des principaux avantages qu'on se propose en Algèbre est d'obtenir des formules propres à tous les cas d'une même question, quels que soient les nombres qu'elle renferme (p. 150 et 151). Or, nous remplirons ici ce but en convenant de pratiquer sur les quantités négatives isolées les mêmes calculs que si elles étaient accompagnées d'autres grandeurs. Par exemple, si l'on avait  $m + d - b$  et  $b > d$ , on écrirait  $m - (b - d)$ ; lorsque  $m$  n'existera pas, nous convenons d'écrire encore  $d - b = -(b - d)$ , quand  $b$  sera  $> d$ .

La valeur de  $x$ , dans le second cas, devient  $x = -\frac{b - d}{a - c}$ , et nous dirons que toute solution négative dénote une absurdité.

Facilement, pour diviser le polynôme  $-a^2 + 3a \cdot b^2 + \text{etc.}$  par  $-a^2 + b^2 + \text{etc.}$ , on divisera d'abord le premier terme  $-a^2$  par  $-a^2$ , et l'on sait (n° 98) que le quotient  $a^2$  a le signe +. Nous en dirons autant de ces quantités isolées  $-a^2$ ,  $-a^2$ ; de sorte que dans le troisième cas, la valeur (3) de  $x$  aura la forme  $\frac{-(b-d)}{-(c-a)}$ , qui se réduit à  $\frac{b-d}{c-a}$ , comme elle doit être (3).

108. Cette convention, qui n'entraîne aucun inconvénient, réunit donc tous les cas dans la formule (2). Mais on ne doit pas oublier que les quantités négatives isolées  $-k$ ,  $-\frac{m}{n}$ , ne sont que des êtres de convention, des symboles, qui n'ont aucune existence par eux-mêmes, et qu'on ne les emploie comme s'ils en avaient une, que parce qu'on est assuré de remplir un but important, sans qu'il en puisse résulter d'inconvénient. En effet, de deux choses l'une : ou le résultat aura le signe  $-$ , et l'on en conclura que le problème est absurde, le  $-$  n'étant qu'un symbole qui annonce cette absurdité ; ou le résultat aura le signe  $+$ , et il est prouvé qu'alors il est ce qu'il doit être, quoique provenu de la division de deux quantités négatives. Concluons de là que :

1°. On a le droit de changer tous les signes d'une équation, et de la multiplier par une quantité négative. En effet, si l'on est dans le premier de nos trois cas, l'équation deviendra, il est vrai, absurde d'exacte qu'elle était, mais la division des quantités négatives rétablira les choses dans leur état primitif. Dans le deuxième cas, l'absurdité du problème sera encore manifestée par une valeur négative; et enfin, s'il s'agit du troisième, le changement de signes aura rectifié le vice du calcul.

2°. Lorsque l'équation sera absurde, on pourra encore tirer parti de la solution négative obtenue dans le deuxième cas, car, mettant  $-x$  pour  $x$ , l'équ. proposée devient  $-ax + b = -cx + d$ , d'où  $x = \frac{b-d}{a-c}$ , valeur égale à (2), mais positive. Si donc on résout la question, de manière que cette équ. lui convienne,

ce second problème, qui aura avec le premier une ressemblance marquée, ne sera pas absurde, et, au signe près, il aura même solution.

Présentons, par exemple, le problème V comme il suit : un père a 42 ans, son fils en a 12 ; dans combien d'années l'âge du fils sera-t-il le quart de celui du père ? On a  $42 + x = 4(12 + x)$ , d'où  $x = -2$  ; ainsi, ce problème est absurde. Mais si l'on met  $-x$  pour  $x$ , l'équ. devient  $42 - x = 4(12 - x)$ , et les conditions qui y correspondent changent le problème en celui-ci : un père a 42 ans, son fils en a 12, combien d'années se sont écoulées depuis l'époque où l'âge du fils était le quart de celui du père ? On a  $x = 2$ .

Quel est le nombre  $x$  qui, divisé par  $a$ , donne  $s$  pour somme du dividende  $x$ , du diviseur  $a$ , et du quotient ?

On a  $a + x + \frac{x}{a} = s$ , d'où  $x = \frac{a(s-a)}{a+1}$ . Or, si  $a > s$ ,  $x$  est négatif, et la question est absurde ; ce qui était d'ailleurs visible d'avance ; par exemple,  $a = 11$ ,  $s = 5$  ; donnent  $x = -5$ . Mais changeant  $x$  en  $-x$  dans l'équ., on trouve  $11 - x - \frac{x}{11} = 5$  ; de sorte que  $x = 5$  est le nombre qui, joint au 11<sup>e</sup> de 5, et retranché de 11, donne 5 pour reste. Sous cet énoncé, le problème a cessé d'être absurde.

Quel est le nombre dont le tiers et le cinquième ajoutés, diminués de 7, donnent ce même nombre ? On a  $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x - 7 = x$  ; d'où  $x = -15$ . La question est absurde ; mais remplaçant  $x$  par  $-x$  dans l'équ. (ou plutôt  $-7$  par  $+7$ ), on verra que 15 est le nombre dont le tiers et le cinquième ajoutés à 7, forment 15.

109. L'équation (2) présente encore deux singularités. Si  $a = c$ , on a  $x = \frac{d-b}{0}$  ; mais la proposée devient dans ce cas  $ax + b = ax + d$ , d'où  $b = d$ , ainsi tant que  $b$  est différent de  $d$ , le problème est absurde, et n'est plus de nature à être modifié comme ci-dessus. En faisant décroître  $n$ , la fraction  $\frac{m}{n}$  augmente, pour  $n = 1, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ , les résultats deviennent 2, 100, 1000 fois plus grands. La limite est l'infini, qui répond

à  $n = 0$ ; on voit donc que le problème est absurde quand la solution est infinie; ce qu'on désigne par le signe  $x = \infty$ .

MAIS si  $a = c$  et  $b = d$ , alors  $x = \frac{b}{a}$ , et la proposée devient  $ax + b = ax + b$ ; les deux membres sont égaux quel que soit  $x$  qui est absolument arbitraire. Ainsi, le problème est indéterminé ou reçoit une infinité de solutions, lorsqu'on trouve  $x = \frac{b}{a}$  dans l'équ. (1). Voy. n° 114.

### Premier Degré à plusieurs inconnues

110. Lorsqu'on a un nombre égal d'inconnues et d'équations, pour obtenir les valeurs de ces inconnues, on peut opérer de trois manières.

1. On tirera de chaque équation la valeur d'une inconnue comme si le reste était connu; on égalera ces valeurs deux à deux, et l'on formera ainsi autant d'équ. moins une, qu'on en avait d'abord; en répétant ce calcul, on éliminera chaque fois une inconnue; puis, lorsqu'on aura obtenu la valeur de la dernière, on remontera de proche en proche pour avoir celles des autres inconnues.

Ainsi, pour  $5x - 3y = 1$ ,  $2y - 4x = 13$ , on tirera

$$\text{de la première} \dots x = \frac{3y + 1}{5},$$

$$\text{et de la seconde} \dots x = \frac{2y - 13}{4},$$

égalant ces valeurs, on a  $\frac{3y + 1}{5} = \frac{2y - 13}{4}$ , équation qui ne renferme plus qu'une inconnue  $y$ , et d'où l'on tire  $12y + 4 = 5y - 65$ ; puis,  $35y = 65 + 4$ ; ou  $35y = 69$ , enfin  $y = 3$ : remontant à la première des valeurs de  $x$ , il vient

$$x = \frac{3 \cdot 3 + 1}{5} = 2.$$

Parallèlement

$$2x + 5y - 3z = 3,$$

$$3x - 4y + z = -2,$$

$$5x - y + 2z = 9.$$

donnent  $z = \frac{2x + 5y - 3}{3} = 4y - 3x - 2 = \frac{9 + y - 5x}{2}.$

Chassant les dénominateurs (105, 1), on trouve

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 3 &= 12y - 9x - 6, \\ 8y - 6x - 4 &= 9 + y - 5x, \end{aligned}$$

ou  $2y - 11x = 3, \quad 2y - x = 13;$

on en tire  $2y = 3 + 11x = 13 + x$ , d'où  $x = 1$ ; et remontant aux valeurs de  $y$  et  $z$  ci-dessus, on trouve enfin

$$y = \frac{3 + 11}{7} = 2, \quad z = \frac{2 + 2.5 - 3}{3} = 3.$$

II. La méthode des *substitutions* consiste à tirer, comme ci-dessus, la valeur de l'une des inconnues; puis à la substituer dans les autres équ. : on a ainsi une équ. et une inconnue de moins, et l'on réitère le même procédé.

Soient  $3x + 2y = 12$ ,  $2z + y = 5$ ,  $x + y + 3z = 8$ ; la seconde donne  $y = 5 - 2z$ , en substituant dans les deux autres, elles deviennent  $3x - 4z = 2$ ,  $x + z = 3$ .

Celle-ci donne  $x = 3 - z$ , ce qui change la précédente en  $9 - 3z - 4z = 2$ ; d'où  $z = 1$ , et par suite,  $x = 3 - z = 2$ ,  $y = 5 - 2z = 3$ .

III. Le premier procédé, quoique plus simple que les autres, est rarement employé à cause de sa longueur, le second ne sert guère que quand toutes les inconnues n'entrent pas dans les équ.; venons maintenant à celui qui est le plus usité. Prenons

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c' \dots (A).$$

Supposons que  $a$  et  $a'$  soient égaux, en soustrayant l'une de ces équ. de l'autre,  $x$  disparaîtra; si  $a$  et  $a'$  étaient de signes contraires, il faudrait ajouter les équ. Mais lorsque  $a$  et  $a'$  ne sont pas égaux, on multipliera la première par  $a'$ , la seconde par  $a$ , et notre condition sera remplie, puisque  $aa'$  sera le coefficient commun de  $x$  (\*). On obtiendra donc, en retranchant ces

(\*) Si  $a$  et  $a'$  ont un facteur commun, il ne faut prendre pour multiplieurs respectifs que les facteurs non communs à  $a$  et à  $a'$ , comme pour la réduction au même dénominateur (n° 19, 1° et 2°).



produits l'un de l'autre,  $a'by - ab'y = a'c - ac'$ . De même, éliminons  $y$ , en multipliant la première équation par  $b'$  et la seconde par  $b$ , puis retranchant les produits, d'où  $a'bx - ab'x = bc' - b'c$ . Donc enfin on a

$$x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'}, \quad y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} \dots \dots (B)$$

III. En traitant de la même manière les équations

$$\left. \begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'' \dots \end{aligned} \right\} (C),$$

qui sont les plus générales à trois inconnues, on trouverait les valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Mais ce calcul ne permettrait pas de découvrir la loi des résultats sans recourir à l'induction; c'est pourquoi nous le présenterons d'une manière un peu différente. Multiplions la première par  $k$ , la deuxième par  $k'$ , et de la somme de ces produits retranchons la troisième, il viendra

$$(ka + k'a' - a'')x + (kb + k'b' - b'')y + (kc + k'c' - c'')z = kd + k'd' - d''$$

Les nombres  $k$  et  $k'$  étant arbitraires, on peut leur attribuer des valeurs propres à chasser deux inconnues,  $y$  et  $z$ , par exemple. On posera pour cela les équ.

$$kb + k'b' = b'', \quad kc + k'c' = c'', \quad \dots (D),$$

qui serviront à faire connaître  $k$  et  $k'$ ; et l'on aura

$$x = \frac{kd + k'd' - d''}{ka + k'a' - a''} \dots \dots (E).$$

Il faut ensuite déterminer  $k$  et  $k'$ , et en substituer ici les valeurs; mais on peut abréger beaucoup ce calcul. En effet, le numérateur de  $x$  se déduit du dénominateur, en changeant  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$  en  $d$ ,  $d'$ ,  $d''$ ; et comme  $k$  et  $k'$  sont indépendants de ces quan-

ités, la même chose aura lieu également après la substitution des valeurs de  $k$  et  $k'$ .

Il s'agit donc d'évaluer le dénominateur, puisque le numérateur s'en déduit en changeant simplement les  $a$  en  $d$ ; les formules  $B$  appliquées aux équ.  $D$  donnent

$$k = \frac{b'c'' - c'b''}{cb' - bc'}, \quad k' = \frac{cb'' - bc''}{cb' - bc'};$$

$$\text{d'où } ka + k'a' - a'' = \frac{a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'')}{cb' - bc'} - a''.$$

On réduira au même dénominateur, qu'on supprimera comme étant commun aux deux termes de la fraction  $E$ , et l'on aura pour le dénominateur cherché

$$K = a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'') + a''(bc' - cb').$$

En faisant attention à la manière dont il faut exécuter ces multiplications, on observera que le calcul se réduit à l'opération suivante. On prendra la différence  $bc - cb$ , entre les deux arrangemens des lettres  $b$  et  $c$ , puis on introduira la lettre  $a$  à toutes les places, en commençant par la première à gauche, et changeant de signe chaque fois que  $a$  changera de place,  $+bc$  engendrera  $+abc$ ,  $-bac$  et  $+bca$ ;  $-cb$  donnera  $-acb$ ,  $+cab$  et  $-cba$ . Enfin, on réunira ces six termes, et l'on marquera d'un trait la seconde lettre de chacun, et de deux la dernière, le dénominateur  $K$  est donc

$$K = ab'c'' - ba'c'' + bc'a'' - ac'b'' + ca'b'' - cb'a''.$$

Pour trouver  $y$ , il faudrait égaler pareillement à zéro les coefficients de  $x$  et  $z$  dans l'équation ci-dessus; mais la symétrie des calculs prouve qu'il suffit de changer  $b$  en  $a$ , et réciproquement dans la valeur de  $x$ . On changerait  $c$  en  $a$  pour la valeur de  $z$ . Concluons de là que, 1°. le dénominateur des valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , est le même; 2°. le numérateur de chacune se déduit du dénominateur, en changeant les coefficients de l'inconnue en les

termes connus. Ainsi

$$x = \frac{db'c'' - bd'c'' + bc'd'' - dc'b'' + cd'b'' - cb'd''}{K},$$

$$y = \frac{ad'c'' - da'c'' + dc'a'' - ac'd'' + ca'd'' - cd'a''}{K},$$

$$z = \frac{ab'd'' - ba'd'' + bd'a'' - ad'b'' + da'b'' - db'a''}{K}.$$

La loi que nous avons démontrée suit de la nature même du calcul; en sorte que si l'on a quatre inconnues et quatre équ.,

$$ax + by + cz + dt = f, \quad a'x + b'y + c'z + d't = f', \text{ etc.},$$

il suffira de chercher le dénominateur commun, et l'on en déduira chaque numérateur; de plus, ce dénominateur sera formé suivant la même loi.

On prend donc les six arrangements des lettres  $abc$  qui servent de dénominateur ci-dessus (en supprimant les accents), ou  $abc - bac + bca - \text{etc.}$  : on fait occuper à la lettre  $d$ , dans chacun de ces termes, toutes les places, à commencer par la première à gauche; puis on change de signe chaque fois que  $d$  passe d'une place à la suivante; enfin on marque d'un trait la deuxième lettre, la troisième de deux et la dernière de trois : le dénominateur commun est

$$da'b''c'' - ad'b''c'' + ab'd''c'' - ab'c''d'' - db'a''c'' + bd'a''c'' - \text{etc...}$$

Voici quelques problèmes.

I. Une personne a des jetons dans ses mains; si elle en porte un de la droite dans la gauche, il y en aura un nombre égal dans chacune; mais si elle en passe deux de la gauche dans la droite, celle-ci en contiendra le double de l'autre : on demande combien chaque main en contient. On trouve

$$x - 1 = y + 1, \text{ et } x + 2 = 2(y - 2); \text{ d'où } x = 10, \text{ et } y = 8.$$

II. On a acheté trois bijoux dont on demande les prix; on sait que celui du premier, plus la moitié du prix des deux autres, fait 25 louis; le prix du deuxième, plus le tiers du prix du premier et du troisième, fait 26 louis; enfin le prix du troisième,

plus la moitié du prix des deux autres, fait 29 louis. On a  
 $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 25$ ,  $y + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z = 26$ ,  $z + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 29$ ,  
 d'où l'on tire  $x = 8$ ,  $y = 18$ ,  $z = 16$

III. *A*, *B* et *C* ont un certain nombre d'écus; *A* distribuant des siens à *B* et *C*, leur en donne autant qu'ils en avaient déjà; *B* double à son tour ceux qui restent à *A* et ceux que *C* a entre les mains; enfin *C* distribuant à *A* et *B*, double pareillement les nombres qu'ils se trouvent avoir; tout cela fait, chacun en a 16; on demande combien ils en avaient d'abord.  $x$ ,  $y$  et  $z$  designant les nombres d'écus respectifs de *A*, *B* et *C*, avant ces distributions, on trouve ces équ.

$$x - y - z = 4, \quad 3y - x - z = 8, \quad 7z - x - y = 16,$$

d'où l'on tire  $x = 26$ ,  $y = 14$ ,  $z = 8$ .

112 Il arrive quelquefois qu'une équation ne peut exister à moins qu'elle ne se partage en deux autres, ainsi  $x^2 + y^2 = 0$ , suppose  $x = 0$  et  $y = 0$ , puisque deux carrés étant positifs, l'un ne peut détruire l'autre, et rendre la somme nulle. De même  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ , donne  $x = 1$ , et  $y = 2$ ; et quoiqu'il n'y ait qu'une seule équ., c'est comme s'il y en avait deux. Il faut en dire autant de la question suivante, qui n'a qu'une seule condition. Trouver deux nombres tels, que si l'on ajoute 9 au carré de l'un et à 5 fois le carré de l'autre, le résultat soit le produit du double du second nombre, par 3 plus le double du premier. On a

$$5x^2 + y^2 + 9 = 2x(2y + 3),$$

qui revient à  $4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 - 6x + 9 = 0$ ,

ou  $(2x - y)^2 + (x - 3)^2 = 0$ ; donc  $2x - y = 0$ , et  $x - 3 = 0$ ; partant  $x = 3$ , et  $y = 6$ .

C'est par la même raison que l'équation  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  est absurde

113. Voici un cas bien remarquable dans lequel une équation se partage en deux.

Supposons que les élémens d'une question soient liés par l'équation  $A + a = B + \beta$ ; que plusieurs de ces élémens soient,

variables ensemble, et que l'équation doive subsister dans tous leurs états possibles de grandeur, qu'enfin quelques termes  $A, B$ , demeurent constants, tandis que les autres  $\alpha, \beta$ , seraient variables et susceptibles de décroître ensemble autant qu'on le veut; cette équation se partage en deux, l'une  $A = B$  entre les termes constants; l'autre  $\alpha = \beta$  entre les termes variables, laquelle aura lieu pour toutes les grandeurs que la question permet d'attribuer à la fois à  $\alpha$  et  $\beta$ . En effet, si l'on admet que les constantes  $A$  et  $B$  ne sont pas égales, leur différence étant  $K$ , ou  $A - B = \pm K$ , on en tire  $\beta - \alpha = \pm K$ , les variables  $\beta$  et  $\alpha$  conserveraient donc entre elles une différence fixe  $K$ , et ne seraient pas de nature à pouvoir être moindres que  $K$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

C'est ce principe qui constitue la MÉTHODE DES LIMITES, dont nous faisons un fréquent usage par la suite. Quand on peut faire approcher une grandeur variable  $A - \alpha$  d'une autre  $A$  qui est fixe, de manière à rendre leur différence  $\alpha$  moindre que toute grandeur donnée, sans cependant qu'elles puissent jamais devenir rigoureusement égales, la seconde  $A$  est dite LIMITE de la première  $A - \alpha$ . Au reste, chaque fois que nous appliquerons ce théorème, on fera bien de s'exercer à reproduire le raisonnement ci-dessus, afin de repandre sur les résultats la clarté convenable; nous exhortons les étudiants à se soumettre à ce conseil, dont ils reconnaîtront l'utilité. En voici deux applications, propres à montrer la marche du calcul et du raisonnement.

1. Soient  $\sqrt{a}$  et  $\sqrt{b}$  deux incommensurables,  $z$  et  $t$  leurs valeurs approchées,  $x$  et  $y$  les différences qui existent entre ces valeurs et les radicaux; on a  $z = \sqrt{a} - x$ ,  $t = \sqrt{b} - y$ ; or, les produits rationnels  $z \times t$  et  $t \times z$  sont égaux; donc  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \pm \alpha = \sqrt{b} \times \sqrt{a} \pm \beta$ , en représentant par  $\alpha$  et  $\beta$  tous les termes où  $x$  et  $y$  sont facteurs dans chaque membre. Observer que si l'on pousse davantage l'approximation, les erreurs  $y$  et  $x$  décroîtront, et cela autant qu'on voudra, sans que cette équ. cesse d'avoir lieu; les facteurs  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{b}$  demeurant invariables,  $\alpha$  et  $\beta$  décroîtront indéfiniment: donc l'équation se partage en deux,  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{b} \times \sqrt{a}$ , et  $\alpha = \beta$ , c'est-



a-t-on qu'on peut aussi bien intervertir l'ordre des facteurs irrationnels que celui des rationnels.

11. Soit demandée la valeur  $S$  de la fraction décimale périodique  $0,(54)$ , d'après la notation du n° 51. En ne prenant que deux fois la période, et représentant par  $k$  la valeur des fractions négligées, on a  $S - k = 0,5454$ , multiplions par 100, nous aurons  $100S - 100k = 54,54$ ; et retranchant,  $99S - 99k = 54 - \frac{54}{1000}$ . Mais si l'on eût pris trois ou quatre fois la période, ce dernier terme fût devenu  $\frac{54}{100^2}$ , ou  $\frac{54}{100^3}$ ; ainsi, l'on

voit qu'on peut faire décroître indéfiniment ce terme, en même temps que l'erreur  $k$ , en prenant la période un plus grand nombre de fois, on peut donc donner à l'éq. la forme  $99S - \alpha = 54 - \beta$ ; d'où l'on tire  $99S = 54$ , et  $S = \frac{54}{99}$ , comme on le sait déjà. Ou a en outre  $\alpha = \beta$ , quelque nombre de périodes qu'on ait considéré, en effet, si l'on prend la période deux fois, par ex.  $k = 0,0000(54)$ , d'où  $100^2k = 0,(54) = \frac{54}{100}$ , et  $99k = \frac{54}{1000}$ , ou  $\alpha = \beta$ .

Soit  $S = 0,(p)$ , la période  $p$  étant composée de  $n$  chiffres, on a  $10^n S = p,(p)$ ; et par le même raisonnement  $(10^n - 1)S = p$ , d'où  $S = \frac{P}{10^n - 1} = \frac{P}{999} \dots$ , comme n° 53, 3°.

114. Les formules d'élimination (B) présentent quelques particularités qu'il convient d'examiner. Tant que ces valeurs de  $x$  et  $y$  sont positives, la solution résulte de ces formules, et il n'y a ni doute, ni difficulté. Mais il peut en être autrement, ce qui conduit à trois cas d'exception de nos équ. (B).

1°  $x$  ou  $y$  peut être négatif; alors le problème, tel qu'il est proposé, est absurde, et on peut le rendre possible à l'aide d'une simple modification qu'on trouve en changeant cette inconnue de signe dans les équ. (A): le calcul réduit en effet la question à n'avoir qu'une seule inconnue, et l'on est ramené à ce qui a été dit (n° 107).

2°. Lorsque les formules (B) sont infinies, les coefficients ont des valeurs numériques telles, qu'il en résulte  $a'b - ab = 0$ , ou  $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ . Pour connaître alors la nature de la question

il faut introduire cette condition dans les équ. (A); mettons donc  $\frac{ab'}{b}$  pour  $a'$ , la seconde devient  $\frac{ab'}{b}x + b'y = c'$ ; donc pour que le cas présent ait lieu, il faut que les équ. proposées soient  $ax + by = c$ ,  $b'(ax + by) = bc'$ . Or, elles ne s'accordent entre elles qu'autant que  $b'c = bc'$ , ou  $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ . Cette relation peut être satisfaite, ou ne pas l'être; si elle n'a pas lieu, le problème est absurde, puisque les conditions de la question sont contradictoires: cette circonstance est annoncée par des valeurs de  $x$  et  $y$  infinies. Alors les coefficients forment une proportion  $a : a' :: b : b'$ , à laquelle le rapport des termes connus  $c$  et  $c'$  ne peut faire suite.

3°. Mais si, outre la relation qui rend le dénominateur nul, ou  $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ , on a encore  $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ , les deux équations (A) n'équivalent plus qu'à une seule, les deux conditions de la question rentrent l'une dans l'autre, et comme on n'a qu'une équation et deux inconnues, le problème est indéterminé (n° 117). Cela arrive quand les coefficients de l'équation forment trois rapports égaux entre eux,  $a : a' :: b : b' :: c : c'$ ; et attendu qu'on a aussi  $a'c = ac'$ , ce cas est mis en évidence par des valeurs de  $x$  et  $y$  qui ont la forme °.

A	d	B	C	k	D	D'	C'

Prenons pour exemple ce problème : deux courriers partent l'un de A, l'autre de B, et vont dans le même sens AC; le premier fait  $n$  kilomètres par heure, le second  $m$ , la distance initiale est  $AB = d$ ; cherchons à quel instant les courriers se trouveront à la distance  $CD = K$  l'un de l'autre. A parcourt la distance  $AC = x$  dans une durée qu'on trouve par la proportion  $m : 1 :: x : \frac{x}{m}$ ; de même  $\frac{x}{n}$  est le temps que B met à parcourir  $BD = y$ . Si les mobiles sont en même temps, l'un en C, l'autre en D, les fractions sont égales, d'où  $nx = my$ .

Mais d'un autre côté  $AD = x + k = y + d$  : donc l'élimination donne

$$x = \frac{m(d-k)}{m-n}, y = \frac{n(d-k)}{m-n}.$$

C'est ce qui arrive dans le nombre d'heures  $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{d-k}{m-n}$ .

En faisant  $k = 0$ , on a le lieu et l'instant de la rencontre des deux courriers.

Mais les mobiles seront encore distans de  $k$ , après que  $A$  aura dépassé  $B$  : alors ils auront parcouru l'un  $AC = x$ , l'autre  $BD = y$ , et on aura  $x - k = y + d$  ; il suffit donc de changer le signe de  $k$  dans nos équ. C'est une seconde solution du problème.

Pour donner à cette analyse plus de généralité, il faut supposer que les courriers sont en route depuis quelque temps, et que  $A$  et  $B$  sont des points où ils se trouvent ensemble. Et si la valeur de  $y$  est négative, comme cela arrive quand  $m < n$  et  $d > k$ , cela annonce que le lieu du 2<sup>e</sup> courrier est situé à gauche de  $B$ , quand sa distance au 1<sup>er</sup> est  $= k$  ; l'instant est antérieur à l'arrivée en  $B$ .

Quand les courriers marchent en sens contraire, il suffira de prendre  $n$  et  $y$  négatifs, ainsi qu'on peut s'en assurer directement. Voyez ce qui sera dit ci-après sur l'emploi des signes négatifs en géométrie.

Si  $m = n$ ,  $x$  et  $y$  sont infinis, et le problème est absurde : ce qui vient de ce que les courriers, ayant la même vitesse, ne peuvent satisfaire à la condition prescrite. Cependant si  $d = k$ ,  $x$  et  $y$  sont  $\frac{0}{0}$ , et il y a une infinité de points de rencontre ; en effet les mobiles partent du même point sans que leur distance change.

### *Des Inégalités.*

115. Les expressions où entre le signe  $>$  pour marquer quelle est la plus grande de deux quantités, sont des *inégalités*. La différence demeurant la même lorsqu'on y ajoute ou qu'on en ôte le même nombre, on peut, sans troubler une inégalité,

ajouter aux deux membres, ou en ôter des quantités égales, et par conséquent les soumettre aux mêmes calculs que les équations (n° 105), c'est-à-dire en multiplier ou diviser tous les termes par un même nombre, et transposer quelque terme en changeant son signe. Soit  $3x - 7 > x + 11$ ; ajoutons 7 aux deux membres, puis retranchons-en  $x$ , nous avons  $3x - x > 11 + 7$ , ou  $2x > 18$ ; d'où  $x > 9$ . Cette question, Trouver un nombre dont le triple, diminué de 7, donne un excès qui surpasse ce nombre plus 11, a une infinité de solutions, puisque toute quantité  $> 9$  y satisfait.

Plusieurs inégalités, renfermant  $x$ , donnent chacune une limite de cette inconnue; or, 1°. si ces limites sont dans le même sens, comme  $x > 9$  et  $x > 7$ , alors il y a une des inégalités qui dispense d'avoir égard aux autres, 2°. si les limites sont dans des sens opposés, comme  $x > 9$  et  $x < 15$ , alors on ne peut prendre pour  $x$  que les valeurs intermédiaires. Il se peut même que ces limites s'excluent mutuellement, comme  $x > 4$  et  $x < 3$ , alors le problème est absurde, et renferme des conditions contradictoires.

Quel est le nombre, plus grand que 15, dont le triple, plus 1, est moindre que le double plus 20; et tel en outre que, diminué de 1 et augmenté de 3, le quotient de cette différence par cette somme surpasse  $\frac{1}{3}$ ? Ces conditions s'écrivent ainsi :

$$x > 15, \quad 3x + 1 < 2x + 20, \quad \frac{x-1}{x+3} > \frac{1}{3}.$$

On en tire  $x > 15$ ,  $x < 19$  et  $x > 17$ . Il est clair que le nombre devant être compris entre 17 et 19, la 1<sup>re</sup> condition donnée est inutile; et l'on peut prendre pour  $x$ , 17 $\frac{1}{2}$ , 17 $\frac{3}{4}$ , ... et un nombre infini d'autres valeurs. Mais si  $x$  doit être entier, le problème ne comporte que cette solution  $x = 18$ .

Quand on a  $a < b$  et  $a' < b'$ , on en tire visiblement

$$a + a' < b + b', \quad a - b' < b - a', \quad aa' < bb',$$

$$\frac{a}{b} < \frac{b}{a}, \quad a^2 < b^2, \quad \sqrt{a} < \sqrt{b},$$

donc, on peut ajouter, multiplier membre à membre, deux iné-



galités dont le signe est dans la même sens ; former les puissances , extraire les racines , en conservant les mêmes signes d'inégalité : on peut soustraire ou diviser membre à membre deux inégalités dont les signes sont inverses , en conservant le signe de l'inégalité qui a fourni les dividendes.

L'expression  $a$  non  $> b$  , qui désigne que  $a$  ne peut être plus grand que  $b$  , s'écrit souvent ainsi  $a \leq b$  ; elle est soumise aux mêmes calculs que les inégalités simples. Par exemple , quel est le nombre dont le triple diminue de 2 ne peut être moindre que 7 , et dont le décuple moins 1 , ne peut surpasser 11 plus 6 fois ce nombre ? Ces conditions s'écrivent ainsi :

$$3x - 2 \leq 7, \quad 10x - 1 \leq 11 + 6x,$$

d'où  $3x \leq 7 + 2, \quad 10x - 6x \leq 11 + 1 :$

ainsi  $x \leq$  ou  $> 3$  , et  $x \leq$  ou  $< 3$  , ou plutôt  $x = 3$ .

116. Nous terminerons par une remarque importante. Faisons varier  $x$  dans  $a - x$ . À mesure que  $x$  croît pour s'approcher de  $a$  ,  $a - x$  , qui est positif , diminue , et devient enfin nul lorsque  $x = a$  : si  $x$  continue de croître ,  $a - x$  devient négatif. Nous exprimerons ces circonstances en écrivant  $a - x > 0$  , tant que  $a - x$  est positif ; et  $a - x < 0$  , dès que  $x$  surpasse  $a$ . Ce n'est pas qu'en effet il puisse y avoir des quantités moindres que zéro ; mais il est visible que si l'on convient qu'on traitera à l'avenir ces inégalités à la manière des équations , l'une donnera  $a > x$  , et l'autre  $a < x$  ; et ce ne sera qu'une façon d'écrire que  $a - x$  est positif dans un cas , et est négatif dans l'autre. Nous regarderons donc les quantités négatives comme moindres que zéro , et les positives comme plus grandes que zéro ; ce qui n'est en effet qu'une convention commode pour faciliter les calculs.

Comme  $a - x > 0$  donne  $-x > -a$  , et  $a > x$  , on voit qu'on n'est pas en droit de changer les signes de tous les termes d'une inégalité , à moins qu'on ne change aussi  $>$  en  $<$  , ou re-



reciproquement; on ne peut non plus multiplier une inégalité par une valeur négative, sans le même changement; ce qui établit, dans les calculs, une différence importante entre le mécanisme propre aux inégalités et celui qui convient aux équations: 1, 2, 3... sont des quantités croissantes; et  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ ... sont décroissantes; on a  $4 < 5$  et  $-4 > -5$ .

### *Des Problèmes indéterminés.*

117. Lorsqu'on n'a pas un nombre égal d'équations et d'inconnues, il peut arriver deux cas.

1<sup>er</sup> cas. *S'il y a plus d'inconnues que d'équ., le problème est indéterminé*, puisqu'on peut disposer arbitrairement de quelques inconnues, afin qu'il n'en reste plus qu'un nombre égal à celui des équ.: l'élimination fait alors connaître ces dernières inconnues. Les valeurs qui satisfont aux équ., ou au problème dont ces équ. expriment les conditions, sont donc en nombre infini. Cherchons, par exemple, deux nombres  $x$  et  $z$ , dont la somme soit 70, il faudra trouver deux quantités qui satisfassent à l'équation unique  $x + z = 70$ ; d'où  $x = 70 - z$ . On voit que  $x$  ne peut être connu qu'autant que  $z$  est donné; et si l'on met tour à tour 1, 2, 3, ... pour  $z$ , on trouvera  $x = 69, 68, 66, \dots$ ; donc 1 et 69, 2 et 68, 3 et 66, ... remplissent la condition exigée, ainsi qu'une infinité de nombres tant entiers que fractionnaires.

Soient demandés trois nombres  $x, y, z$ , dont la somme soit 105, et dont les différences deux à deux soient égales: on a  $x + y + z = 105$ ,  $x - y = y - z$ , c'est-à-dire trois inconnues et seulement deux équ. Ce cas revient au précédent; car, en retranchant ces équ. pour en éliminer  $x$ , il vient  $y = 35$ , d'où  $x + z = 70$ . On fera donc  $z$  ou  $x$  égal à telle grandeur qu'on voudra; l'autre inconnue s'en déduira, et ces nombres, concurremment avec  $y = 35$ , seront des solutions de la question.

Soit encore l'équation  $x^2 - ax = y^2 - ay$ ; on en tire

$x^2 - y^2 + ay - ax = 0$ ; et comme  $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ , il vient  $(x+y)(x-y) - a(x-y) = 0$ , ou. ....  
 $(x-y)(x+y-a) = 0$ . Ce produit ne peut être nul, à moins que l'un des facteurs ne le soit; on a donc, à volonté, l'une des équ.  $x = y$  ou  $x = a - y$ . En attribuant à  $y$  toutes les valeurs possibles, il en résultera des valeurs de  $x$  qui seules satisfont au problème; il suffit que les deux inconnues soient égales, ou bien que leur somme soit  $= a$ , ce qui arrive d'une infinité de manières.

La *Règle d'alliage* peut rentrer dans cette théorie.

1°. Supposons qu'on mêle ensemble deux substances qui n'éprouvent pas d'action chimique; soient  $p$  et  $q$  les prix de l'unité de mesure pour chacune; le prix total du mélange est  $px + qy$ , en désignant par  $x$  et  $y$  les nombres d'unités mélangées. Mais le tout est composé de  $x + y$  unités; donc le prix de chacune est

$$z = \frac{px + qy}{x + y} \dots (F).$$

Ainsi 8 bouteilles de vin à 15<sup>f</sup> le litre, et 12 à 10<sup>f</sup>, font 20 bouteilles, dont le prix est  $8 \times 15 + 12 \times 10 = 240$ ; donc le prix de chacune est  $\frac{240}{20}$ , ou 12<sup>f</sup>.

On a un lingot d'or formé de 4 kil. à 0,95 de fin (\*), et de 5 kil. à 0,86; quel est le titre du mélange? La formule ci-dessus

$$\text{donne } z = \frac{4 \times 0,95 + 5 \times 0,86}{4 + 5} = 0,9.$$

(\*) Lorsque l'or ou l'argent contiennent 0,1 d'alliage, et que le reste est pur, on dit que le métal est à 0,9 de fin. Autrefois le degré de pureté s'estimait différemment: on partageait par la pensée le lingot d'or en 24 parties, qu'on nommait karats, de sorte que l'or à 21 karats contenait 3 parties d'alliage et 21 d'or pur. Le karat se divisait en 32 parties ou grains, ainsi l'on désignait par 18 karats 20 grains, 18 parties  $\frac{20}{32}$  d'or pur, et 5  $\frac{12}{32}$  d'alliage. L'argent se divisait en 12 parties ou deniers, chacune de 24 grains, ainsi un lingot d'argent à 10 deniers 20 grains contenait 10 parties  $\frac{20}{24}$  de métal pur et  $\frac{1}{6}$  d'alliage.

2°. Réciproquement, si l'on demande quelle doit être la composition du mélange, la valeur moyenne étant donnée, on cherche les quantités  $x$  et  $y$ , connaissant les prix  $p$ ,  $q$  et  $z$ ; alors l'équ.  $F$  contient deux inconnues, et le problème est indéterminé. On a  $x = \left(\frac{z-q}{p-q}\right)y$ ; ainsi l'on y satisfait en prenant

$$x = z - q, \quad y = p - z;$$

$z$  est d'ailleurs intermédiaire entre  $p$  et  $q$ . On pourra, outre ces valeurs, en trouver une infinité d'autres, en les multipliant ou divisant par un même nombre quelconque : on aura par là toutes les solutions entières de la question, si l'on veut que ce facteur, et  $z$ ,  $p$  et  $q$  soient entiers (n° 118).

Un boulanger, par exemple, veut faire du pain qui revienne à 8<sup>f</sup> le kilogramme; combien doit il mêler de farine de blé à 10<sup>f</sup>, et de seigle à 7<sup>f</sup> le kilogramme? Après avoir écrit ces 3 nombres, comme on le voit ci-contre, on mettra  $8 - 7$ , ou 1, à côté de 10; puis  $10 - 8$ , ou 2, près de 7. Ainsi 1 kilogramme de farine de blé sur 2 de seigle, répondent au problème. On peut aussi prendre 2 sur 4, ou 3 sur 6, etc.

Prix moyen 8	{	10.	1.	Blé
		7.	2.	Seigle

Si l'on donnait une seconde condition pour déterminer le problème, on la traduirait algébriquement, et l'on éliminerait  $x$  et  $y$  entre l'équ. ( $F$ ) et cette dernière. Ainsi, lorsque la quantité  $x + y$  du mélange est donnée  $= m$ , alors on a

$$x + y = m, \text{ et } px + qy = zm;$$

d'où 
$$x = \frac{m}{p-q} (z-q), \quad y = \frac{m}{p-q} (p-z).$$

Après avoir obtenu les valeurs ci-dessus, on les multipliera donc par  $\frac{m}{p-q}$ . Dans notre exemple, si l'on veut que le mélange des farines pèse 21 kil., on multipliera les résultats obtenus 1 et 2, par  $\frac{21}{10-7} = 7$ ; de sorte que 7 kil. de farine de blé à 10<sup>f</sup>,

mêlés à 14 de seigle à 7<sup>s</sup>, forment 21 kil. de farine à 8<sup>s</sup>

De même soit demandé de former 7,54 kil. d'argent à 0,9 de fin avec de l'argent à 0,97

et 0,84. L'opération prouve qu'il faut 3<sup>s</sup>,48 de la première, et 4<sup>s</sup>,06 de la seconde espèce.

$$0,9 \left\{ \begin{array}{l} 0,97 \dots 0,06 \times \frac{7,54}{0,13} = 3,48 \\ 0,84 \dots 0,07 \times \frac{7,54}{0,13} = 4,06 \end{array} \right.$$

On appliquera facilement cette théorie au cas où l'on voudrait mêler ensemble plus de deux substances.

2<sup>e</sup> CAS. Si l'on a, au contraire, plus d'équ. que d'inconnues, le problème est plus que déterminé, c'est-à-dire que si l'on élimine toutes les inconnues, il restera, entre les données, un certain nombre d'équ. auxquelles elles devront satisfaire, et qu'on nomme, pour cette raison, *équations de condition*. si elles ne sont pas satisfaites, la question est absurde, et si elles le sont, plusieurs conditions rentrent dans les autres; les conditions sont en nombre égal à celui des inconnues, et sont exprimées par autant d'équ. distinctes, auxquelles les proposées se réduisent.

Cherchons deux nombres  $x$  et  $y$ , dont la somme soit  $s$ , la différence  $d$  et le produit  $p$ : ou  $x + y = s$ ,  $x - y = d$  et  $xy = p$ . Les deux premières équations donnent (n° 106, III)  $x = \frac{1}{2}(s + d)$ ,  $y = \frac{1}{2}(s - d)$ ; substituant dans la troisième, on trouve  $4p = s^2 - d^2$ . Si les données  $s$ ,  $d$  et  $p$  ne satisfont pas à cette relation, le problème est impossible; et si elle subsiste, l'une des équ. données est inutile, comme exprimant une condition qui a lieu d'elle-même, et est comprise dans les deux autres.

Quelle est la fraction qui, lorsqu'on ajoute  $m$  à son numérateur, devient  $\frac{a}{b}$ , et qui est  $\frac{a'}{b'}$  lorsqu'on ajoute  $m'$  à son dénominateur? En désignant par  $x$  et  $y$  les deux termes, on a

$$\frac{x + m}{y} = \frac{a}{b}, \quad \frac{x}{y + m'} = \frac{a'}{b'}.$$

L'élimination donne

$$(ab' - a'b)x = a'(bm + am'), (ab' - a'b)y = b(b'm + a'm');$$

mais  $x$  et  $y$  sont entiers; donc, ou  $ab' - a'b = \pm 1$ , ou bien ce binôme divise les seconds membres. On a donc une condition, sans laquelle ce problème est impossible, quoiqu'on ait eu autant d'équ. que d'inconnues.

118. Cherchons tous les systèmes de valeurs *entières* de  $x$  et  $y$  qui satisfont à l'équ. indéterminée

$$ax + by = A \dots (1),$$

$a, b, A$ , étant des nombres donnés, positifs ou négatifs, et qu'on peut toujours rendre entiers. Du reste,  $a$  et  $b$  doivent être *premiers entre eux*; car s'ils avaient un facteur commun  $d$ , en di-

visant tout par  $d$ , on aurait  $\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{A}{d}$ ; ainsi le second membre devrait être entier, puisque le premier l'est; le problème est donc absurde quand  $A$  n'a pas aussi  $d$  pour diviseur; et s'il l'a, on peut supprimer ce facteur dans tous les termes.

Soit  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$  une solution de l'équ. (1), ou  $a\alpha + b\beta = A$ ; retranchant de l'équ. (1), on trouve  $a(x - \alpha) = -b(y - \beta)$ , et comme  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux,  $y - \beta$  doit être un multiple de  $a$  (n° 25), tel que  $at$ ; d'où

$$x = \alpha - bt, \quad y = \beta + at \dots (2).$$

En substituant ces valeurs dans l'équ. (1), il est visible qu'elles y satisfont, quel que soit le nombre entier  $t$ , positif ou négatif. Mais ces expressions sont les seules qui jouissent de cette propriété; car soit  $x = \alpha'$ ,  $y = \beta'$ , une autre solution, ou  $a\alpha' + b\beta' = A$ ; en retranchant de  $a\alpha + b\beta = A$ , on a  $a(\alpha' - \alpha) = -b(\beta' - \beta)$ ; donc  $\beta' - \beta$  est un multiple  $at$  de  $a$ ,  $\beta' = \beta + at$ ,  $\alpha' = \alpha - bt$ , valeurs comprises dans la forme (2).

Il suit de là que si l'on avait une des solutions ( $\alpha$  et  $\beta$ ), on connaîtrait toutes les autres, en faisant  $t = 0, 1, 2, \dots$ ; et comme les résultats  $\alpha, \alpha - b, \alpha - 2b, \dots, \beta, \beta + a, \beta + 2a, \dots$ , sont des équidifférences, on voit que toutes les valeurs de  $x$  et



de  $y$  forment des progressions arithmétiques, dont les coefficients réciproques  $b$  et  $a$  sont les raisons, l'un pris avec un signe contraire (elles sont croissantes toutes deux, si  $a$  et  $b$  ont des signes différens, l'une est croissante et l'autre décroissante, dans le cas contraire).

119. La question est ramenée à trouver une solution  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ . Soit  $a > b$  : résolvant l'équ. (1) par rapport à  $y$ , et extrayant les entiers contenus dans la fraction, on a

$$y = \frac{A - ax}{b} = k - lx + \frac{B - cx}{b},$$

$k$  et  $l$  sont les quotiens,  $B$  et  $c$  les restes, de  $A$  et  $a$  divisés par  $b$ . Le problème consiste à trouver les valeurs de  $x$  qui rendent  $B - cx$  divisible par  $b$ . Or, si  $c = 1$ , en faisant

$$\frac{B - x}{b} = \text{entier } z, \text{ on a } x = B - bz, \text{ et toute valeur entière}$$

de  $z$  rendra  $x$  et  $y$  entiers; le problème sera donc résolu. Mais

$$\text{quand } c > 1, \text{ on posera } \frac{B - cx}{b} = \text{entier } z, \text{ ou } bz + cx = B,$$

et il s'agira de résoudre en nombres entiers cette équ. où  $c < b$ . On opérera donc comme ci-dessus, c'est-à-dire qu'on résoudra l'équ. par rapport à  $x$ , on extraira les entiers, et il viendra

$$x = \frac{B - bz}{c} = k' - lz + \frac{C - dz}{c};$$

$k'$  et  $l'$  sont les quotiens, et  $C$ ,  $d$ , les restes de la division de  $B$  et  $b$  par  $c$ , il faudra que cette dernière fraction devienne un nombre entier  $u$ ; or si  $d = 1$ , on aura  $C - z = cu$ ,  $z = C - cu$ , et toute valeur entière de  $u$  rendra  $z$  entier, et par suite aussi  $x$  et  $y$ . Mais quand  $d > 1$ , on pose

$$\frac{C - dz}{c} = u, \quad z = \frac{C - cu}{d}, \text{ etc.}$$

Les coefficients des inconnues successives  $z, u, v, \dots$  sont visiblement les restes qu'on obtient par la méthode (n° 23) du commun diviseur entre  $a$  et  $b$ ; et comme ces nombres sont

premiers entre eux, on est assuré d'arriver, en dernière analyse, à un coefficient  $= 1$ , qui donnera une relation de la forme  $v + gs = G$ , entre les entiers  $v$  et  $s$ , d'où  $v = G - gs$ . Ainsi tout nombre entier pris pour valeur de  $s$  rendra  $v$  entier, et par suite  $u, z, x$  et  $y$  : on obtiendra donc une solution du problème, les équ. (2) seront alors applicables.

Un exemple éclaircira ceci. L'équ.  $8x - 27y = 7$  donne

$$x = \frac{7 + 27y}{8} = 3y + \frac{3y + 7}{8};$$

posons  $\frac{3y + 7}{8} = z$ , d'où  $y = \frac{8z - 7}{3} = 2z - 2 + \frac{2z - 1}{3}$ ;

faisons  $\frac{2z - 1}{3} = u$ , d'où  $z = \frac{3u + 1}{2} = u + \frac{u + 1}{2}$ ; enfin,

égalant cette fraction à  $v$ , il vient  $u = 2v - 1$ . Faisons, par exemple,  $v = 1$ , nous aurons  $u = 1, z = 2, y = 3, x = 11$ ; donc les formules (2) deviennent

$$x = 11 + 27t, \quad y = 3 + 8t.$$

Si l'on eût pris pour  $v$  toute autre valeur entière, on serait parvenu aux mêmes valeurs, quoique différentes en apparence. Soit  $v = -3$ , il vient  $u = -7, z = -10, y = -29, x = -97$ ; d'où  $x = -97 + 27t, y = -29 + 8t$  : mais on peut mettre  $t + 4$  au lieu de  $t$ , ce qui ramène aux valeurs ci-dessus. En faisant  $t = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$  on trouve des équidifférences croissantes, infinies dans les deux sens, dont les raisons sont 27 et 8, et dont les termes, correspondans deux à deux, sont autant de solutions de la question, et les seules qu'elle puisse comporter.

$$x = \dots - 43, -16, 11, 38, 65, 92 \dots$$

$$y = \dots - 13, -5, 3, 11, 19, 27 \dots$$

120. Récapitulons tous les calculs, omettant les raisonnemens sur lesquels ils sont fondés. Nous avons trouvé les frac-

tions successives, qui doivent se réduire à des nombres entiers :

$$y = \frac{A - ax}{b}, \quad x = \frac{B - bz}{c}, \quad z = \frac{C - cz}{d}, \quad u = \frac{D - du}{e} \dots (M)$$

les facteurs  $c, d, e, \dots$  sont des restes de divisions, ainsi que  $B, C, D, \dots$ . Nous donnerons à ces quantités la disposition suivante, et nous en tirerons un *algorithme*, ou procédé de calcul rapide, qui conduira aux valeurs entières des inconnues  $y, x, z, u, v, \dots$

$$\left. \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & \text{etc.} \dots & 1 \\ A & B & C & D & E & F & \text{etc.} \dots & 0 & \\ y & x & z & u & v & \dots & \text{etc.} \dots & 0 & \end{array} \right\} (N)$$

La 1<sup>re</sup> ligne est formée des diviseurs, dividendes et restes de l'opération du commun diviseur (n° 23) entre  $a$  et  $b$ , conduisant nécessairement à un dernier terme  $\equiv 1$ . La 2<sup>e</sup> ligne se compose ainsi qu'il suit : après avoir écrit le second membre  $A$  de la proposée sous  $a$ , on divise  $A$  par  $b$ , et on écrit le reste  $B$  sous  $b$  : puis on divise  $B$  par  $c$ , et on écrit  $C$  sous  $c$  ; on divise  $C$  par  $d$ , et ainsi de suite, les diviseurs étant successivement les mêmes que dans la 1<sup>re</sup> ligne. On ne tient aucun compte des quotiens, parce qu'ils sont sans usage.

Quant à la 3<sup>e</sup> ligne, elle est composée des valeurs entières  $y, x, z, \dots$  qu'on calcule sur le type des équ. (M), en commençant par la droite. Ainsi pour trouver  $z$ , il faut avoir d'abord calculé  $u$ , puis chercher le quotient entier  $\frac{C - cu}{d}$ , qu'on écrira sous  $C$ . Toutes ces fractions de même forme doivent se réduire à des nombres entiers, en ayant soin d'avoir égard aux signes des produits, des différences et des restes.

On écrit la valeur  $\beta$  de  $y$  sous le coefficient  $a$  de  $x$ , et celle  $\alpha$  de  $x$  sous celui  $b$  de  $y$ , et l'on obtient ainsi une solution de l'équ. (1) ; enfin on complète ces valeurs par des multiples  $-bt$  et  $at$ , conformément aux équ. (2).

Il faut observer que le dernier diviseur de la 1<sup>re</sup> ligne étant 1, le reste qui lui correspond au-dessous est zéro, nombre ter-

anna) de la 2<sup>e</sup> ligne, et que par conséquent le reste précédent est la valeur du dernier quotient entier.

Soit par ex. l'équ.  $328x + 229y = 1741$ ;

328	229	99	31	6	1
1741	138	39	8	2	0
105	—68	30	—9	2	0
$y$	$x$	$z$	$u$	$v$ .....	

On cherche le commun diviseur entre les coefficients 328 et 229, et les restes successifs donnent les nombres de la 1<sup>re</sup> ligne. On écrit le 2<sup>e</sup> membre 1741 sous 328, on divise par 229, et l'on écrit le reste 138 sous ce diviseur : on divise 138 par 99, et l'on écrit le reste 39 sous 99; on divise 39 par 31, et on écrit le reste 8 sous 31, etc. Le reste 2 est la valeur de la dernière inconnue  $v$ ; puis on dit  $2 \times 31 = 62$ , qui retranche de 8, donne  $-54$ ; divisant  $-54$  par 6, le quotient  $-9$  est la valeur de  $u$ ;  $-9 \times 99 = -891$ , ôtant de 39, le reste est  $+930$ ; divisant par 31, le quotient est 30, valeur de  $z$ ; et ainsi des autres. On a ainsi  $y = 105$ ,  $x = -68$ , d'où

$$y = 105 - 328t, \quad x = -68 + 229t.$$

Pour l'équ.  $370x + 153y = 2001$ , on a

370	153	64	25	14	11	3	2	1
2001	12	12	12	12	1	1	1	0
—103	+48	—20	+8	—4	+4	—1	+1	0
$y$	$x$	$z$	$v$	$u$ .....				

Donc  $y = -103 + 370t$ ,  $x = +48 - 153t$ .

Ces calculs supposent que la proposée a tous ses termes positifs : s'il en était autrement, on prendrait en signe contraire la valeur de l'inconnue dont le coefficient a le signe  $-$ ; et on aurait la solution de l'équ.  $ax - by = A$ , ou  $-ax + by = A$ ,  $A$  étant positif. Par exemple, l'équ.  $370x - 153y = 2001$ , donne

$$y = 103 + 370t, \quad x = 48 + 153t.$$

Réolvons encore l'équ.  $29x - 47y = 112$

47	29	18	11	7	4	3	1
112	25	7	7	0	0	0	0
-1	+3	-1	+1	0	0	0	0
$x$	$y$	$z$	$u$	$v$	.....		

La dernière inconnue  $= 0$ , il en faut dire autant des précédentes, jusqu'à  $v = \frac{7}{7} = +1$ , etc.; ainsi changeant le signe de  $y$  (à cause de  $-47y$ ), on a  $x = -1 + 47t$ ,  $y = -3 + 29t$ .

121. La proposée est quelquefois susceptible de simplifications.

1°. S'il y a un facteur commun  $m$  entre  $a$  et  $A$ , en divisant l'équ. (1) par  $m$ , on a  $\frac{ax}{m} + \frac{by}{m} = \frac{A}{m}$ ;  $\frac{by}{m}$  doit être entier, puisque les autres termes le sont; ainsi  $y$  est multiple de  $m$ . Posons  $y = my'$ , il vient, en divisant la proposée par  $m$ , une équ. plus simple.

Soit  $1200x - 67y = 1000$ ; on fera  $y = 200y'$ , et divisant l'équ. par 200, on aura  $6x - 67y' = 5$ ; on en tire aisément  $y' = -5$ ,  $y = -1000$ ,  $x = -55$ ; ainsi

$$y = -1000 + 1200t, \quad x = -55 + 67t.$$

Pour l'équ.  $44x - 35y = 165$ , comme 44 et 165 ont le facteur 11, et que 35 et 165 sont multiples de 5, on fera  $y = 11y'$ ,  $x = 5x'$ , d'où  $4x' - 7y' = 3$ : on trouve de suite  $y' = -1$ ,  $x' = -1$ , puis  $y = -11 + 44t$ ,  $x = -5 + 35t$ .

2°. Observez que dans toute équidifférence  $A$ ,  $A + b$ ,  $A + 2b$ , ... si l'on divise les  $a$  premiers termes par  $a$ , tous les restes sont différents, quand  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux; en effet, si deux termes pouvaient conduire au même reste, leur différence serait divisible par  $a$  (n° 16), ce qui est absurde, puisque cette différence est de la forme  $kb$ ,  $k$  étant  $< a$ . Concluons de là que ces  $a$  restes inégaux accomplissent tous les nombres  $0, 1, 2, 3, \dots, (a-1)$ , mais rangés dans un ordre différent: ainsi, l'un de ces dividendes



$A + lb$  donne zéro pour reste, ou est multiple de  $a$ ; et  $y = l$  rend  $\frac{A + by}{a}$  un nombre entier. Or, il arrive souvent qu'en substituant  $0, 1, 2, 3, \dots$  pour  $y$ , on découvre la valeur  $l < a$  qui satisfait à cette condition. Ainsi, pour que (premier exemple)  $\frac{3y + 7}{8}$  soit entier, on fait  $y = 0, 1, 2, 3, \dots$  les restes de  $3y + 7$  divisé par 8 sont 7, 2, 5, 0, ... Chaque terme de cette série se forme en ajoutant 3 au reste précédent, et supprimant 8 de la somme lorsqu'elle surpasse 8. Il est visible que  $y = 3$  est la valeur cherchée. Au reste, on ne peut regarder ceci que comme un tâtonnement souvent plus long que la méthode générale.

Pour rendre entier  $y = \frac{35 + 19x}{12} = 2 + x + \frac{11 + 7x}{12}$ , faisons  $x = 0, 1, 2, \dots$ ; cette dernière fraction conduit aux restes 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5, 0, ... en ajoutant sans cesse 7, et ôtant 12 lorsque cela se peut; ainsi  $x = 7$  donne le quotient exact  $y = 14$ ; d'où  $y = 14 + 19t$ ,  $x = 7 + 12t$ .

122. Il arrive quelquefois que la question ne peut admettre que des solutions positives; alors on ne doit plus prendre dans les formules (2) toutes les valeurs entières pour  $t$ ; mais on posera  $\alpha - bt > 0$ ,  $\beta + at > 0$ , d'après ce qu'on a dit p. 170; ces inégalités donneront les limites de  $t$ .

1°. Si ces limites sont dans le même sens, elles n'en donnent qu'une, et la question a une infinité de solutions croissantes ensemble; dans ce cas,  $a$  et  $b$  sont de signes contraires dans la proposée, car sans cela  $ax + by$  ne pourrait constamment être  $= c$ . Dans le 1<sup>er</sup> problème on a  $t > -\frac{11}{27}$  et  $> -\frac{3}{8}$ ; ainsi, on peut prendre  $t = 0, 1, 2, \dots$  mais on ne peut donner à  $t$  aucune valeur négative. Dans le 2<sup>e</sup> problème p. 180, on a  $t =$  ou  $> 0$ , savoir,  $t = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

2°. Si ces limites sont, l'une par excès, l'autre par défaut, on trouve les valeurs intermédiaires que  $t$  peut recevoir, et il n'y a qu'un nombre fini de solutions:  $x$  croît quand  $y$  décroît, ce qui exige que  $a$  et  $b$  aient mêmes signes. Il pourrait même se

faire que ces limites s'exclussent mutuellement, et la question serait impossible en nombres entiers et positifs. Dans le 1<sup>er</sup> exemple, p. 180, on a  $t < \frac{103}{178}$  et  $> \frac{51}{178}$ ; ainsi il n'y a aucune solution positive.

Voici encore diverses applications de cette théorie :

Partager 117 en deux parties, dont l'une soit un multiple de 19 et l'autre de 7; on a  $19x + 7y = 117$ ; d'où  $y = \frac{117 - 19x}{7}$ ,

donc  $\frac{5 - 5x}{7}$ , ou  $\frac{5(1-x)}{7}$  est un nombre entier. Faisons  $x = 1$ , d'où  $y = 14$ , puis  $x = 1 - 7t$  et  $y = 14 + 19t$ .

Si l'on veut que les parties de 117 soient positives, il faut en outre qu'on ait  $1 - 7t > 0$  et  $14 + 19t > 0$ ; d'où  $t < \frac{1}{7}$  et  $> -\frac{14}{19}$ . On ne peut alors satisfaire au problème que d'une manière;  $t = 0$  donne  $x = 1$  et  $y = 14$ ; de sorte que 19 et 98 sont les parties demandées.

Payer 2000 fr. en vases de deux espèces, les uns à 9 fr., les autres à 13 fr. On trouve  $9x + 13y = 2000$ , d'où  $x = \frac{2000 - 13y}{9}$ ,

il faut rendre  $\frac{2 - 4y}{9}$ , ou  $\frac{1 - 2y}{9}$  un nombre entier: ainsi  $y = -4$ , d'où  $x = 228$ ; puis enfin

$$x = 228 - 13t, \quad y = -4 + 9t.$$

Les valeurs négatives de  $y$  indiquent combien on reçoit de vases de la 2<sup>e</sup> espèce, en échange de ceux de la 1<sup>re</sup>, pour acquitter 2000 fr. dus. Mais si l'on veut que  $x$  et  $y$  soient positifs, il faut que l'on ait  $228 - 13t > 0$  et  $-4 + 9t > 0$ ; d'où  $t < 18$  et  $> 0$ . En faisant  $t = 1, 2, 3, \dots, 17$ , on a, pour les 17 solutions de la question,  $x = 215, 202, 189, \dots, 7$ ;  $y = 5, 14, 23, \dots, 149$ . Ainsi, on peut donner 215 vases à 9 fr., et 5 à 13 fr.; ou, etc.

Un négociant a change des roubles estimés 4 fr. contre des francs de 9 fr., il a donc 15 fr. en sus, on demande combien de sortes de marches il a pu faire. On a  $15 = 4x + 9y$ ; d'où

$$x = \frac{9y - 15}{4}; \text{ ainsi, } \frac{y - 3}{4} = t; \text{ d'où } y = 4t + 3 \text{ et } x = 9t + 3.$$

Lorsqu'on veut que  $x$  et  $y$  soient positifs, les limites de  $t$  coïncident, et l'on a  $t > -1$ , faisant  $t = 0, 1, 2, \dots$  on a un nombre infini de solutions renfermées dans les séries  $x = 3, 12, 21, \dots$ ,  $y = 3, 7, 11, \dots$ ; on a donc pu changer 3 roubles contre 3 ducats, ou 12 roubles contre 7 ducats, ou etc.

L'équ.  $6x - 12y = 7$  ne peut être résolue en nombres entiers, parce que 7 n'a pas le facteur 6, commun à 6 et 12.

Il en est évidemment de même pour  $2x + 3y = -10$ , quand  $x$  et  $y$  doivent être positifs : au reste, le calcul le prouve, puisqu'il donne  $x = 3t - 5$  et  $y = -2t$ ; et les limites  $t > \frac{5}{3}$  et  $< 0$  sont incompatibles.

Partager en deux la fraction  $\frac{n}{d}$ , dont le dénominateur  $d = ab$ , est le produit de deux nombres  $a$  et  $b$  premiers entre eux, pour cela on fera  $\frac{n}{d} = \frac{x}{b} + \frac{y}{a}$ , et l'on devra résoudre en nombres entiers l'équation  $ax + by = n$ .

Ainsi, pour  $\frac{58}{77}$ , comme  $77 = 11 \times 7$ , on a  $11x + 7y = 58$ , d'où  $x = 7t - 3$ ,  $y = 13 - 11t$ ; il y a un nombre infini de solutions, quand  $\frac{58}{77}$  doit être la différence des deux fractions cherchées; mais si  $\frac{58}{77}$  en est la somme, il n'y a qu'une solution qui répond à  $t = 1$ , on a  $\frac{58}{77} = \frac{4}{7} + \frac{2}{11}$ .

Faire 50 s. avec des pièces de 2 s. et de 18 d. Soient  $x$  le nombre des pièces de 2 s., et  $y$  celui des pièces de  $\frac{3}{2}$  s.; on a  $2x + \frac{3}{2}y = 50$ , ou  $4x + 3y = 100$ ; on en tire  $x = 1 - 3t$  et  $y = 32 + 4t$ ; en faisant  $t = 0, -1, -2$ , jusqu'à  $-8$ , on a  $x = 1, 4, 7, \dots$ ,  $y = 32, 28, 24, \dots$ . Si l'on prenait aussi les valeurs négatives de  $x$  ou de  $y$ , alors les pièces de 2 s. seraient données en échange de celles de 18 d., de manière à produire 50 s. de différence.

123. La même méthode s'applique lorsqu'il y a 3, 4, ... inconnues et autant d'équ. moins une. En voici divers exemples.

Quel est le nombre  $N$  qui, divisé par 5 et par 7, donne 1 et 2 pour restes, c'est-à-dire qui rend entières les quantités

$\frac{N-4}{5}$  et  $\frac{N-2}{7}$ ? Désignons par  $x$  et  $y$  les quotiens respectifs; nous aurons  $N=5x+4$ ,  $N=7y+2$ ; d'où  $7y-5x=2$ ; on résout cette équation par les moyens indiqués, et l'on a  $x=7t+1$  et  $y=5t+1$ , ce qui donne  $N=35t+9$ . Le nombre demandé est l'un de ceux-ci : 9, 44, 79, .. On serait parvenu plus aisément au résultat, en remarquant que  $N=4$  rend visiblement la 1<sup>re</sup> fraction un nombre entier, et que tous les nombres qui jouissent de cette propriété sont compris dans  $N=4+5v$ ; mais on ne doit prendre pour  $v$  que les valeurs qui rendent aussi entière la quantité  $\frac{N-2}{7}$  ou  $\frac{5v+2}{7}$ ; on voit de suite que  $v=1$ , et plus généralement  $v=1+7t$ , donc, en substituant,  $N=9+35t$ .

En comptant les feuillets d'un livre 7 à 7, il en reste 1; 10 à 10, il en reste 6; enfin 3 à 3, il ne reste rien; combien le livre a-t-il de feuillets? On suppose que ce nombre  $N$  est entre 100 et 300. Il s'agit de trouver pour  $N$  un nombre qui rende entières les fractions  $\frac{N-1}{7}$ ,  $\frac{N-6}{10}$  et  $\frac{N}{3}$ . La dernière donne  $N=3z$ ; les deux autres deviennent  $\frac{3z-1}{7}$ ,  $\frac{3z-6}{10}$ ; celle-ci exige que  $z=2+10v$ ; ainsi, en substituant, l'autre se change en  $\frac{5+30v}{7}$ , ou  $4v+\frac{5+2v}{7}$ ; donc  $v=1+7t$ , d'où  $z=12+70t$ ; et enfin,  $N=36+210t$ . Par conséquent, si l'on fait  $t=0, 1, 2, \dots$  on trouve  $N=36, 246, 456, \dots$ . Le livre a 246 feuillets.

Trouver un nombre  $N$  qui, divisé par 2, 3 et 5, donne 1, 2 et 3 pour restes. On trouve

$$N=30t+23; \text{ ainsi, } N=23, 53, 83, 113, \dots$$

\* On propose de rendre entières les trois quantités  $\frac{121x-41}{504}$ ,  $\frac{9x+1}{35}$  et  $\frac{27x-11}{16}$ : voici comment on simplifiera les calculs.

Comme  $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ ,  $35 = 7 \cdot 5$ ,  $16 = 2^4$ , on décompose les trois fractions en

$$\frac{121x-41}{2^3}, \frac{121x-41}{3^2}, \frac{121x-41}{7}, \frac{9x+1}{7}, \frac{9x+1}{5}, \frac{11(x-1)}{2^4},$$

$$\text{ou } \frac{x-1}{8}, \frac{4x-5}{9}, \frac{2x+1}{7}, \frac{2x+1}{7}, \frac{4x+1}{5}, \frac{x-1}{16},$$

en extrayant les entiers. On supprime la 3<sup>e</sup> fraction qui est la même que la quatrième, et la 1<sup>re</sup> qui est comprise dans la dernière, car  $x-1$  ne peut être divisible par 16, sans l'être aussi par 8. Il reste donc à rendre entières les quantités

$$\frac{4x-5}{9}, \frac{2x+1}{7}, \frac{4x+1}{5}, \frac{x-1}{16},$$

la 1<sup>re</sup> donne  $x = -1 + 9t$ , ce qui change la 2<sup>e</sup> en  $\frac{18t-1}{7}$ ,

ou  $\frac{4t-1}{7}$ ; ainsi  $t = 2 + 7t'$ , et  $x = 17 + 63t'$ . La 3<sup>e</sup> devient

$\frac{2(2+t')}{5}$ , d'où  $t' = -2 + 5t''$ , et  $x = -109 + 315t''$ . Enfin

la 4<sup>e</sup> donne  $\frac{2+11t''}{16}$ , d'où  $t'' = 10 + 16z$ ; et enfin, quel que soit l'entier  $z$ ,  $x = 3041 + 5040z$ .

Lorsqu'on n'a qu'une équ. et trois inconnues, on opère ainsi qu'il suit. Soit  $5x + 8y + 7z = 50$ . En faisant  $50 - 7z = u$ , on a  $5x + 8y = u$ , d'où l'on tire, par notre méthode, en regardant  $u$  comme donné,  $x = 8t - 3u$  et  $y = 2u - 5t$ ; remettant  $50 - 7z$  pour  $u$ , il vient

$$x = 21z + 8t - 150, \quad y = 100 - 14z - 5t.$$

$z$  et  $t$  sont des nombres entiers quelconques.



### III. DES PUISSANCES, DES RACINES ET DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

#### *Des Puissances et Racines des Monomes.*

124. La règle (p. 81) simplifie l'élevation aux puissances, en évitant la multiplication réitérée; car soit proposé d'élever  $a$  à la puissance  $m = n + p$ ; on a  $a^m = a^n \times a^p$ , de sorte qu'après avoir formé  $a^n$  et  $a^p$ , le produit donnera  $a^m$ . De même on pourra décomposer  $m$  en trois parties  $n + p + q$ , d'où  $a^m = a^n \times a^p \times a^q$ , comme n° 96, etc.....

125. Il suit des règles de la multiplication (n° 96), que pour élever un monome à une puissance, il faut multiplier l'exposant de chaque lettre par le degré de la puissance. Ainsi,

$$(2ab^3)^2 = 4a^2b^6; \left(\frac{3a^2b^3}{cd^2}\right)^5 = \frac{3^5a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}.$$

On tire encore de là un moyen facile de former certaines puissances des nombres: car  $a^m$ , lorsque  $m = np$ , revient à  $a^{np} = (a^n)^p$ . Si  $m = npq$ ...., on fera la puissance  $n$  de  $a$ , la puissance  $p$  de  $a^n$ , la puissance  $q$  de  $a^{np}$ .... De même pour l'extraction des racines: ainsi, comme  $12 = 3.2.2$ , on trouvera  $\sqrt[12]{531441}$  en prenant la racine carrée, qui est 729; puis celle de 729 qui est 27; puis enfin la racine cubique de 27 qui est 3  $\Rightarrow \sqrt[12]{531441}$ . (Voy. n° 60.)

Réciproquement, pour extraire la racine  $m^e$  d'un monome, on extraira celle de chaque facteur; cette racine se trouve en divisant chaque exposant par  $m$ . En effet, pour que  $a^3b^3$ ; soit  $\sqrt[3]{(a^6b^9)}$ , il suffit que  $a^3b^3$ , élevé au cube, reproduise  $a^6b^9$ ; or, c'est ce qui a lieu d'après la règle qui précède, si l'on a divisé les exposans par 3.

$$\sqrt[3]{(4a^3b^3)} = 2ab, \sqrt[5]{\left(\frac{243a^{10}b^5}{c^5d^{10}}\right)} = \frac{3a^2b}{cd^2},$$

Lorsque le degré de la racine est pair, on doit affecter cette racine du signe  $\pm$ ;  $\sqrt{9} = \pm 3$ . Cela vient de ce qu'algèbriquement parlant, pour qu'un nombre  $m$  soit racine de 9, il suffit que  $m^2 = 9$ , ce qui a lieu, que  $m$  ait le signe  $+$  ou  $-$  (p. 157). Si le degré de la racine est impair, le signe de la puissance est le même que celui de la racine :

$$\sqrt[3]{-27} = -3, \quad \sqrt[3]{+243} = +3.$$

126. Les expressions radicales éprouvent souvent des simplifications. Ainsi

$$\sqrt[3]{432} = 2, \quad \sqrt[3]{54} = 3, \quad \sqrt[3]{16} = 6, \quad \sqrt[3]{2}, \quad \sqrt{(Nq^2)} = q \sqrt{N};$$

$$\sqrt{\left(\frac{c^2 d^2}{a^2}\right)} = \frac{cd}{a} \sqrt{(cd)}, \quad \sqrt{(3a^2 - 6ab + 3b^2)} = (a - b) \sqrt{3}.$$

$$\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + 2\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{b} = 3\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{b}.$$

$$\sqrt{x^2 y} - a \sqrt{x^2 y} + b \sqrt{x^2 y} = (1 - a + b) \sqrt{x^2 y}; \quad \sqrt{75} - 4 \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$$\sqrt{75a^2 b^2} - 4 \sqrt{3a^2 b^2} = ab \sqrt{3a}, \quad \sqrt{27a^2 b} - \sqrt{3a^2 b^2} = a(3 - b) \sqrt{3ab}$$

$$\frac{a}{b} \sqrt{\frac{c}{d}} + \frac{f}{g} \sqrt{\frac{c}{d}} = \frac{ag + bf}{bg} \sqrt{\frac{c}{d}}.$$

127. Nous avons vu ci-dessus que pour extraire la racine d'un produit, il faut extraire celle de chacun des facteurs; or, cela est vrai même lorsque les extractions ne se peuvent faire exactement : par exemple,  $\sqrt[3]{(a^2 b)} = \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{b}$ , puisque le cube de cette dernière quantité se forme visiblement en élevant chaque facteur, ce qui donne  $a^2 b$ . En général, de ce que la racine d'une quantité est le produit des racines de chacun de ses facteurs (125), il suit que  $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{(ab)}$ . Donc, pour multiplier ou diviser deux quantités affectées du même radical, il faut faire le produit ou le quotient de ces quantités, et l'affecter de ce radical. Par exemple,

$$\sqrt{6} \times \sqrt{8} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3};$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2}; \quad \sqrt[3]{5x^2 y^2} \times \sqrt[3]{20ax} = \sqrt[3]{100ax^2 y^2}.$$

$$\frac{\sqrt[n]{11}}{\sqrt[n]{33}} = \frac{\sqrt[n]{11}}{\sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{11}} = \frac{1}{\sqrt[n]{3}}; \quad \sqrt[n]{p} \times \sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{pq};$$

$$\frac{\sqrt[n]{ax}}{\sqrt[n]{bxy}} = \sqrt[n]{\frac{a}{by}}; \quad a \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \sqrt[n]{a^nb};$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab};$$

$$(a + \sqrt{b})^3 = a^3 + 3a^2\sqrt{b} + 3ab + b\sqrt{b}.$$

En supprimant le radical,  $(\sqrt{a^nb^m})^2 = a^nb^m$ .

128. Comme il n'y a pas de nombre qui, multiplié par lui-même, puisse donner un résultat négatif  $-m$ ,  $\sqrt{-m}$  représente une opération impossible : c'est ce qui lui a fait donner le nom d'*Imaginaire*;  $\sqrt{m}$  est appelée *Réelle*. Nous aurons par la suite (n° 139, 1°) occasion de remarquer que ces symboles, quoique vides de sens, n'en sont pas moins importants à considérer. Ajouter, multiplier.... de semblables symboles, sont des opérations dont il est difficile de se rendre raison; cependant on convient de faire ces calculs sur les imaginaires, comme si elles étaient de véritables quantités, en les assujettissant aux mêmes règles; nous en reconnaitrons l'utilité par la suite.

La règle n° 127 doit éprouver quelques modifications; ainsi  $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ , n'étant autre chose que le carré de  $\sqrt{-a}$ , est visiblement  $-a$ ; or, la règle ci-dessus semblerait donner pour produit  $\sqrt{+a^2}$  ou  $a$ . Mais observons que  $\sqrt{a^2}$  est  $\pm a$ ; l'incertitude du signe, en général, n'a lieu que lorsqu'on ignore si  $a^2$  provient du carré de  $+a$ , ou de celui de  $-a$ ; or, c'est ce qui ne peut exister ici, et l'on a  $-a$  pour produit, à l'exclusion de  $+a$ .

Concluons de là que  $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$ .

De même  $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$  revient à

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}, \text{ ou } -\sqrt{(ab)}.$$

On verra que  $\sqrt{-a}$  a pour puissances  $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, \dots$ ,  $\sqrt{-a}, -a, -a\sqrt{-a}, +a^2, +a^2\sqrt{-a}, -a^3, \text{ etc.} \dots$ .  
Celles de  $-\sqrt{-a}$  sont  $-a, +a\sqrt{-a}, a^2, -a^2\sqrt{-a}, \dots$ .  
Le carré de  $1 + \sqrt{-1}$  se réduit à  $2\sqrt{-1}$ . Le cube de

$$-1 + \sqrt{-3} \text{ est } 8; \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a \cdot 1 - 1}}{\sqrt{b \cdot 1 - 1}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Le produit

$(x+a+b\sqrt{-1}) \times (x+a-b\sqrt{-1})$  est  $= (x+a)^2 + b^2$ , quantité Réelle (n° 97, III).

129. Il suit de la règle (127) que pour élever à une puissance un monome déjà affecté d'un radical, il faut élever à cette puissance chaque facteur sous le radical. Ainsi le cube de  $\sqrt[3]{3a^3b}$  est  $\sqrt[3]{27a^9b^3}$ , celui de  $\sqrt[3]{2}$  est  $\sqrt[3]{8} = 2^{1/3}$ .

Concluons de là que lorsqu'on veut extraire une racine d'un monome déjà affecté d'un radical, il faut, s'il se peut, extraire la racine de la quantité radicale, ou, dans le cas contraire, multiplier l'indice du radical par le degré de la racine à extraire.

Ainsi la racine cubique de  $\sqrt[3]{a^3}$  est  $\sqrt[3]{a^3}$ ,  $\sqrt[3]{(\sqrt[3]{a^3})} = \sqrt[9]{a^3}$ ,  $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^3b^3}} = \sqrt[3]{ab}$ .

130. On peut donc, sans changer la valeur d'une quantité radicale, multiplier ou diviser par un même nombre les exposans et l'indice du radical, puisque c'est d'une part élever à la puissance, et de l'autre extraire la racine;

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}, \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[6]{a^2}, \sqrt[4]{(3a^3b^3)} = \sqrt[6]{9a^4b^6}.$$

Par là, il devient facile de multiplier et diviser les quantités affectées de radicaux différens; car il suffit de les réduire à être de même degré; on multipliera pour cela les exposans et l'indice du radical par un même nombre qu'on choisira convenablement, comme pour la réduction des fractions au même dénominateur (38). Par exemple,

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[6]{a^2} \times \sqrt[6]{b^3} = \sqrt[6]{(a^2b^3)},$$

$$\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[m]{b^q} = \sqrt[nm]{a^{pm}b^{qn}}, \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}.$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} : \sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^m c^n d^n}}.$$

*Des Exposans négatifs et fractionnaires.*

131. Nous avons démontré que le quotient de  $\frac{a^m}{a^n}$  est  $a^{m-n}$ , en supposant que  $m$  soit  $> n$ , sans cela,  $m-n$  serait un nombre négatif, tel que  $-p$ ; et comme on ignore encore le sens qu'on doit attacher à  $a^{-p}$ , on ne pourrait multiplier  $a^{-p}$  par  $a^n$ ; ainsi on ne saurait prouver que  $a^n \times a^{m-n}$  doit reproduire  $a^m$ .

Mais remarquons que l'expression  $a^{-p}$  n'a aucun sens par elle-même, puisqu'on ne peut y attacher l'idée propre aux exposans (12). On est donc le maître de désigner  $\frac{1}{a^p}$  par  $a^{-p}$ , ainsi que nous le ferons dorénavant. D'après cela, dans tous les cas, on pourra dire que  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ; car la chose est démontrée, si  $m > n$ , et elle résulte de notre hypothèse, lorsque  $m < n$ , puisqu'en divisant les deux termes par  $a^m$ , on a

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{-p}.$$

L'Algèbre apprend à trouver des formules qui, par leur généralité, conviennent à toutes les valeurs numériques qu'on peut imposer aux lettres : on doit donc regarder comme un grand avantage de n'avoir pas besoin de distinguer, dans une expression algébrique, qui renferme des quantités de la forme  $\frac{a^m}{a^n}$ , tous les cas qui peuvent résulter des suppositions de  $m > n$  ou  $< n$ , on mettra  $a^{m-n}$  au lieu de  $\frac{a^m}{a^n}$ , et la formule sera vraie dans toutes les hypothèses (comme au n° 108).

Il faut aussi avoir égard au cas de  $m = n$ ; alors  $a^{m-n}$  devient  $a^0$ , symbole tout aussi insignifiant par lui-même que  $a^{-p}$ . Nous conviendrons donc de faire  $a^0 = 1$ , puisque alors  $\frac{a^n}{a^n} = 1$ . L'expression  $a^0$  est un symbole équivalent à l'unité.

Ainsi, lorsque nous rencontrerons dans une formule  $a^0$  et



$a^{-p}$ , ces expressions seront faciles à comprendre, en examinant leur origine :  $a^0$  et  $a^{-p}$  n'ont pu provenir que d'une division  $\frac{a^m}{a^n}$ , dans laquelle on avait  $m = n$  dans le premier cas, et  $n = m + p$  dans le second. D'après cette convention, on peut faire passer un facteur du dénominateur au numérateur, en donnant à son exposant un signe négatif : ainsi

$$a^0 = b^0 = (p+q)^0 = \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 ;$$

$$(bc)^{-p} = \frac{1}{(bc)^p}, \quad \frac{1}{a} = a^{-1},$$

$$\frac{a^m b^n}{c^p d^q} = a^m b^n c^{-p} d^{-q}, \quad \frac{c}{f} = cf^{-1} = \frac{f^{-1}}{c^{-1}},$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} = (a^3 + b^3) (a^2 + b^2)^{-1}.$$

Voilà donc les puissances nulles et négatives introduites dans le calcul, par une suite de principes qui ne souffrent aucune difficulté. Venons-en aux puissances fractionnaires.

132. La règle donnée pour l'extraction des racines des monomes, prouve que  $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ ; mais il faut pour cela que  $n$  soit un multiple de  $m$ , car on tomberait sur un exposant fractionnaire, dont la nature est encore ignorée, et on ne pourrait démontrer qu'en rendant  $a^{\frac{n}{m}}$   $m$  fois facteur, le produit serait  $a^n$ . On est donc ici dans le même cas que pour les exposants négatifs, et il est visible que  $a^{\frac{n}{m}}$  n'ayant aucun sens par soi-même, on peut lui faire désigner  $\sqrt[m]{a^n}$ ; par là les formules pourront convenir à tous les cas, que  $n$  soit ou non multiple de  $m$ . ce qui est conforme au génie de l'Algèbre.

Donc, lorsque nous rencontrerons  $a^{\frac{n}{m}}$  dans une formule, il sera facile d'en avoir une idée nette, en observant que cette expression n'a pu provenir que de ce qu'on a voulu extraire la ra-

cine  $m^e$  de  $p^e$ . La règle donnée pour faire cette extraction est donc générale dans tous les cas.

Ainsi  $\sqrt[p]{3a} = (3a)^{\frac{1}{p}}$ ,  $\sqrt[p]{x^a - y^a} = (x^a - y^a)^{\frac{1}{p}}$ ,

$$b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{b}, \quad b^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{b^3}, \quad c^{\frac{1}{5}} p^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(cp)^3},$$

$$\sqrt[p]{\left(\frac{a^m b^n}{c^p}\right)} = \frac{a^{\frac{m}{p}} b^{\frac{n}{p}}}{c^{\frac{p}{p}}}, \quad \sqrt[p]{\left(\frac{b^r}{c^n}\right)} = b^{\frac{r}{p}} \times c^{-\frac{n}{p}}.$$

133.  $a^0, a^{-p}, a^{\frac{n}{m}}$  sont les expressions de convention attribuées aux valeurs 1,  $\frac{1}{a^p}$  et  $\sqrt[m]{a^n}$ . Mais 0,  $-p$  et  $\frac{n}{m}$  ne doivent point être regardées ici comme de véritables exposans, dans le sens attache à cette dénomination, quoique ces quantités occupent la place réservée aux exposans. Ce serait donc abuser des termes que de se croire autorisé à dire, sans démonstration, que  $a^m \times a^n = a^{m+n}$ , quand  $m$  et  $n$  ne sont pas tous deux entiers et positifs. Il en est de même de la division, de l'élevation aux puissances et de l'extraction des racines. Démontrons donc que ces symboles suivent les mêmes règles que les vrais exposans entiers et positifs; qu'on a, quels que soient  $m$  et  $n$ ,

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (a^m)^p = a^{mp}, \quad \sqrt[p]{a^m} = a^{\frac{m}{p}}.$$

1. S'il s'agit d'exposans négatifs: on a ( $m, n$  et  $p$  étant positifs)

$$1^o. a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

On voit de même que  $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}$ .

$$2^o. \frac{a^m}{a^{-n}} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

De même on trouve que  $\frac{a^{-m}}{a^n} = a^{-m-n}$ , et que  $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{n-m}$ ;

$$3^o. (a^{-n})^p = \left(\frac{1}{a^n}\right)^p = \frac{1}{a^{np}} = a^{-np};$$

$$4^o. \sqrt[m]{a^{-n}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a^n}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} = a^{-\frac{n}{m}}.$$

II. Pour les exposans fractionnaires, on peut d'abord multiplier les deux termes par un même nombre  $p$ , ce

(n° 130)  $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m^p]{a^{np}} = a^{\frac{np}{m^p}}$ . On peut donc réduire au même dénominateur les exposans des quantités qu'on veut multiplier ou diviser entre elles.

$$1^{\circ}. \text{ Soit } a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m]{a^{n+p}} = a^{\frac{n+p}{m}};$$

$$2^{\circ}. a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^n} : \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m]{a^{n-p}} = a^{\frac{n-p}{m}};$$

$$3^{\circ}. \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^p = \left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p = \sqrt[m]{a^{np}} = a^{\frac{np}{m}};$$

$$4^{\circ}. \sqrt[p]{a^{\frac{n}{m}}} = \sqrt[p]{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[m^p]{a^n} = a^{\frac{n}{m^p}}.$$

Remarquons en outre que ces calculs relatifs à l'exposant fractionnaire permettent de le supposer aussi négatif.

III. Prenons le cas des exposans irrationnels, et soit par ex.  $a^{\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{3}}$ ; désignons par  $z$  et  $z'$  les valeurs approchées de ces exposans, ou  $z = \sqrt{2} + h$ ,  $z' = \sqrt{3} + h'$ ,  $h$  et  $h'$  étant des erreurs, qu'on peut diminuer à volonté, en poussant plus loin l'approximation. Or, si l'on se contente des valeurs approchées  $z$  et  $z'$ , le produit ne sera lui-même qu'approché : et en désignant par  $\alpha$  l'erreur qui en résultera, erreur qu'on peut rendre aussi petite qu'on voudra, on aura exactement

$$a^{\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{3}} + \alpha = a^{z+z'} = a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}+h+h'} = a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times a^{h+h'};$$

mais plus  $h$  et  $h'$  seront petits, plus  $a^{h+h'}$  approchera de 1; ainsi on peut donner à ce 2<sup>e</sup> membre la forme  $a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \beta$ ,  $\beta$  décroissant indéfiniment avec  $\alpha$ ,  $h$  et  $h'$ . Égalant les termes constans (113), on trouve  $a^{\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{3}} = a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ . On prouverait de même que les exposans irrationnels sont soumis aux mêmes règles que les entiers, dans la division et l'extraction : c'est d'ailleurs une conséquence de ce qui vient d'être démontré.

IV. Quant aux exposans imaginaires, d'après leur définition (128), les règles relatives aux quantités réelles s'appliquent

à celles qui sont imaginaires lorsqu'on veut les livrer au calcul, quoique celles-ci ne soient que des êtres de raison ; ainsi il n'y a lieu à aucune démonstration.

On facilite quelquefois les calculs par ces principes, par exemple, pour diviser  $\sqrt[5]{a^3b^4}$  par  $\sqrt[7]{a^2b^3}$ , on écrira.....  
 $a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{4}{5}} : a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{7}}$ , et réduisant les exposans au même dénominateur, il vient

$$a^{\frac{12}{35}} b^{\frac{18}{35}} : a^{\frac{10}{35}} b^{\frac{15}{35}} = a^{\frac{12}{35} - \frac{10}{35}} b^{\frac{18}{35} - \frac{15}{35}} = a^{\frac{2}{35}} b^{\frac{3}{35}} = \sqrt[35]{a^2 b^3}.$$

Les polynômes qui contiennent des exposans négatifs ou fractionnaires sont soumis aux règles ordinaires, et il convient d'acquiescer l'exercice de ces calculs. La division suivante indique la marche à observer.

$$\left\{ \begin{array}{l} 6a^4 - 23a^3 \sqrt{-1} - 13ab - 20 + 22a^{-1}b \sqrt{-1} + 6a^{-1}b^2 \\ - 6a^4 + 15a^3 \sqrt{-1} + 9ab \\ 1^{re} \text{ reste} = 8a^3 \sqrt{-1} - 4ab - 20 + 22a^{-1}b \sqrt{-1} + 6a^{-1}b^2 \\ + 8a^3 \sqrt{-1} + 20 - 12a^{-1}b \sqrt{-1} \\ 2^{re} \text{ reste}_1 = 4ab + 10a^{-1}b \sqrt{-1} + 6a^{-1}b^2 \\ 3^{re} \text{ reste}_2 = 0 \end{array} \right.$$

Observerez que le quotient peut admettre des exposans négatifs pour  $a$ , et cependant être exact, or, si la division se fait exactement, il est clair que la somme des moindres exposans de  $a$  dans le quotient et le diviseur, doit donner le moindre dans le dividende. Ainsi, retranchez les plus petits exposans de  $a$  dans ces deux premiers polynômes, et vous aurez le plus petit dans le quotient, si la division se fait exactement. On est donc assuré qu'on n'est pas dans ce cas, lorsque le quotient est poussé jusqu'à un exposant moindre que cette différence.

### *Des racines carrées et cubiques des Polynomes.*

134 1°. Tout nombre composé de  $n$  chiffres est entre  $10^n$  et  $10^{n+1}$ , son carré est donc compris entre  $10^{2n}$  et  $10^{2n+2}$ , qui sont les plus petits nombres de  $2n+1$  et  $2n+3$  chiffres, donc le carré a  $2n$  ou  $2n+1$  chiffres, ainsi qu'on l'a dit (62).

2°. Soient  $a$  et  $a + 1$  deux nombres consécutifs; leurs carrés  $a^2$  et  $a^2 + 2a + 1$  diffèrent entre eux de  $2a + 1$ ; ce qui est d'accord avec ce qu'on sait (n° 66, 4°.).

Comme  $2a + 1$  représente tous les nombres impairs, on voit que *tout nombre impair est la différence des carrés de ses deux moitiés inégales et entières*;  $77 = 39^2 - 38^2$ ,  $37 = 19^2 - 18^2$ , etc. Du reste nous prouverons en traitant des équ. indéterminées du 2° degré, que lorsqu'un nombre impair n'est pas premier, il y a plusieurs manières de faire cette décomposition. Ainsi,  $27 = 14^2 - 13^2 = 6^2 - 3^2$ ;  $105 = 53^2 - 52^2 = 19^2 - 16^2 = 13^2 - 8^2 = 11^2 - 4^2$ .

3°. Si  $k^2$  est le plus grand carré contenu dans  $N$ ,  $k$  et  $k + 1$  sont approchés de  $\sqrt{N}$  à moins d'une unité;  $r$  étant le reste entier que donne  $k$ , ou  $N = k^2 + r$ , comme  $(k + \frac{1}{2})^2 = k^2 + k + \frac{1}{4}$ , en retranchant ces équ. on a

$$N - (k + \frac{1}{2})^2 = r - k - \frac{1}{4};$$

or si  $r > k$ , on a  $\sqrt{N} > k + \frac{1}{2}$ , et  $k + 1$  est plus voisin que  $k$  de  $\sqrt{N}$ ; c'est le contraire quand  $r < k$ . Ainsi selon que le reste  $r$  est  $>$  ou  $<$  la racine entière  $k$ , on prendra  $k + 1$  ou  $k$  pour valeur approchée de  $\sqrt{N}$ .

4°. Lorsqu'on a poussé le calcul de l'extraction jusqu'à connaître plus de la moitié des chiffres de la racine, les autres se trouvent par une simple division, ce qui abrège surtout les calculs d'approximation.

En effet, soit  $N$  le nombre dont on cherche la racine  $a + x$ ,  $a$  étant la partie déjà calculée par le procédé ordinaire, et  $x$  celle qui est inconnue et doit compléter la racine,  $\sqrt{N} = a + x$ . Bien entendu que pour donner aux chiffres de  $a$  leur valeur propre, on a dû ajouter à la droite  $n$  zéros, c'est-à-dire autant que  $x$  a de chiffres, autant qu'il reste de tranches de  $N$  à descendre près des restes successifs.  $N = a^2 + 2ax + x^2$  donne

$$\frac{N - a^2}{2a} = x + \frac{x^2}{2a} = \frac{R}{2a}, \text{ } R \text{ étant le reste } N - a^2 \text{ qu'a donné}$$

$a$ , près duquel on a descendu toutes les tranches de deux chiffres non encore employées. Cela posé  $x$  étant composé de



$n$  chiffres,  $x^2$  en a au plus  $2n$ , tandis que, par hypothèse,  $a$  en a au moins  $n + 1$ , lesquels sont suivis de  $n$  zéros; on voit que  $a$  sera  $> x^2$ , et par conséquent  $\frac{x^2}{2a} < \frac{1}{2}$ ; on aura donc  $x = \frac{N - a^2}{2a}$ , lorsqu'on ne voudra que la partie entière de  $\sqrt{N}$ , ce qui arrive toujours, puisque dans les approximations, et même pour les racines des fractions, les nombres doivent être préparés de manière à ce que l'extraction ne porte que sur des parties entières (n° 66, 1°).

On divisera donc  $N - a^2$ , ou le reste de l'opération qui a servi à trouver  $a$ , par le double de  $a$ ; et pour cela, on regardera la partie connue  $a$  de la racine comme des unités simples (en omettant les  $n$  zéros qui devraient être mis à sa droite), et l'on supprimera aussi  $n$  chiffres à la droite de  $N$ .

Ainsi, pour  $\sqrt{3.37.67.98.17}$ , les trois 1<sup>res</sup> tranches donnent d'abord 183 pour racine, et 278 pour reste : si donc on divise 27898 par 2 fois 183, ou 366, on aura 76 pour les deux autres chiffres de la racine, qui est 18376.

De même,  $\sqrt{2} = 1,4142$ , en ne poussant l'approximation (n° 64) qu'aux 10000<sup>es</sup> : pour trouver 4 autres décimales, comme le reste est 3836, on divisera 38360000 par  $2 \times 14142$  ou 28284 : le quotient est 1356, donc, etc. On trouve

$$\sqrt{2} = 1,4142135623732, \quad \sqrt{3} = 1,7320508076.$$

135 Soit proposé d'extraire la racine de

$$9a^4 - 12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4,$$

représentons ce polynome par  $X$ . Nous dirons, pour abréger, que le terme ou la lettre  $a$  porte le plus haut exposant, est le plus grand. Soient  $x$  le plus grand terme de la racine cherchée,  $y$  la somme des autres termes, d'où (n° 97, 1°).  $X = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ;  $x^2$  est visiblement le plus grand terme du carré  $X$ , ainsi  $x^2 = 9a^4$ , ou  $x = 3a^2$  pour 1<sup>er</sup> terme de la racine, et  $X = 9a^4 + 6a^2y + y^2$ . Ouant  $9a^4$  des deux membres, il vient

$$-12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 = 6a^2y + y^2,$$

$y$  est en général un polynome, aussi bien que  $6a^2y$ ; or,  $y$  n'ayant que des termes où l'exposant de  $a$  est moindre que 2, il est clair que le plus grand terme de  $(6a^2 + y) \times y$  est le produit de  $6a^2$  par le plus grand terme de  $y$ ; ainsi ce dernier sera le quotient de  $-12a^3b$ , divisé par  $6a^2$ , double de la racine trouvée. Il en résulte que  $-2ab$  est le 2<sup>e</sup> terme de la racine.

Pour achever le calcul, faisons  $3a^2 - 2ab$ , ou  $x - 2ab = x'$ , et désignons par  $y'$  les autres termes de la racine. On a  $X = x'^2 + 2x'y' + y'^2$ ; ôtons  $x'^2$  de part et d'autre;  $x'^2$  se compose de  $x^2$ , déjà ôté, puis de  $-2x \times 2ab + (2ab)^2$ , ou  $-2ab(2x - 2ab)$ . Si donc on écrit le 2<sup>e</sup> terme  $-2ab$  de la racine, à côté de  $6a^2$ , double du 1<sup>er</sup>, et si l'on multiplie par  $-2ab$ , en retranchant le produit du reste ci-dessus, on aura

$$30a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 = 2x'y' + y'^2.$$

Si  $y'$  est un polynome, il est aisé de voir que le plus grand terme  $30a^2b^2$  est celui de  $2x'y'$ , c'est-à-dire est le produit du plus grand terme de  $2x'$  par celui de  $y'$ . Si donc on divise  $30a^2b^2$  par  $6a^2$ , le quotient  $5b^2$  sera le 3<sup>e</sup> terme de la racine.

Faisons  $3a^2 - 2ab + 5b^2$  ou  $x' + 5b^2 = x''$ , et désignons par  $y''$  la somme des autres termes de la racine : on aura  $X - x''^2 = 2x''y'' + y''^2$ ; or, pour retrancher  $x''^2$  de  $X$ , comme on a déjà ôté  $x'^2$  il faut, du dernier reste  $30a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$ , ôter encore  $2x' \cdot 5b^2 + (5b^2)^2$ , ou  $5b^2(2x' + 5b^2)$ . On écrira donc  $+5b^2$  à côté du double  $6a^2 - 4ab$  des deux 1<sup>ers</sup> termes de la racine, et l'on multipliera par le 3<sup>e</sup> terme  $5b^2$ ; enfin, on retranchera le produit du 2<sup>e</sup> reste. Comme ce produit et ce reste sont égaux, on a  $X - x''^2 = 0$ , d'où  $y'' = 0$  et  $x'' = \sqrt{X}$ . Ainsi la racine demandée est  $3a^2 - 2ab + 5b^2$ .

Voici le type du calcul.

$$\begin{array}{r}
 9a^4 - 12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 \\
 \underline{-9a^4} \\
 \text{1<sup>er</sup> reste, } -12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 \\
 \quad \underline{+12a^3b - 4a^2b^2} \\
 \text{2<sup>e</sup> reste, } \quad \quad \quad +30a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 \\
 \text{3<sup>e</sup> reste, } \dots\dots\dots 0
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{r}
 3a^2 - 2ab + 5b^2 \\
 \hline
 (6a^2 - 2ab)x - 2ab \\
 \hline
 6a^2 - 4ab + 5b^2 \\
 \times 5b^2
 \end{array}
 \right.$$

On voit qu'après avoir ordonné, il faut prendre la racine du

1<sup>er</sup> terme, et continuer l'opération comme pour l'extraction numérique (n° 62). Les exemples suivans montrent que la même marche de calculs donne la racine lorsqu'il y a des imaginaires ou des exposans négatifs ou fractionnaires.

$$\begin{array}{r}
 9a^4 - 12a^3\sqrt{-1} - 2a^2(2-3\sqrt{-2}) + 4a\sqrt{2-2} \\
 - 4a^4 \\
 \hline
 1^{re} \text{ reste, } -12a^3\sqrt{-1} - 2a^2(2-3\sqrt{-2}) + 4a\sqrt{2-2} \\
 + 12a^3\sqrt{-1} + 4a^3 \\
 \hline
 2^{re} \text{ reste, } 6a^2\sqrt{-2} + 4a\sqrt{2-2} \\
 3^{re} \text{ reste, } \dots \dots \dots 0
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 3a^2 - 2a\sqrt{-1} + \sqrt{-2} \\
 \hline
 (6a^2 - 2a\sqrt{-1})x - 2a\sqrt{-1} \\
 \hline
 6a^2 - 4a\sqrt{-1} + \sqrt{-2} \\
 \hline
 x + \sqrt{-1}
 \end{array}
 \right.$$

$$\begin{array}{r}
 4a^4 - 12ab^2 + 9b + 12 - 18a^{-1}b^2 + 9a^{-2} \\
 - 4a^4 \\
 \hline
 1^{re} \text{ reste, } -12ab^2 + 9b + 12 - 18a^{-1}b^2 + 9a^{-2} \\
 + 12ab^2 - 9b \\
 \hline
 2^{re} \text{ reste, } 12 - 18a^{-1}b^2 + 9a^{-2} \\
 3^{re} \text{ reste, } \dots \dots \dots 0
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 2a - 3b^2 + 3a^{-1} \\
 \hline
 (4a - 3b^2)x - 3b^2 \\
 \hline
 4a - 6b^2 + 3a^{-1} \\
 \hline
 x + 3a^{-1}
 \end{array}
 \right.$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - a \\
 - x^2 \\
 \hline
 1^{re} \text{ reste, } -a^2 \\
 + a^2 - \frac{1}{2}a^2x^{-1} \\
 \hline
 2^{re} \text{ reste, } -\frac{1}{4}a^2x^{-1} \\
 + \frac{1}{4}a^2x^{-2} - \frac{1}{8}a^4x^{-4} - \frac{1}{64}a^8x^{-6} \\
 \hline
 3^{re} \text{ reste, } -\frac{1}{8}a^6x^{-4} \text{ etc.}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 x - \frac{1}{2}a^2x^{-1} - \frac{1}{8}a^4x^{-3} - \dots \\
 \hline
 (2x - \frac{1}{2}a^2x^{-1})x - \frac{1}{2}a^2x^{-1} \\
 \hline
 2x - a^2x^{-1} - \frac{1}{4}a^4x^{-3} \\
 \hline
 x - \frac{1}{4}a^2x^{-1}
 \end{array}
 \right.$$

Le dernier exemple montre comment on doit se conduire lorsque l'extraction ne peut se faire exactement, ce qu'on reconnaît quand on trouve quelque terme de la racine où  $a$  porte un exposant moindre que la moitié de son plus faible exposant dans le carré. Du reste, on a ici

$$\sqrt{x^2 - a^2} = x - \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} - \frac{a^6}{16x^5} - \text{etc.}$$

136 Le cube de  $x+y$  est  $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$  (n° 97, II). Il sera facile d'appliquer les principes précédens à la recherche

de la racine cubique d'un polynôme Nous nous bornerons à l'exemple suivant :

$$\begin{array}{r}
 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 \\
 \underline{-8a^3} \\
 1^{\text{er}} \text{ reste, } -36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 \\
 2^{\text{e}} \text{ reste, } \dots\dots\dots 0
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 2a - 3b \text{ racine.} \\
 \hline
 12a^2 - 18a^2b + 9b^2 \\
 \times -3b^2
 \end{array}
 \right.$$

Après avoir ordonné, cherché la racine 3<sup>e</sup> du 1<sup>er</sup> terme  $8a^3$ , qui est  $2a^2$ , et retranche  $8a^3$ , on a un 1<sup>er</sup> reste. On en divise le 1<sup>er</sup> terme  $-36a^2b$  par  $12a^2$ , triple du carré de  $2a^2$ ; le quotient  $-3b^2$  est le 2<sup>e</sup> terme de la racine. Près de  $12a^2$ , on écrira  $-18a^2b + 9b^2$ , ou le triple du produit de  $-3b^2$  par le 1<sup>er</sup> terme  $2a^2$ , et le carré de  $-3b^2$ ; on multipliera ce trinôme par  $-3b^2$ , et l'on retranchera le produit du 1<sup>er</sup> reste. Le résultat étant zéro, on a de suite  $2a^2 - 3b^2$  pour racine cubique exacte: s'il y avait un second reste, on opérerait de même sur ce reste.

Nous ne dirons rien ici des racines 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>...

### *Équations du second degré.*

137. En passant tous les termes dans le 1<sup>er</sup> membre, réduisant en un seul tous ceux qui contiennent soit  $x$ , soit  $x^2$ , et opérant de même sur tous les termes connus, l'équ. du 2<sup>e</sup> degré prend la forme  $Ax^2 + Bx + C = 0$ , et faisant

$$\frac{B}{A} = p, \quad \frac{C}{A} = q,$$

on a 
$$x^2 + px + q = 0 \dots (1),$$

équation qui peut représenter toutes celles du second degré à une inconnue, et dans laquelle  $p$  et  $q$  sont des nombres connus positifs ou négatifs.

Divisons  $x^2 + px + q$  par  $x - a$ ,  $a$  étant un nombre quelconque, il viendra le quotient  $x + a + p$ , et le reste  $a^2 + pa + q$ . Ce reste est ou n'est pas nul, selon que  $a$  est ou n'est pas racine de l'équ. proposée (on nomme racines les valeurs qui satisfont à cette équ., parce qu'on les obtient par une extraction). Donc,

Tout nombre  $a$  qui est racine d'une équation du second degré, donne un diviseur binôme  $(x-a)$  du premier membre de cette équation, laquelle prend alors la forme

$$(x-a)(x+a+p)=0.$$

Or, on demande toutes les valeurs propres à rendre ce produit nul; ainsi  $x=-a-p$  jouit aussi bien de cette propriété que  $x=a$ . Donc, 1° toute équation du second degré qui a une racine  $a$ , en admet encore une seconde  $=-(a+p)$ .

2°. Cette équation ne peut avoir que deux racines : cette proposition sera démontrée plus tard.

3°. Les deux racines étant  $+a$  et  $-(a+p)$ , leur somme est  $-p$ , et leur produit est  $-(a^2+ap)=q$ , à cause de  $a^2+pa+q=0$ ; donc, le coefficient  $p$  du second terme en signe contraire est la somme de deux racines, et le terme connu  $q$  en est le produit. Par exemple, pour  $x^2-8x+15=0$ ,  $x=5$  est une racine, ainsi qu'on le reconnaît en substituant; on trouve que le premier membre est divisible par  $x-5$ ; le quotient est  $x-3$ ; les deux racines sont 3 et 5, dont la somme est 8, et le produit 15.

4°. Il est facile de former une équation du second degré dont les racines  $k$  et  $l$  soient données; on en fera la somme  $k+l$ , et le produit  $kl$ , et l'on aura  $x^2-(k+l)x+kl=0$ . On pourra encore former le produit  $(x-k)(x-l)$ . Par exemple, si 5 et  $-7$  sont les racines, on multiplie  $x-5$  par  $x+7$ ; ou bien on prend  $5-7=-2$ ;  $5 \times -7=-35$  et changeant le signe de la somme,  $x^2+2x-35=0$  est l'équ. cherchée.

5°. Résoudre l'équ. (1) revient à chercher deux nombres dont  $-p$  soit la somme et  $+q$  le produit.

6°. Il peut arriver que les racines  $k$  et  $l$  soient égales; alors les facteurs  $x-k$  et  $x-l$  étant égaux,  $x^2+px+q$  est le carré de l'un de ces facteurs.

138. Pour résoudre l'équ. (1), remarquons que si  $x^2+px+q$  est un carré, en extrayant la racine, on n'aurait plus qu'une équ. du 1<sup>er</sup> degré; comparons ce trinôme à  $(x+n)^2$  ou



$x^2 + 2xn + n^2$ ;  $n$  est arbitraire; ainsi faisons  $n = \frac{1}{2}p$ , pour que les deux 1<sup>ers</sup> termes soient égaux de part et d'autre.

Donc, si  $n^2$ , ou  $\frac{1}{4}p^2$ , se trouve  $= q$ ,  $x^2 + px + q$  est le carré de  $x + \frac{1}{2}p$ ; ce trinôme n'est un carré que quand  $\frac{1}{4}p^2 = q$ . En remplaçant  $p$  et  $q$  par  $\frac{B}{A}$  et  $\frac{C}{A}$ , on trouve que pour que  $Ax^2 + Bx + C$  soit un carré, il faut qu'on ait entre les coefficients la relation  $B^2 - 4AC = 0$ .

Dans le cas où  $\frac{1}{4}p^2 = q$ , la proposée revient à  $(x + \frac{1}{2}p)^2 = 0$ , et les deux racines sont égales à  $-\frac{1}{2}p$ .

Mais si cette condition n'a pas lieu, ajoutons  $\frac{1}{4}p^2 - q$  aux deux membres de l'équ. (1), il viendra

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = (x + \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q,$$

extrayant la racine,  $x + \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ ,

d'où  $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} \dots (2)$ .

Nous avons donné (n° 125) la raison du signe  $\pm$ . Ainsi, la valeur de  $x$  est formée de la moitié du coefficient du 2<sup>e</sup> terme en signe contraire, plus ou moins la racine du carré de cette moitié, ajouté au terme connu passé dans le 2<sup>e</sup> membre. Dans chaque exemple on aura de suite la racine, sans s'astreindre à refaire les calculs précédents sur le trinôme proposé.

Pour  $x^2 - 8x + 15 = 0$ , on trouve

$x = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1$ , c'est-à-dire  $x = 5$  et  $= 3$ .  
De même  $x^2 + 2x = 35$  donne

$$x = -1 \pm \sqrt{35 + 1} = -1 \pm 6, \text{ ou } x = 5 \text{ et } = -7$$

139. Le résultat (2) offre plusieurs cas. Faisons, pour abréger,  $\frac{1}{4}p^2 - q = m$ , d'où  $q = \frac{1}{4}p^2 - m$ , ce qui change  $x^2 + px + q$  en  $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 - m$ , ou  $(x + \frac{1}{2}p)^2 - m$ ; c'est la quantité qu'on veut rendre nulle par la substitution de certains nombres pour  $x$ .

1<sup>o</sup>. Si  $m$  est négatif; comme  $\frac{1}{4}p^2$  est toujours positif, ce cas n'arrive que si  $q$  est positif dans le premier membre de la proposée (1), et  $> \frac{1}{4}p^2$ . Mais alors la proposée revient à...

$(x + \frac{1}{2}p)^2 + m = 0$ ; on veut donc rendre nulle la somme de deux quantités positives, problème visiblement absurde : et comme on trouve alors  $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{-m}$ , le symbole  $\sqrt{-m}$ , absurde en lui-même, servira à distinguer ce cas. Donc, le problème est absurde lorsque les racines sont imaginaires, c'est-à-dire quand  $q$  est positif dans le 1<sup>er</sup> membre de l'équ. (1), et que  $q$  surpasse le carré de la moitié du coefficient  $p$  du 2<sup>e</sup> terme.

Cependant nous dirons encore, dans ce cas, que la proposée a deux racines, parce qu'en assujettissant ces valeurs.....  $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{-m}$ , aux mêmes calculs que si elles étaient réelles, c'est-à-dire les substituant pour  $x$  dans la proposée, elles y satisfont; nous ne donnons ceci que comme un fait algébrique. C'est ainsi que les valeurs négatives, quoique vides de sens en elles-mêmes, peuvent servir de solution à une équation (n<sup>o</sup> 107) sans convenir au problème, à moins qu'on n'y fasse quelque modification.

2<sup>o</sup>. Si  $m$  est nul, ce qui exige que  $q$  soit  $= \frac{1}{4}p^2$  et positif dans le 1<sup>er</sup> membre de la proposée (1), alors  $x^2 + px + q$  revient au carré de  $x + \frac{1}{2}p$ , et les racines sont égales; c'est le passage des racines imaginaires aux réelles.

3<sup>o</sup>. Si  $m$  est positif,  $q$  doit être négatif dans le 1<sup>er</sup> membre, à moins que  $q$  ne soit positif, et  $< \frac{1}{4}p^2$ ; dans ce cas (n<sup>o</sup> 97, III.)

$$(x + \frac{1}{2}p)^2 - m = (x + \frac{1}{2}p + \sqrt{m}) \times (x + \frac{1}{2}p - \sqrt{m}).$$

Tels sont les facteurs du 1<sup>er</sup> membre de la proposée (1); les racines sont  $-\frac{1}{2}p + \sqrt{m}$  et  $-\frac{1}{2}p - \sqrt{m}$ , dont la somme est  $-p$ , et le produit  $\frac{1}{4}p^2 - m$  ou  $q$ .

4<sup>o</sup>. Si  $m$  est un carré, les deux racines sont rationnelles.

5<sup>o</sup>. Si les racines sont réelles et de même signe, il faut que  $\frac{1}{4}p^2$  l'emporte sur le radical, qui a le signe  $\pm$ ; ainsi  $\frac{1}{4}p^2 > \sqrt{m}$  ou  $\frac{1}{4}p^2 > \frac{1}{4}p^2 - q$ , ou enfin  $q > 0$ . Ainsi, quand  $q$  est négatif, les racines ont des signes contraires, et lorsque  $q$  est positif (et  $< \frac{1}{4}p^2$ ), leur signe est le même, mais opposé à celui de  $p$ .

Voy. n<sup>o</sup> 108, 2<sup>o</sup>. pour l'interprétation des racines négatives.

6<sup>o</sup>. Si  $q = 0$ , sans recourir à la formule (2), on a

$$x^2 + px = x(x + p) = 0, \text{ d'où } x = 0 \text{ et } x = -p.$$

7°. Si  $p=0$ , on a  $x^2 + q = 0$ , d'où  $x = \pm \sqrt{-q}$ , valeur réelle ou imaginaire, selon le signe de  $q$ .

8°. Quand la proposée a la forme  $Ax^2 + Bx + C = 0$ , le 1<sup>er</sup> terme ayant un coefficient  $A$ , nous avons dit qu'on le dégage, en divisant tout par  $A$ ; mais on peut aussi rendre ce 1<sup>er</sup> terme un carré, en multipliant l'équ. par  $4A$ : on a

$$4Ax^2 + 4ABx + 4AC = 0;$$

on compare, comme ci-dessus, au carré de  $2Ax + n$ , on voit qu'il faut prendre  $n = B$ , et ajouter  $B^2$  pour compléter le carré; donc

$$(2Ax + B)^2 = B^2 - 4AC, \quad \text{et} \quad x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

C'est ainsi qu'on trouve, en résolvant par rapport à  $y$  l'équ.

$$\begin{aligned} Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \\ y = \frac{-Bx - D \pm \sqrt{B^2 - 4AC}x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF}}{2A} \end{aligned}$$

9°. On a  $Ax^2 + Bx + C = A[(x + \frac{1}{2}p)^2 - m]$ ,  $m$  étant négatif, nul ou positif, suivant que les racines sont imaginaires, égales ou réelles. Dans les deux 1<sup>ers</sup> cas, quelque valeur qu'on substitue pour  $x$ , le multiplicateur de  $A$  étant positif, le produit, ou  $Ax^2 + Bx + C$ , doit avoir le même signe que  $A$ . Mais si  $m$  est positif, soient  $a$  et  $b$  les racines réelles, on a

$$Ax^2 + Bx + C = A(x - a)(x - b),$$

et l'on voit que si l'on donne à  $x$  des valeurs plus grandes ou moindres que  $a$  et  $b$ , le signe du résultat sera le même que celui de  $A$ ; mais il sera différent si  $x$  est compris entre  $a$  et  $b$ . Le trinôme, qui conservait ci-dessus le même signe pour toutes les valeurs de  $x$ , change donc maintenant deux fois de signe, lorsqu'on fait passer  $x$  d'un état compris entre  $a$  et  $b$ , à un autre qui soit ou  $>$  ou  $<$   $a$  et  $b$ .

On pourra s'exercer sur les exemples suivans

1<sup>er</sup> cas.  $9x^2 - 12x + 8 = 0 \dots x = \frac{2}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{-1},$

2<sup>e</sup>.  $\dots 9x^2 - 12x + 4 = 0 \dots x = \frac{2}{3},$

$$\begin{aligned}
 3^{\circ} \text{ et } 4^{\circ}. & \begin{cases} 9x^2 - 12x + 3 = 0 \dots x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}, \text{ ou } x = 1, \text{ et } x = \frac{1}{3}, \\ 2x^2 + 3x + 1 = 0 \dots x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}, \text{ ou } x = -\frac{1}{2}, \text{ et } x = -1, \\ x^2 - x - 2 = 0 \dots x = 1 \pm 2, \text{ ou } x = 2, \text{ et } x = -1, \end{cases} \\
 5^{\circ} \dots & x^2 - 5x = -6 \dots x = 3, \text{ et } x = 2, \\
 7^{\circ} \dots & \begin{cases} x^2 - 9 = 0 \dots x = 3, \text{ et } x = -3, \\ x^2 + 9 = 0 \dots x = \pm 3\sqrt{-1}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

160. I. Trouver un nombre  $x$  tel, qu'en ôtant 2 de son carré le reste soit 1. On a  $x^2 - 2 = 1$ , d'où  $x = \pm \sqrt{3}$ .

II. Partager  $a$  en deux parties telles, que  $m$  fois la 1<sup>re</sup>, multipliée par  $n$  fois la 2<sup>e</sup>, donne le produit  $p$ . On a

$$mx \cdot n(a - x) = p, \text{ d'où } x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{p}{mn}\right)}.$$

Si l'on veut partager  $a$  en deux parties, dont le produit  $p$  soit donné, il faut faire  $m = n = 1$ . Comme les racines sont imaginaires lorsque  $p > \frac{1}{4}a^2$ , on voit que le produit ne peut surpasser le carré de la moitié de  $a$ , c.-à-d. que le carré de  $\frac{1}{2}a$  est le plus grand produit possible qu'on puisse former avec les deux parties de  $a$  (n° 97, III.).

III. Étant donnés le produit  $p$  de deux poids et leur différence, trouver chacun d'eux? On a  $xy = p$ ,  $x - y = d$ ; d'où

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{2}d \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}d^2 + p\right)} \\
 \text{et} \quad y &= -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}d^2 + p\right)}.
 \end{aligned}$$

IV. Trouver deux nombres tels, que leur somme  $a$ , et celle  $b$  de leurs cubes soient données. De  $x + y = a$ ,  $x^3 + y^3 = b$ , on tire  $a^3 - 3a^2x + 3ax^2 = b$ , et faisant  $b = af$ , on a

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{3}a + \sqrt{\left(\frac{1}{3}f - \frac{1}{27}a^3\right)} \\
 \text{et} \quad y &= \frac{1}{3}a - \sqrt{\left(\frac{1}{3}f - \frac{1}{27}a^3\right)}.
 \end{aligned}$$

V. Quel est le nombre dont  $n$  fois la puissance  $p$  est égale à  $m$  fois la puissance  $p + 2$ ?  $x = \pm \sqrt{(n : m)}$ .

VI. Plusieurs personnes sont tenues de payer les frais d'un procès, montant à 800 fr.; mais trois sont insolubles, et les autres, suppléant à leur défaut, sont contraintes de donner chacune 60 fr. outre leur part; on demande le nombre  $x$  des

payans. On a  $\frac{800}{x+3} = \frac{800}{x} - 60$ , d'où  $x^2 + 3x = 40$  et  $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + 40} = -\frac{3}{2} \pm \frac{13}{2}$ ; ainsi, il y avait 5 payans, au lieu de 8. Il est aisé d'interpréter la racine négative  $-8$ .

VII. On a deux points lumineux  $A$  et  $B$  (fig. 1), distans entre eux de  $AB = a$ ; l'intensité de la lumière répandue par  $A$  est  $m$  fois celle de  $B$ ; on demande le lieu  $D$  qui reçoit la même clarté de part et d'autre, sachant que la lumière transmise par un point lumineux décroît en raison du carré de la distance.

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les intensités des lumières que communiquent les foyers  $A$  et  $B$  à la distance 1;  $\frac{\alpha}{1}, \frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{9} \dots$  seront celles que reçoit le point  $D$  lorsqu'il s'écarte de  $A$  à la distance 1, 2, 3...; ainsi,  $\frac{\alpha}{x^2}$  est celle qui répond à l'espace  $AD = x$ ; et comme  $BD = a - x$ , la lumière que  $B$  transmet à  $D$  est  $\frac{\beta}{(a-x)^2}$ ; on a donc  $\frac{\alpha}{x^2} = \frac{\beta}{(a-x)^2}$ , d'où  $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{x}{a-x}\right)^2 = m$ , en posant  $\alpha = m\beta$ ; extrayant la racine, on trouve enfin

$$x = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m} \pm 1}, \text{ ou } x = \frac{a}{m \mp 1} (m \mp \sqrt{m}).$$

En général, on doit éviter la double irrationalité des deux termes d'une fraction (n° 65), et surtout celle du dénominateur. Ici, on a multiplié haut et bas par  $\sqrt{m} \mp 1$ , ce qui a donné (n° 97, III) pour dénominateur  $m - 1$ , et pour numérateur  $a\sqrt{m}(\sqrt{m} \pm 1)$ . On en dira autant des cas semblables.

VIII. Soit donnée une fraction  $\frac{a}{b}$ ; quel est le nombre  $x$  qui, ajouté, soit au numérateur  $a$ , soit au dénominateur  $b$ , donne deux résultats dont le 1<sup>er</sup> soit  $k$  fois le 2<sup>e</sup>, ou

$$\frac{a+x}{b} = \frac{ka}{b+x}, \quad x^2 + (a+b)x = ab(k-1);$$

donc  $x = -\frac{1}{2}(a+b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2 + 4abk}$ .



## IV. DES RAPPORTS.

## Des Proportions.

141. 1°. L'équidifférence  $a, b, c, d$ , équivalent à  $a - b = c - d$ ; d'où  $a + d = c + b$ . Si l'équidifférence est continue, on a  $a, b, d$ , d'où  $2b = a + d$ . (Voy. n° 72.)

2°. Soit la proportion  $a : b :: c : d$ , ou  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ; on a  $ad = bc$ , d'où  $d = \frac{bc}{a}$ . Si la proportion est continue  $a : b : d$ , on a  $b = \sqrt{ad}$ . (Voy. n° 72.)

3°.  $a^2 - b^2 = m - m^2$ , ou  $(a + b)(a - b) = m(1 - m)$ , donne la proportion  $\frac{a + b}{m} = \frac{1 - m}{a - b}$ .

De même  $1 - x^2 = a$  donne  $\frac{1 + x}{1} = \frac{a}{1 - x}$ .

4°. Ajoutons  $\pm m$  aux deux membres de  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ; il vient  $\frac{a \pm mb}{b} = \frac{c \pm md}{d}$ , d'où  $\frac{a \pm mb}{c \pm md} = \frac{b}{d}$ . Si  $m = 1$ ,  $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d}$  (Voy. n° 73.)

5°. Soient  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$  une suite de rapports égaux, de sorte que  $\frac{a}{b} = q$ , ou  $a = bq, c = dq, e = fq \dots$

En ajoutant toutes les équations on a (n° 73, 3°)

$$a + c + e \dots = q(b + d + f + \dots);$$

d'où 
$$\frac{a + c + e + \dots}{b + d + f + \dots} = q = \frac{a}{b}$$

6°. Si  $a : b :: c : d$ , on a

$$a^n : b^n :: c^n : d^n, \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}.$$

### *Des Progressions arithmétiques.*

142. Soit la progression  $\div a.b.c \dots i.k.l$ , dont est  $d$  la raison,  $n$  le nombre des termes; on a les  $(n-1)$  équ.

$$b = a + d, c = b + d \dots, l = k + d;$$

en ajoutant, il vient  $l = a + d(n-1)$ , comme (n° 85).

Cette expression de la valeur du  $n^{\text{ième}}$  terme de la progression est ce qu'on nomme le *terme général*; il représente tour à tour tous les termes, en faisant  $n = 1, 2, 3 \dots$

Soit  $s$  le terme *sommatore* de la progression, c'est-à-dire la somme de ses  $n$  premiers termes; l'on a

$$s = a + b + c + \dots + i + k + l,$$

ou  $s = a + (a + d) + (a + 2d) \dots + a + (n-1)d,$

et aussi  $s = l + (l - d) + (l - 2d) \dots + l - (n-1)d,$

en écrivant le 2<sup>e</sup> membre en sens inverse. Ajoutons ces équ.; comme les termes correspondans produisent la même somme,  $2s$  est visiblement égal à  $a + l$  pris autant de fois qu'il y a d'unités dans  $n$ ; ainsi,  $s = \frac{1}{2} n (a + l)$ . On remarquera qu'en général la somme  $a + l$  des extrêmes est la même que celle de deux termes qui en sont également éloignés, et est le double du terme moyen lorsque le nombre des termes est impair.

143. Reprenons ces deux équations

$$l = a + d(n-1) \text{ et } s = \frac{1}{2} n (a + l)$$

Nous pourrions en tirer deux quelconques des cinq quantités  $a, l, d, n$  et  $s$ , connaissant les trois autres.

Voici divers problèmes relatifs à cette théorie.

I. Trouver  $n$ , connaissant  $a, d$  et  $s$ ? L'élimination de  $l$  donne  $s = an + \frac{1}{2} dn(n-1)$ ; d'où

$$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{d}\right)^2\right]}.$$

Par exemple, un corps qui descend du repos tombe de 4 mètres et  $\frac{2}{10}$  dans la 1<sup>re</sup> seconde de sa chute, du triple dans

$$4 + 2n = 3$$

$$n = -1 \pm \sqrt{1+5} = 2$$

celle qui suit, du quintuple dans la suivante....; on demande combien il mettra de secondes à parcourir 400 mètres. (*Voy. ma Méc.*, n° 157.) La progression :  $4,9 + 4,9.3 + 4,9.5 + \dots$ , donne  $s = 400$ ,  $a = 4,9$ ,  $d = 2a = 9,8$ ; on trouve

$$n = \sqrt{\frac{s}{a}} = \sqrt{\frac{400}{4,9}}, \text{ d'où } n = 9^{\text{e}}, 03 \text{ et } l = 83^{\text{e}}, 6 \text{ environ.}$$

II. Combien une horloge frappe-t-elle de coups à chaque tour du cadran? Si elle ne sonne que les heures, on a.  $1 + 2 + 3 + \dots + 12$ , d'où  $s = 6 \times 13 = 78$ . Si elle sonne les demies, on a  $2 + 3 + 4 \dots + 13$ , et  $s = 90$ .

III. On a un amas de boulets de canon disposés en progression par différence, et composé de 18 rangs dont chacun contient 2 boulets de plus que le précédent; on demande combien il y en a dans le dernier rang et dans l'amas, sachant que le rang supérieur en contient 3. On a  $a = 3$ ,  $n = 18$ ,  $d = 2$ ; et l'on trouve  $l = 37$ ,  $s = 360$ .

IV. Entre deux nombres donnés  $a$  et  $l$ , insérer  $m$  moyens proportionnels par différence. Comme  $m + 2 = n$ , on a

$$l = a + d(m + 1), \text{ d'où } d = \frac{l - a}{m + 1}, \text{ comme (n° 85).}$$

### *Des Progressions par quotient.*

144. Soit la progression :  $a : b : c : d \dots i : l$ , la raison étant  $q$ , on a les  $n - 1$  équations

$$b = aq, c = bq, d = cq \dots l = iq;$$

or, en les multipliant et supprimant les facteurs communs, il vient  $l = aq^{n-1}$ , comme n° 86, c'est le *terme général*. On peut toujours donner à une progression la forme

$$: a : aq : aq^2 : aq^3 \dots : aq^{n-1} ;$$

donc les puissances entières et successives d'une même quantité  $q$  sont en progression par quotient. Il en est de même de toute serie de termes dont les exposans sont en progression par diffé-

rence, telle que  $bx^n + bx^{n+1} + bx^{n+2} + \dots$ . Celle-ci revient à la 1<sup>re</sup> en faisant  $a = bx^n$ ,  $q = x$ .

Ajoutant nos  $n - 1$  équations, il vient

$$(b + c + d \dots + l) = (a + b + c \dots + 1)q.$$

Or, en désignant par  $s$  le terme sommatoire, on a

$$b + c + d \dots + l = s - a, \quad a + b + c \dots + 1 = s - l;$$

donc 
$$s - a = (s - l)q, \text{ ou } s = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

Si la progression est décroissante, tout ceci est également vrai, seulement  $q < 1$ . Mais à mesure que la série se prolonge, la somme  $s$  des termes que l'on considère s'approche de plus en plus de celle  $S$  de la progression entière : soit  $a$  la différence  $S - s$ , qui est indéfiniment décroissante, de plus le dernier terme  $l$  devient en même temps aussi petit qu'on veut, posons ( $n^o$  113);

$$\beta = \frac{lq}{1-q}, \text{ d'où } S - a = \frac{a}{1-q} - \beta, \text{ et } S = \frac{a}{1-q}.$$

On a donc encore comme p. 139, la somme totale d'une progression infinie, dont le 1<sup>er</sup> terme est  $a$ , et la raison  $q < 1$ . Il est visible que notre raisonnement revient à avoir posé  $l = 0$ , comme désignant une quantité infiniment petite.

On rapporte qu'un souverain voulant récompenser Sessa, inventeur du jeu des échecs, lui accorda un présent que sa générosité trouvait trop modique : c'était autant de grains de blé qu'il y a d'unités dans la somme de la progression double  $1 : 2 : 4 : 8 : 16 \dots$  étendue jusqu'au 64<sup>e</sup> terme, attendu que l'échiquier a 64 cases. Cherchons quelle est cette somme. On a  $a = 1$ ,  $q = 2$ ,  $n = 64$ ; d'où  $l = 2^{63}$  et  $s = 2^{64} - 1$ . Cette puissance a été calculée p. 81, et l'on trouve que  $s = 18\,446\,774$  suivi de 12 autres chiffres. Or, un kilogramme de blé ordinaire contient à peu près 26150 grains, et l'on sait qu'un hectare ne produit guère que 1750 kilogrammes de froment, savoir 45 762 500 grains. En divisant  $s$  par ce nombre, on trouve

que Seso demandait le produit en ble de 403 milliards d'hectares environ, c'est-à-dire 8 fois la surface entière du globe terrestre, en y comprenant les mers, les lacs, les déserts, etc.

Les équ  $l = aq^{n-1}$ ,  $s - a = (s - l)q$  servent à résoudre tous les problèmes où, connaissant trois des cinq nombres  $a, l, n, q$  et  $s$ , on demande les deux autres. D'ailleurs, les calculs qu'il faut exécuter ne sont quelquefois praticables que par des méthodes qui ne sont exposées que dans ce qui suivra. Par ex.,  $a, n$  et  $s$  étant donnés, on ne peut obtenir  $q$  qu'en résolvant l'équ.  $aq^n - sq + s = a$ , qui est du degré  $n$ . Lorsque l'exposant  $n$  est inconnu, on doit recourir à la doctrine des log. n° 147, 3°.

### Des Logarithmes.

145. Faisons varier  $x$  dans l'équ.  $y = a^x$ , et observons les variations correspondantes de  $y$

1°. Si  $a > 1$ , en faisant  $x = 0$ , on a  $y = 1$ ;  $x = 1$ , donc  $y = a$ . A mesure que  $x$  croîtra depuis 0 jusqu'à 1; et de là à l'infini,  $y$  croîtra de 1 vers  $a$ , et ensuite à l'infini, de sorte que quand  $x$  passe par toutes les valeurs intermédiaires, en suivant la loi de continuité,  $y$  croît aussi, quoique bien plus rapidement. Si l'on prend pour  $x$  des valeurs négatives, on a  $y = a^{-x}$ , ou (n° 131)  $y = \frac{1}{a^x}$ . Ainsi, plus  $x$  croît, et plus cette fraction  $y$  décroît, de sorte qu'à mesure que  $x$  augmente négativement  $y$  décroît de 1 vers 0,  $y = 0$  répond à  $x$  infini.

2°. Si  $a < 1$ , on fera  $a = \frac{1}{b}$ ,  $b$  sera  $> 1$ , et l'on aura  $y = \frac{1}{b^x}$  ou  $y = b^x$ , suivant qu'on prendra  $x$  positif ou négatif. On retombe donc sur le même cas, avec cette différence que  $x$  est positif lorsque  $y < 1$ , et négatif pour  $y > 1$ ;

3°. Si  $a = 1$ , on a  $y = 1$  quel que soit  $x$ .

Pourvu que  $a$  soit autre que l'unité, on peut donc dire qu'il y a toujours une valeur pour  $x$  qui rend  $a^x$  égal à un nombre donné quelconque  $y$ . L'usage perpétuel qu'on fait des belles pro-



propriétés de l'équation  $y = a^x$  exige qu'on fixe des dénominations à ses parties, afin d'éviter les circonlocutions. On nomme  $x$  le *logarithme* du nombre  $y$ ; la quantité arbitraire et invariable  $a$  est la *base*. Donc le *logarithme* d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base pour produire ce nombre.

Lorsqu'on écrit  $x = \text{Log. } y$ , pour designer que  $x$  est le logarithme du nombre  $y$ , ou que  $y = a^x$ , la base  $a$  est sous-entendue, parce qu'une fois choisie, elle est supposée demeurer fixe. Mais si on la change, on doit indiquer la nouvelle base, c.-à-d. de quel système de logarithmes il s'agit. C'est ainsi que  $10^3 = 1000$ ,  $2^5 = 32$  indiquent que 3 est le logarithme de 1000, et que 5 est celui de 32; mais la base est 10 dans le 1<sup>er</sup> cas; elle est 2 dans le second.

146. On tire de là plusieurs conséquences

1°. Dans tout système de logarithmes, celui de 1 est zéro, et celui de la base  $a$  est un.

2°. Si la base  $a$  est  $> 1$ , les logarithmes des nombres  $> 1$  sont positifs, les autres sont négatifs. Le contraire a lieu si  $a < 1$ .

3°. La base étant fixée, chaque nombre n'a qu'un seul logarithme réel; mais ce nombre a visiblement un log. différent pour chaque valeur de la base, en sorte que tout nombre a une infinité de logarithmes réels. Par ex., puisque  $9^2 = 81$ ,  $3^4 = 81$ , 2 et 4 sont les log. du même nombre 81, suivant que la base est 9 ou 3.

4°. Les nombres négatifs n'ont point de logarithmes réels, puisqu'en parcourant la série de toutes les valeurs de  $x$  depuis  $-\infty$  jusqu'à  $+\infty$ , on ne trouve pour  $y$  que des nombres positifs depuis 0 jusqu'à  $+\infty$ .

La composition d'une table de log. consiste à déterminer toutes les valeurs de  $x$  qui répondent à  $y = 1, 2, 3, \dots$  dans l'équ.  $y = a^x$ . Si l'on suppose  $a^m = m$ , en faisant

$x = 0$	$a$	$2a$	$3a$	$4a$	$5a \dots$	logarithmes.
ou trouve $y = 1$	$m^1$	$m^2$	$m^3$	$m^4$	$m^5 \dots$	nombre;

les log. croissent donc en progression par différence, tandis que les nombres croissent en progression par quotient, 0 et 1 sont les deux 1<sup>ers</sup> termes : les raisons sont les nombres arbitraires  $a$  et  $m$ . On peut donc regarder les systèmes de valeurs de  $x$  et  $y$  qui satisfont l'équ.  $y = a^x$ , comme classes dans ces deux progressions, ce qui met d'accord les deux définitions que nous avons données des log (n<sup>os</sup> 87 et 145).

Le signe *Log.* sera dorénavant employé à désigner le logarithme d'un nombre dans un système indéterminé ; réservant le signe *log.* pour les log. de Briggs, dont la base est 10

147. Démontrons par Algèbre les propriétés des logarithmes.

1<sup>o</sup>. Soient  $x$  et  $x'$  les log. des nombres  $y$  et  $y'$ , ou  $x = \text{Log. } y$ ,  $x' = \text{Log. } y'$  : on a  $a^x = y$ ,  $a^{x'} = y'$  : en multipliant et divisant ces deux équ. l'une par l'autre, on obtient

$$a^{x+x'} = yy', \quad a^{x-x'} = \frac{y}{y'}.$$

Mais il suit de la définition que les exposans  $x + x'$  et  $x - x'$  sont les log. de  $yy'$  et  $\frac{y}{y'}$  ;

donc  $\text{Log } y + \text{Log } y' = \text{Log } (yy')$ ,

$$\text{Log } y - \text{Log } y' = \text{Log } \left( \frac{y}{y'} \right).$$

2<sup>o</sup>. Si l'on élève à la puissance  $m$  l'équ.  $y = a^x$ , et si l'on en extrait la racine  $m^{\text{e}}$ , on a  $y^m = a^{mx}$ ,  $\sqrt[m]{y} = a^{\frac{x}{m}}$  : la définition donne  $mx = \text{Log } (y^m)$ ,  $\frac{x}{m} = \text{Log } \sqrt[m]{y}$  ; donc

$$\text{Log } y^m = m \text{Log } y, \quad \text{Log } \sqrt[m]{y} = \frac{\text{Log } y}{m},$$

ces résultats sont conformes à ce qu'on a vu (n<sup>o</sup> 88).

3<sup>o</sup>. Pour résoudre l'équ.  $c = a^x$ , dans laquelle  $c$  et  $a$  sont données et  $x$  inconnu, on égale les log. des deux membres et l'on en tire  $\text{Log } c = x \text{Log } a$  ; une simple division donne donc

$$x = \frac{\text{Log } c}{\text{Log } a}.$$

On peut donc trouver la valeur de l'exposant  $n$  dans l'équ.  $l = aq^{n-1}$ , du n° 144, relative aux progressions par quotient :

$$\text{Log } l = \text{Log } a + (n-1) \text{Log } q, \text{ d'où } n = 1 + \frac{\text{Log } l - \text{Log } a}{\text{Log } q}.$$

L'inconnue étant  $x$  dans l'équ.  $Aa^x + Ba^{x-1} + Ca^{x-2} \dots = P$ ;  
on écrit  $a^x \left( A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2} \dots \right) = P$ , ou  $Qa^x = P$ ;

$$\text{d'où} \quad x = \frac{\log P - \log Q}{\log a}.$$

Dans  $a^z = b$ , si  $z$  est dépendant de l'inconnue  $x$ , et qu'on ait  $z = Ax^m + Bx^{m-1} \dots$ ; comme  $z = \frac{\log b}{\log a} =$  un nombre connu  $K$ , il reste à résoudre l'équ. du degré  $m$ ,  $K = Ax^m + Bx^{m-1} \dots$ .  
Soit, par ex.,  $4\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-5x+4} = 9$ ; on en tire  $(x^2-5x+4) \log \frac{2}{3} = \log \frac{9}{4}$ ;  
donc  $x^2 - 5x + 4 = -2$ , équ. du 2<sup>e</sup> degré qui donne  $x = 2$ ,  
et  $= 3$ .

4°. Soient deux nombres  $y$  et  $y + m$ ; la différence des log. pris dans un même système quelconque est

$$\text{Log } (y + m) - \text{Log } y = \text{Log} \left( \frac{y+m}{y} \right) = \text{Log} \left( 1 + \frac{m}{y} \right),$$

quantité qui s'approche de  $\text{Log } 1$ , ou zéro, à mesure que  $\frac{m}{y}$  décroît, et qui est d'autant moindre que  $y$  est plus grand : donc les log. de deux nombres différent moins quand ces nombres sont plus grands et plus voisins. C'est ce qu'on a vu n° 91, III.

148. Lorsqu'on a calculé une table de log. dans un système dont la base est  $a$ , il est facile d'en former une autre dont la base soit  $b$ ; car dans l'équ.  $a^x = y$ ,  $x$  est le log. de  $y$  dans le système qui a pour base  $a$  : or prenons les log. des deux nombres dans le système  $b$ ; nous aurons  $x \text{Log } a = \text{Log } y$ . Ainsi pour trouver le log. de  $y$  dans le 2<sup>e</sup> système, il faut multiplier  $x$ , ou le log. de  $y$  dans le 1<sup>er</sup> système, par  $\text{Log } a$  : et si l'on multiplie par  $\text{Log } a$  tous les log. de la 1<sup>re</sup> table, on en formera une nouvelle pour la base  $b$ . Ce facteur constant  $\text{Log } a$ , qui traduit

ainsi tous les log. du système  $a$  dans le système  $b$ , est appelé *module*; c'est le log. de la première base  $a$  calculé dans le système  $b$ ; et si l'on divise  $\text{Log } y$  par  $x$ , qui sont les logarithmes d'un même nombre quelconque dans les deux systèmes, le quotient sera le module  $\text{Log } a$  relatif à ces systèmes, et par conséquent sera constant pour tous les nombres.

Lorsqu'il arrive qu'on trouve moins d'avantage à prendre la base  $= 10$ , qu'à préférer un autre système, il est donc aisé, à l'aide d'une seule table de log., tels que ceux de Briggs, de calculer tout autre log. dans ce nouveau système. Par ex., le  $\log \frac{2}{3}$ ; dans le système dont la base est  $\frac{5}{7}$ , est  $\frac{\text{Log } \frac{2}{3}}{\text{Log } \frac{5}{7}} = \frac{\text{Log } 2 - \text{Log } 3}{\text{Log } 5 - \text{Log } 7}$ ; la base est ici ce qu'on veut, et si on la prend  $= 10$ , tout devient connu, et l'on a  $\frac{-0,17609125}{-0,14612804} = 1,2050476$  pour le log. cherché.

Parcillemeut  $\text{Log } \frac{2}{3}$ , dans le système  $\frac{3}{2}$ , est  $\frac{\log \frac{2}{3}}{\log \frac{3}{2}} = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 3 - \log 2}$  ou  $-1$ ; ce qui est d'ailleurs évident, puisque l'équ.  $y = a^x$  devient ici  $\frac{2}{3} = (\frac{3}{2})^x = (\frac{2}{3})^{-x}$ , et  $x$  est visiblement  $-1$ .

• 149. Il importe de s'exercer à l'usage des logarithmes dans les calculs algébriques; voici divers exemples :

$$1^{\circ}. \log (a.b.c.d \dots) = \log a + \log b + \log c + \log d \dots,$$

$$2^{\circ}. \log \left( \frac{abc}{de} \right) = \log a + \log b + \log c - \log d - \log e,$$

$$3^{\circ}. \log (a^m.b^n.c^p \dots) = m \log a + n \log b + p \log c \dots,$$

$$4^{\circ}. \log \left( \frac{a^m b^n}{c^p} \right) = m \log a + n \log b - p \log c,$$

$$5^{\circ}. \log (a^2 - x^2) = \log [(a+x) \times (a-x)] = \log (a+x) + \log (a-x),$$

$$6^{\circ}. \log \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{2} \log (a+x) + \frac{1}{2} \log (a-x),$$

$$7^{\circ}. \log (a^3 \sqrt[4]{a^3}) = 3 \log a + \frac{3}{4} \log a = \frac{15}{4} \log a,$$

$$8^{\circ}. \log \sqrt[n]{(a^3 - x^3)^m} = \frac{m}{n} \log (a-x) + \frac{m}{n} \log (a^2 + ax + x^2), \text{ (p. 139).}$$

En ajoutant et ôtant  $ax$  du trinome, il devient  $(a+x)^2 - ax$ ; si l'on pose  $z^2 = ax$ ,  $z$  sera facile à trouver par log., et l'on

aura  $(a+x)^2 - x^2$  ou  $(a+x+z)(a+x-z)$ ; donc

$$\log \sqrt[n]{(a^3 - x^3)^m} = \frac{m}{n} [\log(a-x) + \log(a+x+z) + \log(a+x-z)].$$

Ce calcul résout  $a^3 - x^3$  en ses facteurs et permet l'emploi des log.

9°.  $\sqrt{(a^3 + x^3)}$ , en posant  $2ax = s^2$ , devient  $\sqrt{[(a+x)^2 - s^2]}$ ,

$$\log \sqrt{(a^3 + x^3)} = \frac{1}{2} [\log(a+x+s) + \log(a+x-s)].$$

$$10°. \log \frac{\sqrt{(a^3 - x^3)}}{(a+x)^2} = \frac{1}{2} [\log(a-x) - 3 \log(a+x)].$$

11°. Pour insérer  $m$  moyens par quotient entre  $a$  et  $l$ , il faut faire  $n = m + 2$  dans l'équ.  $l = aq^{n-1}$  (n° 144), d'où l'on tire la raison  $q = \sqrt[n]{\frac{l}{a}}$ , et  $\log q = \frac{\log l - \log a}{m+1}$ . Les divers

termes  $aq, aq^2, \dots$  ont pour log.,  $\log a + \log q, \log a + 2 \log q \dots$ . Ainsi, pour insérer 11 moyens entre 1 et 2, comme ici  $\log a = 0$ , on trouve  $\log q = \frac{1}{12} \times \log 2 = 0,0250858$ , et  $q = 1,059463$ ; les log. des termes consécutifs sont  $2 \log q, 3 \log q \dots$ , et la progression est (c'est la *génération harmonique* de Rameau)

$$\div 1 : 1,059463 : 1,122461 : 1,189207 : \dots : 1,887747 : 2.$$

12°. La base du système étant  $a$ , on a  $a^{\log z} = z$ ; car d'après la définition des log. dans l'équ.  $a^y = z$ ,  $y$  est le log. de  $z$ .

De même  $a^h \log z = a^{\log(z^h)} = z^h.$

13°. Soit  $x$  l'inconnue de l'équ.  $b^{n - \frac{a}{x}} = cmx. f^{x-p}$ ; on en tire  $(n - \frac{a}{x}) \log b = mx. \log c + (x-p) \log f$ : il reste donc à résoudre l'équ. du 2° degré

$$(m \log c + \log f) x^2 - (n \log b + p \log f) x + a \log b = 0.$$

$$14°. c^{mx} = a. b^{n-x-1} \text{ donne } x = \frac{\log a - \log b}{m \log c - n \log b}.$$

15°. La population d'une ville s'accroît chaque année de  $\frac{1}{10}$ ; combien y aura-t-il d'habitans au bout d'un siècle, le nombre



étant actuellement 100 000? Faisons  $n = 100\ 000$ ; au bout d'un an, la population sera  $n + \frac{1}{10}n = n \frac{11}{10} = n'$ . Après l'année suivante,  $n'$  deviendra de même  $n' \frac{11}{10} = n (\frac{11}{10})^2$ . . . On trouve ainsi qu'au bout de 100 ans, le nombre des habitans sera

$$n \left(\frac{11}{10}\right)^{100} = x = 2\ 654\ 874,$$

$$\begin{array}{r} \log 31 = 1,49136169 \\ -\log 30 = 1,47712125 \\ \hline 0,01424044 \\ 100 \text{ fois. } . \quad 1,424044 \\ \hline \log n = 5,000000 \\ \log x = 6,424044 \end{array}$$

comme le montre le calcul. Si l'accroissement annuel de la population est d'un  $r$ , on trouve de même que le nombre primitif  $n$  des habitans devient, après  $q$  années,  $x = n \left(\frac{1+r}{r}\right)^q$ . On peut prendre pour inconnue l'une des quantités  $x$ ,  $n$ ,  $r$  ou  $q$ , les autres étant données; et l'on trouve

$$\log x = \log n + q[\log(1+r) - \log r], \quad \log n = \log x - q[\log(1+r) - \log r],$$

$$q = \frac{\log x - \log n}{\log(1+r) - \log r}, \quad \log\left(1 + \frac{1}{r}\right) = \frac{\log x - \log n}{q}.$$

### Problèmes dépendans des Proportions.

150. *Règle d'intérêt.* Ce qu'on a dit n° 80, prouve que le capital  $C$  placé à  $i$  pour cent par an; produit en  $j$  jours, l'intérêt simple

$$x = \frac{Cij}{36000} = C \times \frac{j}{6000} \times \frac{i}{60}.$$

et comme  $j$  peut être décomposée en parties aliquotes ou diviseurs de 6000, et  $i$  en diviseurs de 60, on retrouve le procédé de calcul exposée n° 80.

*Intérêt composé.* Quand chaque année on laisse le capital s'accroître des intérêts échus, voici ce qui arrive. Si  $r$  fr. rapportent 1 fr après un mois ou un an, le capital  $n$  s'est accru de  $\frac{a}{r}$ , et est devenu

$$n' = n + \frac{a}{r} = n \left(\frac{1+r}{r}\right) = nq.$$

en faisant pour abrégé,  $q = \frac{1+r}{r} = 1 + \frac{1}{r}$ .

Mais ce nouveau capital  $a'$  place durant le mois ou l'an qui suit, devient de même  $a'q$ , ou  $aq^2$ . Ainsi, on a successivement  $aq^2$ ,  $aq^3$ , . . . et après  $t$  fois l'unité de temps, le capital accumulé avec les intérêts échus, est

$$x = aq^t = a \left( \frac{1+r}{r} \right)^t.$$

Cette équ. donnera l'un des quatre nombres  $a$ ,  $t$ ,  $x$  et  $r$  ou  $q$ , les trois autres étant connus. Si l'on veut que l'intérêt soit stipulé à tant pour cent, on fera  $ri = 100$ ,  $q = 1 + 0,01 \times i$ .

Par ex., un homme destine une somme de 10 000 fr. à payer un bien de 12 000 fr.; il place à cet effet son capital à 5 pour cent par an, et y joint chaque année les intérêts échus : on demande à quel instant son but sera rempli; on a  $i = 5$ ,  $r = 20$ ,  $q = \frac{21}{20}$ , puis

$$12\,000 = 10\,000 \times \left( \frac{21}{20} \right)^t, \text{ ou } 6 = 5 \times \left( \frac{21}{20} \right)^t;$$

d'où l'on tire la valeur de l'exposant  $t$ , par le théorème n° 147, 3°. savoir,  $t = 3$  ans et 9 mois environ.

La table ci-jointe suppose qu'un capital de 1000 fr. est placé à 4, 5 ou 6 p. % par an; que l'intérêt est payé par semestre et que chaque intérêt est immédiatement joint au capital pour devenir productif d'intérêt.

On y voit qu'une somme de 1000 fr. à 5 p. %, l'an, produira 1996<sup>l</sup>,50 au bout de 14 ans, en cumulant sans cesse les intérêts semestriels.

C'est donc la même chose de payer actuellement 1000 fr. ou de donner 1996<sup>l</sup>,50 dans 14 ans, quand le taux d'intérêt annuel est 5 p. % : celui qui est obligé de payer 1996<sup>l</sup>,50 dans 14 ans, sans intérêt, peut escompter, ou se libérer, en payant de suite seulement 1000 fr.

On voit aussi que le capital est doublé en moins de 14 ans et demi, à 5 p. % l'an; il serait triple en 19 ans à 6 p. %.

Quand le capital est 2 ou 3 mille francs, il faut doubler ou tripler les nombres ci-dessus, et ainsi proportionnellement pour tout autre capital. Par exemple, 2500 fr. capitalisés avec les intérêts pendant 12 ans produiront  $2,5 \times 1808<sup>l</sup>,73 = 4521<sup>l</sup>,82$ .

mont de 1000 fr. par intérêts composés de 6 en 6 mois,  
aux taux de 4, 5 et 6 pour cent par an.

%	3 p. %	4 p. %	ANS	4 p. %	5 p. %	6 p. %
100	1025 <sup>f</sup> 00	1030 <sup>f</sup> 00		1515 <sup>f</sup> 67	1679 <sup>f</sup> 58	1860 <sup>f</sup> 59
90	1050,63	1060,90	11	1545,98	1721,57	1916,10
81	1076,89	1092,73		1576,90	1764,61	1973,59
73	1103,81	1125,51	12	1604,44	1808,73	2032,79
68	1131,41	1159,27		1640,61	1853,94	2093,78
65	1159,69	1194,05	13	1673,42	1900,29	2156,59
63	1188,69	1229,87		1706,80	1947,80	2221,29
61	1218,40	1266,77	14	1741,02	1996,50	2287,93
59	1248,86	1304,77		1775,84	2046,41	2356,57
57	1280,08	1343,92	15	1811,36	2097,57	2427,26
55	1312,09	1384,23		1847,50	2150,01	2500,08
54	1344,81	1425,76	16	1884,53	2203,76	2575,08
53	1378,51	1468,53		1922,23	2258,85	2652,34
52	1412,97	1512,50	17	1960,68	2315,32	2731,91
51	1448,30	1557,68		1999,89	2373,21	2813,86
50	1484,51	1604,71	18	2039,89	2432,54	2898,28
49	1521,62	1652,85		2080,69	2493,35	2985,23
48	1559,76	1702,42	19	2122,30	2555,68	3074,78
47	1598,65	1753,51		2164,74	2619,57	3167,03
46	1638,62	1806,11	20	2208,04	2685,06	3262,04

la même chose de payer actuellement 2500<sup>f</sup>, ou de donner 32 dans 12 ans.

Il faut payer 30000<sup>f</sup> dans 5 ans sans intérêt, on pourrait payer actuellement, en donnant une somme qu'on trouve en proportion : si 1280<sup>f</sup>,08 deviennent 30000<sup>f</sup>, 1000<sup>f</sup> de 1000<sup>f</sup> = 23436<sup>f</sup>,04, somme à payer de suite, au lieu de 30000<sup>f</sup> dans 5 ans, au taux de 5 p. % par an.

**Annuités.** On nomme ainsi la rente d'un capital  $a$ , de telle sorte qu'en payant chaque année une somme  $x$ , qui se vacons la même, cette somme soit formée des intérêts de  $a$  en à-compte sur le capital, lequel se réduisant ainsi de  $x$ , soit rendu nul après un temps déterminé.

Il vaut  $aq$  après la 1<sup>re</sup> année ; on paie  $x$ , et l'on ne trouve que  $a' = aq - x$ . Après le 2<sup>e</sup> paiement  $x$ ,  $a'$  se trouve réduit à  $a'q - x$ , ou  $aq^2 - qx - x$  : continuant de multiplier par  $q$  et à retrancher  $x$ , pour avoir ce qui

On suppose que, chaque année, on en vient enfin à payer par l'emprunteur dont encore après  $t$  années, lorsqu'il effectue son  $t^{\text{e}}$  paiement  $x$  (n° 99, 144).

$$x = ar - arq - arq^2 \dots - x$$

$$x = ar - x(q + q^2 + q^3 \dots + 1) = ar - x\left(\frac{q^{t+1}-1}{q-1}\right)$$

$$x = a - x\left(\frac{1+r}{r}\right) + x.$$

Si  $q = 1 + r$ . Si l'emprunteur s'est acquitté,  $x = 0$ .  
Si non,  $x = a$ .

$$x = \frac{ar - (a-x)}{q-1} = \frac{a}{r} \times \frac{(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}$$

On voit on peut prendre ici pour inconnue l'une quelconque de  $x, a, r, q, t$ , les autres étant données. Les log. sont ici d'un usage très commode, ou même indispensable. On résout l'équ. par rapport à l'exposant, on trouve  $r^t x + a - ar = x$ , d'où (n° 147, 3°.)

$$\frac{\log x - \log x + a - ar}{\log r} = \frac{\log x + \log r - \log (rx - a)}{\log (1+r) - \log r}$$

De même, si on veut que l'inconnue soit  $x$  ou  $a$ , on pose

$$y = \frac{rx - a}{x}$$

$$x = \frac{a}{r-y}, \quad a = x(r-y).$$

On voit que connaissant  $x$  ou  $a$ , lorsque  $y$  sera connu. Or, substituant ces valeurs dans l'équ. précédente, on trouve  $(1+r)^t y = r^{t+1}$ .

On voit aussi que pour établir les rentes dont le capital est connu, on peut se servir de la mort du prêteur, et qu'on suppose que le prêteur doit encore vivre pendant  $t$  années. On suppose que le prêteur doit encore vivre pendant  $t$  années à partir de capital  $a$ , et l'on demande quelle rente on doit lui payer chaque année, pour qu'à l'expiration de ces  $t$  années, le capital soit encore le même : cette rente se trouve par la valeur présente de  $x = a$ , par ex., l'intérêt de

100 fr. en perpétuel est 5 (5 pour cent, ou le denier 20), on a  $r = 20$ ; et si l'on prend  $a = 100$  fr. pour capital, on obtient

$$y = 20 \left(\frac{10}{11}\right)^t = \frac{20}{1,05^t}, \quad x = \frac{100}{20 - y}.$$

Il est vrai qu'on ne sait pas d'avance combien d'années le prêteur doit encore vivre; mais on le suppose, d'après les tables de mortalité: et quoique cette présomption puisse être fautive, elle devient exacte pour un grand nombre d'individus pris ensemble, parce que les uns gagnent précisément en durée de la vie ce que les autres perdent. On sait, par expérience, quelle est la durée de vie probable d'un individu dont l'âge est connu. La 1<sup>re</sup> ligne est celle des âges, la 2<sup>e</sup> le nombre  $t$  d'années qui restent probablement à vivre. (Voy. l'*Annu du Bur. des Long.*)

Âges... 1. 5 .10.15.20 .25 .30 .35.40.45.50.55.60.65 .70.75.80 ans.  
 $t$ ... 37.4 $\frac{1}{4}$ .43.39 35 $\frac{1}{2}$ .32 $\frac{1}{2}$ . 29 $\frac{1}{2}$  26 23 20.17.14 11. 8 $\frac{1}{2}$  6 $\frac{1}{2}$ . 5. 3 $\frac{1}{2}$  ans...

C'est sur cette probabilité qu'on établit l'intérêt des rentes viagères. Ainsi un homme de 40 ans pouvant encore espérer 23 ans d'existence,  $t = 23$ , et l'on trouve  $y = \frac{20}{1,05^{23}} = 6,5$  environ, d'où  $x = 7,4$ : le capital doit être placé en viager à 7,4 pour cent par an. Les chances réservées aux membres des sociétés connues sous le nom de *Tontines* sont aussi réglées sur le même système.

152. *Escomptes.* Soit  $a$  le capital,  $i$  l'intérêt de 100 fr. par mois,  $r$  le denier,  $t$  le nombre de mois,  $\frac{ati}{100}$  est l'intérêt; ainsi, pour l'escompte en dehors, la somme à payer pour le capital  $a$  est

$$x = a \left(1 - \frac{ti}{100}\right) = a \left(1 - \frac{t}{r}\right).$$

Pour l'escompte en dedans, il faut raisonner ainsi: puisque  $100 + ti$  doit être réduit à 100, à combien  $a$  est-il réduit? d'où

$$x = \frac{100 a}{100 + ti} = \frac{ar}{r + t}.$$



Si la somme  $S$  n'est exigible que dans  $t$  mois, et qu'on veuille avoir égard aux intérêts des intérêts durant ce temps, il faut recourir à la formule de la p. 218; on trouve que le capital  $S$  doit être réduit à

$$a = S \left( \frac{r}{1+r} \right)^t = S \left( 1 + \frac{1}{r} \right)^{-t} = \frac{S}{q^t}.$$

153. *Règles de fausses positions.* Soit  $ax = b$  l'équation qui lie entre elles les parties d'une question; si l'on suppose à  $x$  une valeur arbitraire  $s$ , et qu'on l'assujettisse à satisfaire aux conditions du problème, ce ne serait que par hasard qu'on trouverait  $as = b$ . Supposons donc qu'on ait  $as = c$ ; en divisant terme à terme par  $ax = b$ , on trouve  $\frac{s}{x} = \frac{c}{b}$ : ainsi le résultat qu'on obtient est à celui qu'on doit obtenir, comme le nombre supposé est à l'inconnue.

Cherchons un nombre dont la  $\frac{1}{2}$ , le  $\frac{1}{4}$  et le  $\frac{1}{5}$  réunis fassent 456.

Supposons que 200 soit ce nombre; sa moitié, son quart et son cinquième forment 190, au lieu de 456; ainsi 200 n'est pas le nombre cherché: on posera la proportion

$$190 : 456 :: 200 : x, \text{ d'où } x = 480.$$

Combien faudrait-il de temps pour remplir un bassin à l'aide de quatre robinets, dont l'un le remplirait en 2 heures, le 2<sup>e</sup> en 3, le 3<sup>e</sup> en 5, le 4<sup>e</sup> en 6. Supposons qu'il fallût une heure; le premier robinet emplirait la moitié du bassin, le 2<sup>e</sup> le  $\frac{1}{3}$ , le 3<sup>e</sup> le  $\frac{1}{5}$ , le 4<sup>e</sup> le  $\frac{1}{6}$ ; et comme on trouve  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6}{5}$ , au lieu de 1, il y avait erreur à supposer une heure; on dira  $\frac{6}{5} : \frac{5}{5} :: 1 : x = \frac{5}{6}^h = 50$  minutes.

Ce procédé, quoique applicable aux règles de société, d'intérêt, etc.. ne l'est pas à tous les problèmes du premier degré, puisque l'équation la plus générale est  $ax + b = cx + d$ . Si la supposition  $x = s$  ne rend pas  $as + b$  égal à  $cs + d$ , il en résultera une erreur  $e$ , de sorte que  $as + b - (cs + d) = e$ ; retranchant de là  $ax + b - (cx + d) = 0$ , on a  $(a - c)(s - x) = e$ . Une autre supposition  $s'$  qui entraînerait l'erreur  $e'$ , donnerait

$(a-c)(s'-x)=e'$  : divisant ces résultats terme à terme, on a

$$\frac{s-x}{s'-x} = \frac{e}{e'}, \text{ d'où } x = \frac{es' - e's}{c - c'}.$$

Ainsi, multipliez la 1<sup>re</sup> erreur par la 2<sup>e</sup> supposition, et réciproquement; retranchez les produits, en ayant égard aux signes des erreurs; divisez ensuite par la différence des erreurs, le quotient sera l'inconnue. C'est en cela que consiste la règle de double fausse position, applicable à tous les problèmes du premier degré.

Dans notre dernière question, la supposition de  $x = 1^h$ , a donné  $\frac{6}{5}$ , et par conséquent l'erreur  $+\frac{1}{5}$ . En faisant  $x = \frac{1}{2}^h$ , on a  $\frac{2}{5}$  pour résultat, et  $-\frac{3}{5}$  d'erreur. J'écris ces nombres comme on le voit ci-contre, je multiplie en croix, et je retranche; j'ai  $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$  ou  $\frac{7}{10}$ ; la différence des erreurs est  $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$  ou  $\frac{4}{5}$ , enfin je divise  $\frac{7}{10}$  par  $\frac{4}{5}$ , et j'ai  $x = \frac{7}{8}$ .

Suppos.	Erreurs.
1 heure $+$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$ . . .	$-\frac{3}{5}$

Un père a 40 ans, son fils en a 12; quand l'âge du père sera-t-il triple de celui du fils (page 152)? Je suppose 5 ans: le père aura alors 45 ans, le fils 17; le triple de 17, au lieu de produire 45, donne 6 ans de plus. En supposant 1 an, l'erreur est de  $-2$ . Les produits réciproques des erreurs par les suppositions donnent 16 pour différence; divisant par la différence des erreurs, qui est 8, j'ai 2: c'est dans 2 ans que l'âge du père sera triple de celui du fils.

Suppos.	Erreurs.
5 ans	6
1	-2
$\frac{1}{6}$	$+\frac{16}{6}$
6	$+$ 2

---

# LIVRE TROISIÈME.

## ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

---

LA GÉOMÉTRIE est la science qui se propose de mesurer l'ÉTendue et d'en considérer les formes et les propriétés. Tout corps a trois dimensions, *Longueur, Largeur et Épaisseur* ou *Profondeur* : les limites qui le déterminent en sont la *Surface*. Mais les surfaces d'un corps, en se rencontrant deux à deux, sont elles-mêmes terminées par des *Lignes*; les limites qui bornent les lignes sont des *Points*. Ce sont ces diverses limites des corps qui nous servent à reconnaître leur *Figure*.

Quoiqu'il n'y ait pas de corps sans trois dimensions, on fait souvent abstraction de l'une d'elles ou de deux : par ex., si l'on parle de la grandeur d'un champ, ou de la hauteur d'un édifice, on n'a égard qu'à une surface ou une ligne. Afin de procéder du simple au composé, par une gradation qui facilite l'étude, nous diviserons la Géométrie en trois parties : la première traitera des *Lignes*, la seconde des *Surfaces*, la troisième des *Volumes*.

### I. DES LIGNES.

---

#### *Des Droites, des Angles et des Triangles.*

154. On peut regarder une ligne comme la trace que laisse un point A (fig. 1) qui se meut vers un autre point B. On dit que la ligne est *droite* quand, en la faisant pivoter autour de deux de ses points A et B (fig. 1), aucun des autres points de AB, n'éprouve de déplacement : sinon, la ligne est com-

posée de lignes droites brisées AC, CD, DB (fig. 2) disposées bout à bout ; ou bien cette ligne n'a aucune partie rectiligne et est appelée *Courbe* AMB (fig. 3).

Donc 1<sup>o</sup> lorsqu'une ligne AB (fig. 1) est droite, et qu'on prend sur son cours deux points C, D, la droite CD qui joint ces points se confond dans toute sa longueur avec les points de AB ; et si l'on imagine au-delà des extrémités C et D d'une droite CD, deux autres points A et B, tels que la droite AB coïncide avec CD ; ces points A et B sont dits sur le *prolongement* de la droite CD.

2<sup>o</sup>. Toute droite CD doit être conçue prolongée indéfiniment par ses deux bouts.

3<sup>o</sup>. Deux droites qui ont deux points communs, coïncident ensemble.

4<sup>o</sup>. Deux droites ne peuvent se couper qu'en un seul point, puisque si elles avaient deux points communs, elles coïncideraient.

Un *Plan* est une surface sur laquelle est appliquée toute ligne droite joignant deux points quelconques de cette surface. Etant donnés trois points non en ligne droite, on peut toujours faire passer un plan par ces trois points, puisqu'en tournant autour de la droite qui joint deux de ces points, on pourra faire passer le plan par le 3<sup>e</sup> point : et il est évident que la position absolue du plan sera alors *déterminée*, c.-à-d. fixée de manière qu'un autre plan ne pourrait contenir ces trois points sans coïncider avec le premier.

155. Lorsqu'on veut ajouter deux lignes droites ou deux longueurs BC, CA (fig. 1), on porte l'une CA sur le prolongement de l'autre BC, et la somme est  $BA = BC + CA$ . Si les parties BC, CA sont égales, BA est double de CA : on peut de même tripler CA, etc.

Pour soustraire CA de BA, on trouve  $BC = BA - CA$  ; ainsi on sait retrancher une longueur d'une autre. En général l'addition ou la soustraction de tant de droites qu'on voudra, la multiplication, la division des longueurs sont des opérations faciles à concevoir.

156. Deux droites CB, CA (fig. 4) n'ayant qu'un seul point

$\angle FCA = \angle FCE$  (*hypo.*), ce qui ne peut être;  
 $\angle BCE$  devrait aussi être  $< \angle FCE$ .

de suite  $\angle BCE, \angle BCA$  (fig. 6) ont pour somme  
 c'est ce que met en évidence la perpendi-  
 culaire  $GC$  sur  $AE$ .

Si la somme de deux angles donnés vaut  
 deux droits, on accole ces angles comme  $\angle BCE, \angle BCA$  (fig. 9),  
 (57), les deux côtés extrêmes  $AC, CE$  seront  
 en cela n'était pas, que, par ex.  $CH$  (au lieu  
 de  $GC$ ), on aurait  $\angle BCE + \angle BCA = 2$   
 $\angle BCH = 2$  dr. ( $n^\circ 160$ ); dont en égalant les  
 $\angle BCA = \angle BCH$ , ce qui est absurde.

Si l'un est plus petit que l'autre, le droit  $\angle DCE$   
 est plus grand que  $\angle BCA$  qui est plus grand que l'angle droit  
 Les angles adjacents  $\angle BCE, \angle BCA$ , ou dont la  
 somme est deux droits, sont appelés *supplémentaires*: deux  
 angles sont *supplémentaires* quand leur somme vaut un  
 angle droit ( $\angle DCB$  (fig. 6)).

Si on veut tant de lignes qu'on voudra  $CB, CF, CD$ ,  
 (fig. 10) qui tombent en un point  $C$  de la  
 droite  $AE$ , les angles  $\angle BCE, \angle BCF, \angle FCD, \angle DCA$ , dont la somme  
 est ce que montre la perpendiculaire  $CH$   
 sur la droite  $BD$ ,  $AE$  (fig. 11) se coupent, les  
 angles opposés au sommet sont égaux. car  
 ( $n^\circ 160$ ),  $\angle ACD + \angle BCA = 2$  dr. Donc

Si on veut (fig. 7) la perpendiculaire  $BC$  à  $AE$ ,  
 soit  $\angle BCE = \angle ACD$ , on voit que l'angle  
 est donc réciproquement perpendiculaire sur  
 les angles de la fig. sont droits et égaux.

Si on veut (fig. 12) dans  
 une ligne concourante en un point  $C$ , forment des an-  
 gles, etc., dont la somme vaut quatre droits.  
 Les perpendiculaires  $MN, PQ$ , menées par  $C$ , forment  
 deux angles qui embrassent toutes les surfaces angu-



C commun, ne peuvent enclore un espace; l'étendue indéfinie comprise entre ces droites prolongées sans limites, est ce qu'on appelle un ANGLE. Le point C de section des deux lignes est le *sommet de l'angle*.

On désigne un angle par la lettre placée au sommet; et lorsque ce point est commun à plusieurs angles, comme fig. 10, 12... on distingue ces angles en énonçant les trois lettres écrites sur les côtés, celle du sommet entre celles des côtés. L'angle C (fig. 4) est aussi désigné par BCA ou ACB

157 Deux angles ACH, acb (fig. 4) sont égaux, quand en les posant l'un sur l'autre, ils peuvent coïncider: appliquons le côté cb sur CB, les sommets c, C, se confondant, le côté ca se couchera sur CA

Les côtés d'un angle devant toujours être considérés comme indéfiniment prolongés, on voit que la *grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur de ses côtés*, longueur qui est censée illimitée, mais de l'écartement des deux lignes. Qu'on fasse tourner le côté BC autour du sommet C, (fig. 5) pour lui faire prendre la position DC, l'angle BCA devenu DCA, aura augmenté de l'angle DCB, DCA est la somme des deux autres BCA la différence entre DCA et BCD,  $DCA - BCA = BCD$ ,  $BCA = DCA - BCD$  Si  $BCD = BCA$ , DCA est le double de BCA: on comprend ce qu'on doit entendre par le triple d'un angle, sa moitié, son tiers, etc.

158. Lorsqu'une droite BC (fig. 6 et 7) tombe sur une autre droite AE, elle fait deux angles BCE, BCA qu'on appelle *de suite ou adjacents*. S'il arrive (fig 7) que ces angles soient égaux, c.-à-d. qu'en pliant la fig. selon CB, la droite CE s'applique sur CA, les deux angles sont appelés *droits*, et on dit que la ligne CB est *perpendiculaire* sur AE

159. *Tous les angles droits sont égaux.* Supposons BC (fig. 8) perpendiculaire sur AE, et bc sur ae, c.-à-d. les angles  $BCA = BCE$ ,  $bca = bce$ . Transportant l'une des fig. sur l'autre, appliquons le point c sur C, et la droite ac sur AE, bc devra se coucher sur BC. Car si on suppose que bc prenne la position CF,

$\angle A = \angle BCE$ ,  $\angle FCA = \angle FCE$  (*hypo.*), ce qui ne peut être, car  $\angle A < \angle FCA$ ,  $\angle BCE$  devrait aussi être  $< \angle FCE$ .

Les deux angles de suite  $\angle BCE$ ,  $\angle BCA$  (fig. 6) ont pour somme deux angles droits : c'est ce que met en évidence la perpendiculaire  $DC$  élevée en  $C$  sur  $AE$ .

Réciproquement, si la somme de deux angles donnés vaut deux droits, et qu'on accolé ces angles comme  $\angle BCE$ ,  $\angle BCA$  (fig. 9), pour les ajouter (n° 157), les deux côtés extrêmes  $AC$ ,  $CE$  seront en ligne droite. Car si cela n'était pas, que, par ex.  $CH$  (au lieu de  $CA$ ) fût le prolongement de  $CE$ , on aurait  $\angle BCE + \angle BCA = 2$  droits (*hypo.*)  $\angle BCE + \angle BCH = 2$  dr. (n° 160); dont en égalant les premiers membres,  $\angle BCA = \angle BCH$ , ce qui est absurde.

L'angle  $\angle BCE$  (fig. 6) qui est plus petit que l'angle droit  $\angle DCE$  est dit *aigu*, l'angle  $\angle BCA$  qui est plus grand que l'angle droit  $\angle DCA$  est dit *obtus*. Deux angles adjacents  $\angle BCE$ ,  $\angle BCA$ , ou dont la somme vaut deux droits, sont appelés *supplémentaires* : deux angles sont dits *complémentaires* quand leur somme vaut un droit, comme  $\angle BCE$  et  $\angle DCB$  (fig. 6).

Il est visible que tant de lignes qu'on voudra  $CB$ ,  $CF$ ,  $CD$ , dans le même plan (fig. 10) qui tombent en un point  $C$  de la droite  $AE$ , font des angles  $\angle BCE$ ,  $\angle BCF$ ,  $\angle FCD$ ,  $\angle DCA$ , dont la somme vaut deux droits : c'est ce que montre la perpendiculaire  $CH$ .

161. Lorsque deux droites  $BD$ ,  $AE$  (fig. 11) se coupent, les angles  $\angle BCE$ ,  $\angle ACD$  opposés au sommet sont égaux car  $\angle BCE + \angle BCA = 2$  dr. (n° 160),  $\angle ACD + \angle BCA = 2$  dr. Donc  $\angle BCE = \angle ACD$ .

En prolongeant en  $D$  (fig. 7) la perpendiculaire  $BC$  à  $AE$ , comme l'angle droit  $\angle BCE = \angle ACD$ , on voit que l'angle  $\angle ACB = \angle ACD$ ,  $AE$  est donc réciproquement perpendiculaire sur  $BD$ , et les quatre angles de la fig. sont droits et égaux.

Tant de lignes qu'on voudra  $AC$ ,  $BC$ ,  $DC$ , ... (fig. 12) dans un même plan, qui concourent en un point  $C$ , forment des angles  $\angle ACB$ ,  $\angle BCD$ ,  $\angle DCE$ , etc., dont la somme vaut quatre droits, car les deux perpendiculaires  $MN$ ,  $PQ$ , menées par  $C$ , forment quatre angles droits qui embrassent toutes les surfaces angulaires du plan.

162. Deux lignes droites ne suffisant pas pour enclore un espace (n° 156), il faut au moins une 3<sup>e</sup> ligne pour limiter l'étendue. La fig. ainsi formée, telle que ABC (fig. 16) est appelée un *Triangle* : elle a trois côtés AB, AC, BC, et trois angles A, B, C. Si les trois côtés sont égaux (fig. 14), le triangle est *équilatéral* ; il est *isoscèle* (fig. 15) quand deux côtés seulement sont égaux,  $AC = BC$  ; enfin il est *scalène* lorsque les trois côtés sont inégaux, ABC (fig. 13). Quand il a un angle droit A (fig. 16), le triangle est *rectangle* ; on donne le nom d'*hypoténuse* au côté BC qui est opposé à cet angle droit A.

Le sommet C (fig. 13) de l'un quelconque des angles est le *sommet du triangle*, la *base* AB est le côté opposé ; la *hauteur* est la perpendiculaire CD abaissée du sommet C sur la base AB.

163. Deux triangles ABC, abc (fig. 24) sont égaux lorsque deux de leurs côtés sont respectivement égaux chacun à chacun, comprenant un angle égal,  $AB = ab$ ,  $AC = ac$ ,  $A = a$ . En effet, transportons le triangle abc sur ABC, en faisant tomber le côté ab sur son égal AB, savoir, a sur A, b sur B ; comme l'angle  $a = A$  (*hypo*), le côté ac prendra la direction AC : mais les longueurs ac AC sont égales (*hypo*) donc c tombera sur C, et par suite bc se confondra avec BC ; les surfaces abc, ABC coïncideront en toutes leurs parties, d'où  $B = b$ ,  $C = c$ ,  $BC = bc$ .

164. Lorsqu'un triangle ABC (fig. 15) est isoscèle, les angles A et B opposés aux côtés égaux AC, BC sont égaux,  $A = B$ . En effet, tirons la droite CD qui coupe en deux parties égales l'angle C du sommet, savoir, angle  $ACD = BCD$  ; en pliant la fig. selon CD, le côté CA prendra la direction CB, les côtés CA, CB, étant égaux (*hypo*) coïncideront ; A tombera sur B, AD sur DB ; ainsi  $A = B$ .

Donc 1°. les trois angles A, B, C (fig. 14) d'un triangle *équilatéral* sont égaux

2°. L'angle  $ADC = BDC$  (fig. 15), c.-à-d. que ces angles sont droits (n° 158), et  $AD = BD$ , ainsi la droite CD qui divise par moitiés l'angle C du sommet d'un triangle isoscèle, est perpendiculaire à la base AB et passe par son milieu D.

165. Réciproquement, dans un triangle  $ABC$  (fig. 17), si l'angle  $A = ABC$ , les côtés opposés  $AC, BC$ , sont égaux (le triangle est isocèle). Car si l'on n'a pas  $AC = BC$ , prenons sur le plus grand de ces côtés une longueur  $AD$  égale à l'autre côté  $BC$ , et tirons  $BD$ . Les deux triangles  $ABD, ABC$  ont le côté commun  $AB$ , le côté  $AD = BC$  (constr.) et l'angle  $A = ABC$  (hypo.); donc ces deux triangles devraient être égaux (n° 163), ce qui est évidemment absurde.

Donc un triangle qui a ses trois angles égaux est équilatéral.

166. Deux triangles  $ABC, abc$  (fig. 18) sont égaux lorsque leurs trois côtés sont égaux chacun à chacun,  $AB = ab, AC = ac, BC = bc$ . En effet, transportons l'un des triangles sur l'autre, en faisant coïncider des côtés égaux  $AB, ab$ , et des sommets  $A, a$  et  $B, b$ , semblablement placés, il s'agit de prouver que les surfaces se confondront ensemble. En effet, si cela n'a pas lieu, il ne pourra arriver que trois cas.

1°. Si les triangles tombent comme  $ACB, ACD$  (fig. 19), les sommets  $C$  et  $D$  étant au dehors des surfaces respectives; comme le côté  $AC = AD$  (hypo.), le triangle  $ACD$  est isocèle, et l'angle  $ACD = ADC$  (n° 164); d'ailleurs l'angle  $BCD < ACD$  ou  $ADC$ . D'un autre côté,  $BD = BC$  (hypo.), d'où l'angle  $BCD = BDC$ ; ainsi l'angle  $ADC < BDC$  ou  $BCD$ . Ces deux conséquences contradictoires prouvent que ce cas est impossible.

2°. Si l'un des triangles  $ABD$  (fig. 20) est renfermé dans l'autre  $ACB$ , tirez  $DC$  et prolongez  $AC$  et  $AD$  vers  $E$  et  $F$ . Le côté  $AD = AC$  (hypo.); donc l'angle  $ACD = ADC$  (n° 164), et aussi les suppléments sont égaux,  $ECD = FDC$  (n° 160). Or  $ECD > BCD$ , d'où  $FDC > BCD$ . D'ailleurs  $BD = BC$  (hypo.), d'où l'angle  $BCD = BDC$ , et comme  $FDC < BDC$ , on a  $FDC < BCD$ : conclusions encore contradictoires.

3°. Enfin, le sommet  $D$  (fig. 21) de l'un des triangles  $ABD$ , ne peut tomber sur le côté  $BC$  de l'autre  $ABC$ , puisqu'on aurait  $BD = BC$ , ce qui est impossible.

167. Prolongeons l'un des côtés  $AC$  (fig. 22) du triangle  $ABC$ , l'angle extérieur  $BCD$  est toujours plus grand que chacun des angles intérieurs opposés  $B$  et  $A$ . Car, par le milieu  $I$  de  $BC$ , et



le sommet A, tirons une droite indéfinie AIF, prenons  $IF = AI$  et tirons FC. Les triangles IFC, AIB sont égaux, à cause de  $AI = IF$  (constr.),  $BI = IC$  (hypo.) et les angles opposés au sommet; donc l'angle  $B = ICF < ICD$ .

En prolongeant le côté BC vers G, on prouve de même que l'angle  $ACG > BAC$ ; et comme l'angle BCD est opposé au sommet de ACG, on a  $BCD > BAC$ .

Il en résulte que 1° la somme de deux angles quelconques d'un triangle est plus petite que deux droits: car  $BAC < BCD$ ; ajoutant des deux côtés BCA, on a  $BAC + BCA < BCD + BCA$  ou 2 droits.

2°. Un triangle a au moins deux angles aigus; le 3° angle peut être aigu, droit ou obtus.

3°. Par un point A (fig. 23) pris sur le côté d'un angle aigu ACO la perpendiculaire AD menée sur l'autre côté CO, tombe dans la surface de cet angle; car si cette perpendiculaire pouvait tomber comme AB dans l'angle obtus ACE, le triangle ABC aurait un angle droit B, et un angle ACB obtus, dont la somme serait  $> 2$  droits.

4°. La perpendiculaire menée du point A pris sur le côté d'un angle obtus ACE tombe au dehors de cet angle, c.-à-d. sur le côté CE prolongé.

5°. La perpendiculaire CD (fig. 13) menée du sommet C d'un triangle tombe au dedans de la surface quand les angles intérieurs à la base sont tous deux aigus: elle tombe au dehors, quand l'un de ces angles est obtus.

6°. D'un point donné, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à une droite ED (fig. 23); car cela est évident si le point est en D sur la ligne ED; et s'il est au dehors, en A, en sorte qu'on ait deux perpendiculaires AC et AD sur EO, les angles en D et C sont droits, ce qui est démontré impossible.

168 Deux triangles sont égaux, quand deux de leurs angles sont respectivement égaux chacun à chacun, et qu'ils ont en outre un côté égal placé de la même manière par rapport à ces deux angles.

1° Cas. Si les angles sont adjacents au côté, soit  $AB = ab$



(fig. 18),  $A = a$ ,  $B = b$ . En portant le triangle  $abc$  sur  $ABC$ , et faisant coïncider les côtes égaux  $ab$ ,  $AB$ , comme l'angle  $A = a$ , le côté  $ac$  prendra la direction  $AC$ . De même puisque l'angle  $B = b$ , le côté  $bc$  prendra la direction  $BC$ ; ainsi le point  $c$  tombera sur  $C$ , les surfaces  $abc$ ,  $ABC$ , coïncideront, d'où  $BC = bc$ ,  $AC = ac$ ,  $C = c$ .

2<sup>e</sup> Cas. Si le côté est opposé à l'un des angles, soit  $AB = ab$  (fig. 24), l'angle  $A = a$ , et  $C = c$ : supposons que  $AC$  soit  $> ac$ , prenons  $AH = ac$ , et tirons  $BH$ . Le triangle  $ABH = abc$ , à cause de  $AB = ab$  (hypo.),  $AH = ac$  (constr.), et l'angle  $A = a$  (hypo.) : donc l'angle  $AHB = c$ ; or  $c = C$  (hypo.), donc  $AHB = C$ , ce qui est impossible, puisque l'angle  $AHB$  est extérieur au triangle  $BHC$  (n<sup>o</sup> 167). Donc  $AC = ac$ , et les triangles  $ABC$ ,  $abc$  sont égaux (n<sup>o</sup> 163).

Donc deux triangles rectangles sont égaux, quand, outre les hypoténuses égales, ils ont encore un angle aigu égal.

### Mesure des Distances.

169. Dans tout triangle  $BAC$  (fig. 27), de deux côtés, le plus grand est opposé au plus grand angle. Si  $BC > AC$ , prouvons que l'angle  $CAB > B$ . Prenons sur  $CB$  la partie  $CD = AC$ , et tirons  $AD$ : l'angle  $ADC$ , extérieur au triangle  $ADB$ , est  $> B$  (n<sup>o</sup> 167), mais dans le triangle isoscèle  $ACD$ , l'angle  $ADC = CAD$ , donc l'angle  $CAD > B$ , et à fortiori  $CAB = B$ .

Donc les trois angles  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (fig. 13) d'un triangle scalène sont inégaux.

Reciproquement (fig. 27), soit l'angle  $CAB > B$ , il faut que  $BC$  soit  $> AC$ : car ces deux côtes ne peuvent être égaux, puisque alors l'angle  $CAB$  serait  $= B$  (n<sup>o</sup> 164), ou ne peut non plus avoir  $BC < AC$ , car l'angle  $CAB$  serait  $< B$ , contre l'hypothèse.

170. La longueur d'une droite qui joint deux points en est la plus courte distance.

1<sup>o</sup>. Un côté  $AB$  (fig. 28) de triangle  $ABC$ , est toujours plus petit que la somme des deux autres,  $AC + BC$ . Prolongeons  $AC$ , prenons  $CD = CB$ , et menons  $BD$ . Le triangle  $CBD$  est iso-

scèle, ainsi l'angle  $D = CBD$  (n° 164) et l'angle  $ABD > CBD$  est aussi  $> D$ , donc (n° 169) le côté  $AB < AD$  ou  $AC + CB$ .

2°. Comparons la droite  $AB$  (fig. 25) au contour  $AICHB$  formé de lignes droites brisées : menons du point  $A$  les droites  $AC, AH$  à tous les sommets; nous avons  $AC < AI + IC$  (1°); de même  $AH < AC + CH$ , d'où l'on tire *a fortiori*  $AH < AI + IC + CH$ ; enfin  $AB < AH + HB$ , d'où  $AB < AI + IC + CH + HB$ .

3°. Enfin s'il s'agit du contour courbe  $AICHB$ , on tirera des droites qui joignent les points deux à deux, et la somme de ces lignes sera  $> AB$  : mais puisque le contour formé de lignes brisées peut approcher autant qu'on veut de la courbe, en rendant les côtés plus courts et plus nombreux, en même temps qu'on allonge de plus en plus le contour, il est clair que la droite  $AB$  est plus courte que le chemin courbe.

171. Si d'un point  $D$  (fig. 26) intérieur au triangle  $BAC$ , on mène des droites  $DA, DB$ , aux extrémités de la base  $AB$ , le chemin extérieur  $AC + CB$  est plus long que l'intérieur  $AD + DB$ , et l'angle  $C$  est  $< ADB$ . Prolongeons  $AD$  en  $F$ , nous avons  $AF < AC + CF$  (n° 170, 1°), ajoutant  $FB$  des deux parts, comme  $CF + FB = CB$ , on a  $AF + FB < AC + CB$ . De même  $DB < DF + FB$ , ajoutant  $AD$ , on a  $AD + DB < AF + FB$  : donc *a fortiori*  $AD + DB < AC + CB$ .

D'un autre côté, l'angle  $ADB$ , extérieur au triangle  $DFB$ , est  $> DFB$  (n° 167) : de même l'angle  $DFB$ , extérieur au triangle  $AFC$ , est  $> C$ . Donc  $ADB > C$ .

172. Un contour  $ACDB$  (fig. 2) est convexe ou concave, lorsque toute droite  $IK$  ne peut le couper en plus de deux points : la concavité est tournée du côté de cette droite  $IK$ ; la convexité regarde l'espace extérieur.

De deux chemins convexes  $ACDB, AEFGB$ , qui mènent de  $A$  à  $B$ , celui qui entoure l'autre est le plus long. Car en prolongeant  $EF$ , on a visiblement  $ICDK > IK$ , d'où  $ACDB > AIKB$ ; de même,  $AI + EI > AE$ , d'où  $AIKB > AEKB$ ; et ainsi de suite, on arrive enfin à  $ACDB > AEFGB$ .

La même chose a lieu pour deux contours curvilignes  $AFMB > ACB$  (fig. 3) : car en menant une droite  $EF$  qui touche  $ACB$

en un point  $C$ , on a  $EF < EMF$  (n° 170); d'où  $AECFB < AEMFB$ . D'autres tangentes  $ik$ ,  $lm$ , donneront  $Aiklm B < AMB$ , et ainsi de suite, en diminuant de plus en plus le contour, à mesure que les côtés rectilignes deviennent plus courts, et approchent davantage de la courbe  $ACB$ : donc enfin  $AMB > ACB$ .

173. Lorsque deux triangles  $ABC$ ,  $abc$  (fig. 29) ont deux côtés respectivement égaux,  $AB = ab$ ,  $AC = ac$ , et que les angles compris entre ces lignes sont inégaux  $BAC > bac$ , le 3<sup>e</sup> côté est le plus grand dans le triangle qui a l'angle opposé le plus grand,  $BC > bc$ . En effet, faisons l'angle  $CAD = bac$ , prenons  $AD = AB = ab$ , et menons  $CD$ ; le triangle  $CAD = cab$ , car  $AC = ac$  (*hypo*),  $AD = ab$  et angle  $CAD = a$  (*constr.*). Ainsi  $bc = CD$  qu'il faut prouver  $< BC$ . Tirons  $AI$  qui coupe par son milieu l'angle  $BAD$ ,  $AI$  tombe dans l'angle  $BAC > CAD$ ; par le point  $I$  de section avec  $BC$ , tirons  $ID$ . Le triangle  $AID = AIB$ , car  $AB = AD$  (*constr.*), le côté  $AI$  est commun, et les angles en  $A$  sont égaux (*constr.*); donc  $ID = IB$ ; enfin,  $CD < CI + ID$  ou  $BC$ .

174. Réciproquement, si deux triangles  $ABC$ ,  $abc$  (fig. 29) ont deux côtés respectivement égaux  $AB = ab$ ,  $AC = ac$ , et si les 3<sup>e</sup> côtés sont inégaux  $BC > bc$ , l'angle  $a$  opposé au moindre côté  $bc$  est  $< BAC$ . Car si cela n'est pas, l'angle  $a$  est  $=$  ou  $> BAC$ : or si  $a = BAC$ , on doit avoir  $BC = bc$ ; et si  $a > BAC$ , il faut que  $BC$  soit  $< bc$ , conséquences contraires à la supposition. Donc  $a < BAC$ .

175. Mesurer une droite  $A$  (fig. 30), c'est chercher (n° 36) combien sa longueur  $A$  en contient de fois une autre  $B$  connue et prise pour unité. Le plus souvent l'unité  $B$  n'est pas contenue un nombre exact de fois dans  $A$ , et en portant  $B$  plusieurs fois le long de  $A$ , on trouve un reste  $R < B$ : la mesure de la distance  $A$  est alors le *Rapport de  $A$  à  $B$* , qu'on trouve ainsi qu'il suit. On porte le reste  $R$  sur  $B$  pour trouver combien de fois  $B$  contient  $R$ ; et s'il y a un autre reste  $R'$ , on le porte sur  $R$ , puis le nouveau reste  $R''$  est porté sur  $R'$ ; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un reste  $r$  qui soit exactement contenu dans le reste précédent. Ce reste  $r$  est visiblement la commune me-

ture de  $A$  et de  $B$ , c'est-à-dire est contenu un nombre exact  $m$  de fois dans  $A$  et  $n$  de fois dans  $B$ , d'où  $A = mr$ ,  $B = nr$ . Le rapport  $\frac{A}{B} = \frac{mr}{nr} = \frac{m}{n}$ , et on a  $A = \frac{m}{n} B$ . Lorsque, par exemple,  $A$  est les  $\frac{5}{7}$  de  $B$ , cela signifie qu'en coupant  $B$  en 7 parties égales,  $A$  contient juste 5 de ces parties; la mesure de la distance est  $A = \frac{5}{7}$  de l'unité  $B$ .

L'analogie de cette opération avec celle du commun diviseur de deux nombres (p. 30) est facile à saisir, puisque porter  $B$  sur  $A$  autant de fois qu'on peut, c'est chercher le quotient de la division de  $A$  par  $B$ , etc.

Mais s'il y a toujours un reste à chaque division, l'opération n'a plus de bornes, et le rapport de  $A$  à  $B$  est *incommensurable*, et impossible à exprimer par le rapport de deux nombres entiers, parcequ'il n'y a aucune longueur, si petite qu'elle soit, qui puisse être exactement contenue à la fois dans  $A$  et  $B$ . On se contente ordinairement d'une approximation; en négligeant celui des restes successifs qu'on juge assez petit pour ne pas intéresser le résultat (n° 63).

En général, on peut toujours représenter des lignes par des nombres abstraits, en composer des formules, et les soumettre aux règles ordinaires des calculs numériques. Dans ces expressions, on entend par la ligne  $A$ , le nombre entier ou fractionnaire qui est le rapport de cette longueur  $A$  à celle de l'unité  $B$ . Reciproquement, les valeurs numériques peuvent être représentées par des lignes.

### *Du Cercle, de la Mesure des Arcs et des Angles.*

176. La *ligne circulaire* est celle dont tous les points  $ABDE$  (fig. 31) sont dans un plan (n° 154), et à égale distance d'un point intérieur  $C$  qu'on appelle *centre*. Le contour de cette courbe est une *circonférence*; la surface qui y est circonscrite est un *cercle*: les droites égales  $CA$ ,  $CB$ , ... qui partent du centre et se terminent à la courbe sont des *rayons*, au *diamètre*  $AE$  est une droite qui passe par le centre et a ses deux extré-



mis à la circonférence, c'est un double rayon. Tous les diamètres d'un cercle sont égaux.

Une partie AGB de la circonférence est un *arc* ; la droite AHB qui joint les bouts de l'arc est sa *corde* ; la surface ACBG comprise entre deux rayons et l'arc est un *secteur* ; celle AGBH qui est enfermée par l'arc et sa corde est un *segment*.

De là on conclut que 1°. *un diamètre est la plus grande des cordes*, car  $BC + CA > BA$  (n° 170, 1°.) ; or  $BC = CE$ , donc  $CE + CA$ , ou  $EA > BA$ .

2°. *Tout diamètre AE coupe le cercle en deux parties égales* ; en effet, en pliant la fig. suivant AE, les deux demi-cercles ABE, AFE doivent coïncider, car sans cela tous les points de la courbe ne seraient pas à égale distance du centre C.

3°. Par la même raison, deux cercles dont les rayons sont égaux, peuvent être appliqués l'un sur l'autre en coïncidence, en superposant les centres : deux arcs de ces cercles doivent aussi se couvrir l'un sur l'autre.

4°. Deux diamètres perpendiculaires EA, NF coupent la circonférence en quatre arcs égaux, qu'on appelle *quadrans*.

177. *Quand deux angles C, c (fig. 32) sont égaux, les arcs AB, ab, décrits de leurs sommets pour centre, avec le même rayon, sont égaux*. C'est ce qu'on reconnaît en appliquant les deux fig. l'une sur l'autre, et cb sur CB ; car le rayon ca couvre CA, et l'arc ca se couche sur CA ; il y a coïncidence entière.

Réciproquement, si deux angles C, c, comprennent des arcs égaux, ces angles sont égaux. Cela se voit de même.

1°. *Les arcs égaux ont des cordes égales, quand les rayons sont égaux* ; car soit l'arc  $AHL = DIF$  (fig. 33) ; menons les rayons CD, CA, CL, CF ; les triangles ACL, DCF sont égaux, comme ayant deux côtés égaux, comprenant un angle égal, donc corde  $AL = DF$ .

2°. Réciproquement, *les cordes égales soutendent des arcs égaux* ; en effet si la corde  $AL = DF$ , en tirant les rayons, les triangles CAL, CDF sont égaux, comme ayant les trois côtés respectivement égaux (n° 166) ; ainsi l'angle  $ACL = DCF$ , et l'arc  $DIF = AHL$ .



3°. *Construire un angle  $c$  (fig. 32) qui soit égal à un angle donné  $C$ ?* Tirez une ligne indéfinie  $cb$ , puis avec un rayon quelconque, et des sommets  $C, c$  pour centres, tracez les arcs  $AB, ab$ , celui-ci indéfini. Portez de  $b$  en  $a$ , sur l'arc  $ab$ , la longueur de la corde  $AB$ ; comme les cordes  $AB$  et  $ab$  sont égales, les arcs sont égaux; donc en tirant  $ca$ , les angles  $C$  et  $c$  sont égaux. Si l'on superpose les deux figures, elles seront en coïncidence l'une sur l'autre.

178. *Ajouter deux angles donnés.* Faites d'abord l'angle  $BCA$  (fig. 34) égal à l'un des angles proposés, puis  $BCD$  égal à l'autre, en y plaçant des arcs  $np, nm$  respectivement égaux à ceux qu'on tracera du sommet des angles donnés: alors  $DCA = BCA + BCD$ ; et si ces derniers angles sont égaux, vous aurez le double de l'un d'eux: on en aurait de même le triple, etc

La soustraction est aussi facile à faire; car angle. . . . .  
 $BCA = DCA - BCD$ . Enfin les opérations qu'on veut exécuter sur les angles se font sur les arcs décrits de leurs sommets pour centres avec le même rayon.

179. *Mesurer un arc  $AGD$  (fig. 31), c'est chercher son rapport à un autre  $ABN$ , de même rayon, et pris pour unité connue (n° 36, 71). Si ces arcs étaient rectifiés, c'est-à-dire étendus en ligne droite, on les traiterait comme il a été dit n° 175: mais la rectification n'est nullement nécessaire ici. On porte sur l'arc  $AD$ , autant de fois qu'on peut, une ouverture de compas égale à la corde de l'unité d'arc  $AN$ , et on obtient ainsi le nombre de fois que cette unité est contenue dans l'arc  $AB$ . S'il y a un reste  $R$ , on porte de même la corde de cet arc  $R$  sur l'arc  $AN$  pris pour unité, et ainsi de suite, pour trouver la commune mesure des arcs, si elle existe; enfin tout se passe comme pour les droites, même dans le cas où les arcs seraient incommensurables. Cette construction résulte de ce que les arcs égaux répondent à des cordes égales.*

On peut, comme on voit, ajouter, soustraire, multiplier, diviser des arcs, enfin les représenter par des nombres, et en composer des formules.

Quant à l'unité d'arc, elle est arbitraire; on préfère ordinairement le quadrans AN, ou quart de la circonférence.

Comme on prend le quadrans pour unité d'arcs, on prend pour unité d'angles l'angle droit que dans la suite nous désignerons par D.

180. *De deux arcs moindres que la demi-circonférence, le plus grand a une corde plus grande* Car si l'arc  $AHL > DIB$  (fig. 33), prenant l'arc  $DIF = AHL$ , et menant la corde  $DF$ , cette corde  $DF = AL$  (n° 177, 1°) : or les deux triangles  $DCB$ ,  $DCF$  ont deux côtés égaux qui sont des rayons, comprenant l'angle  $DCF > DCB$ ; donc le 3° côté  $DF > DB$  (n° 173).

Reciproquement, *la corde la plus grande soutend le plus grand arc*; car si la corde  $AL > DB$ , les triangles  $ACL$ ,  $DCB$  ont deux côtés égaux, et le 3°  $AL > DB$ , dont l'angle  $ACL > DCB$ , et l'arc  $AHL > DIB$ .

181. *Le rapport de deux angles BCA, DON (fig. 35) est le même que celui des arcs ba, dn compris entre leurs côtés, et décrits de leurs sommets comme centres, avec le même rayon.*

1°. Si les arcs  $ba$ ,  $dn$  sont commensurables, leur commune mesure  $dx$  sera contenue  $m$  fois dans  $ba$ ,  $p$  fois dans  $dn$ , de sorte que  $\frac{ba}{dn} = \frac{m}{p}$ . Par chaque point de division  $x, y, \dots$ , menons aux sommets  $O, C$ , des lignes  $Ox, Oy, \dots$ , les angles proposés seront de même coupés en  $m$  et  $p$  angles égaux  $xOd, yOx, \dots$ ; donc on a  $\frac{BCA}{DON} = \frac{m}{p}$ . Ces deux relations donnent (\*).

$$\frac{BCA}{DON} = \frac{ba}{dn} \dots\dots (A).$$

2°. Si les arcs sont incommensurables, divisons l'un d'eux  $nd$  en un nombre quelconque  $p$  de parties égales  $dx, xy, \dots$ , et portons-les sur l'autre arc  $ba$ ; soit  $i$  le point de division le plus

---

(\*) On ne doit pas oublier que l'égalité de deux rapports constitue une proportion (n° 71) En Géométrie, l'usage a prévalu de lire ainsi ces sortes d'expressions,  $BCA$  est à  $DON$  comme  $ba$  est à  $dn$ , et de préférer cette locution à l'équivalente,  $BCA$  divisé par  $DON$  est égal à  $ba$  divisé par  $dn$ . On doit en dire autant dans toute la Géométrie élémentaire.

voisin de  $\pi$ ; menons  $CI$ . Cela posé, les arcs  $dn$ ,  $bi$  étant commensurables, on a  $\frac{ICB}{DON} = \frac{bi}{dn}$ , l'angle  $ICB = BCA + ICA$ , l'arc  $bi = ba + ia$ ; donc

$$\frac{BCA}{DON} + \frac{ICA}{DON} = \frac{ba}{dn} + \frac{ia}{dn}.$$

Or,  $ICA$  et  $ia$  varient avec le nombre  $p$  des divisions de l'arc  $nd$ , et peuvent être rendus aussi petits qu'on voudra, tandis que les autres quantités restent constantes; la 2<sup>e</sup> et la 4<sup>e</sup> fraction sont donc indéfiniment décroissantes, et l'on a, en passant aux limites (n<sup>o</sup> 113),  $\frac{BCA}{DON} = \frac{ba}{dn}$ .

182. Pour trouver le rapport de deux angles, il n'est pas nécessaire de faire sur eux l'opération analogue à celle qui a été indiquée sur les lignes (n<sup>o</sup> 175), et qui serait ici fort embarrassante. On substitue au rapport cherché celui des arcs, qui est le même. Concluons de là que, 1<sup>o</sup>. le rapport des surfaces des secteurs est le même que celui des arcs.

2<sup>o</sup>. Si l'on prend pour unité d'arc  $dn$  (fig. 35), l'arc qui est compris entre les côtes de l'unité d'angle  $DON$ ,  $dn$  et  $DON$  étant chacun l'unité de leur espèce, notre proportion (A) donne  $BCA = ba$ . Ainsi (n<sup>o</sup> 36 et 71), tout angle  $a$  pour mesure l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre (\*).

(\*) Ceci suppose une condition tacite, car l'angle  $BAC$  ne peut être égal à l'arc  $ba$ , mais dans l'équation  $BCA = ba$  ce n'est plus un angle et un arc qui entrent, ce sont deux nombres abstraits qui indiquent combien de fois l'angle et l'arc contiennent l'unité de leur espèce  $DON$  et  $dn$ , de sorte que  $BCA = ba$  signifie en effet la même chose que  $\frac{BCA}{DON} = \frac{ba}{dn}$ . C'est en ce sens également lieu dans toute formule; les lettres qui y entrent ne sont que des nombres abstraits qui représentent les rapports des choses mesurées à leur unité.

C'est aussi improprement qu'on dit qu'un arc est la mesure d'un angle, quoiqu'on le peut établir de rapports entre deux choses hétérogènes; on doit entendre par là que les angles croissant dans le même rapport que les arcs, le nombre qui exprime la mesure de l'angle (n<sup>o</sup> 36) exprime aussi celle de l'arc.

On prend ordinairement pour unités d'angle et d'arc l'angle droit et le quart de circonférence qu'on nomme *Quadrans*.

3°. Si du sommet *C* (fig. 36) des angles *DCA*, *BCA* on décrit deux arcs *abd*, *a'b'd'*, le rapport  $\frac{BCA}{DCA}$  est  $= \frac{ab}{ad}$ , ou  $= \frac{a'b'}{a'd'}$ . La grandeur du rayon *Cb* ou *Cb'* est indifférente dans la mesure des angles, donc  $\frac{ab}{a'b'} = \frac{ad}{a'd'}$ , les arcs *ab* et *a'b'* sont entre eux comme leurs circonf. entières. On dit que ces arcs sont *Semblables*.

183. Les angles tracés sur le papier se mesurent à l'aide du *Rapporteur*; c'est un demi-cercle divisé en une quantité quelconque de parties égales, propres à donner le *rapport des arcs au quadrans*; ce nombre exprime la mesure des angles, ou leur rapport à l'angle droit. Un semblable demi-cercle, porté sur un pied et pourvu d'alidades mobiles autour du centre, pour pouvoir être dirigées aux objets éloignés, se nomme *Graphomètre*, et sert de même à mesurer les angles dans l'espace. Au reste, on a construit, dans ce but, des instrumens de formes très variées, et dont nous ne donnerons pas la description, pour ne pas nous écarter de notre sujet. (*V. ma Géodésie.*)

On a coutume de diviser le quadrans en 90 parties ou *degrés*, chaque degré en 60 minutes, et la minute en 60 secondes; un angle, ou arc de 18 degrés 54 minutes 55 secondes, s'écrit ainsi: 18° 54' 55". Comme les tables et les instrumens ont été construits sur ce mode de division, nous le préfererons à celui qui est plus moderne et plus simple pour les calculs, qui consiste à partager le quart de cercle en 100 *Grades*, le grade en 100 minutes, la minute en 100 secondes. Dans ce système, 18° 54' 55" revient à 18,5455 ou 0,185455 quadrans.

### *Des Perpendiculaires, des Obliques et des Parallèles.*

184. Par un point *A* (fig. 23), menez la perpendiculaire *AD* sur *EF*, et les obliques *AC*, *AF*, *AB*. 1° La perpendiculaire *AD* est plus courte que toute oblique *AC*, 2° les obliques *AC*, *AF*



qui s'écartent également du pied  $D$  de la perpendiculaire sont égales, et font des angles intérieurs aigus et égaux; 3° de deux obliques  $AC$ ,  $AB$ , celle qui s'écarte le plus de ce pied  $D$  est la plus longue, et fait, du même côté  $AD$ , un angle aigu plus petit,  $ABD < ACD$ .

1°. Puisque le triangle  $ACD$  est rectangle en  $D$ , cet angle  $D$  est  $> ACD$  (n° 167, 1°), d'où  $AD < AC$  (n° 169); la plus courte distance d'un point  $A$  à une droite  $EO$  est sa perpendiculaire  $AD$ : tous les angles  $ACD$ ,  $ABD$  sont aigus.

2°. Si  $CD = DF$ , les triangles  $ACD$ ,  $AFD$ , qui, outre le côté commun  $AD$ , et les angles droits  $D$ , ont le côté  $CD = DF$ , sont égaux; d'où  $AC = AF$ , angle  $ACD = AFD$ .

3°. Lorsque  $BD > CD$ , l'angle  $ACB$  est obtus (n° 167, 4°); donc cet angle  $ACB > ABC$  (n° 167, 2°), et par suite  $AB > AC$ . L'angle  $ABE$ , extérieur au triangle  $ABC$  est  $> ACB$ , et prenant les supplémens,  $ABC < ACD$ . Ainsi à mesure que les obliques s'écartent de la perpendiculaire  $AD$ , elles deviennent plus longues, et font avec  $EF$  des angles aigus du côté de  $AD$ , de plus en plus petits.

Donc étant donné un point  $A$  sur une droite  $AD$  perpendiculaire à  $EO$ , de ce point, on ne peut mener plus de deux obliques égales entre elles.

185. Reciproquement la ligne  $AD$  est perpendiculaire sur  $EF$ , lorsqu'elle est la plus courte distance de  $A$  à  $EF$ . Car si une autre ligne  $AC$  était la perpendiculaire, elle serait  $< AD$ , contre l'hypothèse.

De même, si  $AC = AF$ , il s'ensuit que  $CD = DF$ : puisque si  $CD$  était  $>$  ou  $<$   $DF$ ,  $AC$  serait aussi  $>$  ou  $<$   $AF$ .

Enfin si  $AB > AC$ , on doit avoir  $BD > CD$ , puisqu'en supposant  $BD =$  ou  $<$   $CD$ , il faudrait qu'on eût  $BA =$  ou  $<$   $CA$ , contre l'hypothèse.

186. Concluons de là que si  $AD$  (fig. 37) est perpendiculaire au milieu  $D$  de  $CF$ , tout point  $G$ ,  $A$ , de  $AD$  est autant éloigné de  $C$  que de  $F$ .  $AC = AF$ ,  $GC = GF$ : car ces droites sont des obliques qui s'écartent également du pied  $D$ .

187. Tout point  $I$  situé hors de la perpendiculaire  $AD$  au



milieu de  $CF$ , est plus voisin de celle des deux extrémités  $F$  qui est du même côté que ce point  $I$ ; car menant  $IC$ ,  $IF$  et  $FG$ , l'angle  $GCF = GFC$ ; donc l'angle  $IFC > ICF$ , et le côté  $IC > IF$  (n° 169).

Puisque la propriété du n° 186 d'avoir ses points également distans des points  $C$  et  $F$  n'appartient qu'à la perpendiculaire sur le milieu de  $CF$ , elle la caractérise; c'est-à-dire que lorsque deux points  $A$  et  $H$  (fig. 38) d'une droite  $AH$  sont chacun autant éloignés de  $C$  que de  $F$ , cette droite  $AH$  est perpendiculaire sur le milieu de  $CF$ .

*Pour mener une perpendiculaire  $AH$  au milieu d'une droite  $CF$  (fig. 38),* des centres  $C$  et  $F$ , avec le même rayon quelconque, tracez deux arcs de cercle : si les rayons ont été pris plus grands que la moitié de  $CF$ , ces arcs se couperont en un point  $A$ , qui sera sur la perpendiculaire demandée. Refaites la même construction au-dessous de  $CF$  avec le même rayon; les arcs se couperont en un point  $H$  de la perpendiculaire, qui sera  $AH$ . On peut aussi trouver cette ligne, en prenant d'autres rayons égaux, qui donnent des arcs se coupant en  $I$ , car  $I$  sera aussi l'un des points de la perpendiculaire.

Cette construction donne aussi le milieu  $D$  d'une longueur  $CF$ .

188. *Par un point donné mener une perpendiculaire  $AH$  (fig. 39, 40) sur une droite indéfinie  $OB$ .*

1°. Si ce point est en  $D$  sur la droite (fig. 39), prenez  $DC = DF$  à volonté, et des centres  $C$  et  $F$  avec le même rayon quelconque, tracez deux arcs qui se coupent en  $A$ , la droite  $AD$  sera la perpendiculaire sur  $DB$ .

2°. Si le point donné est en  $A$  (fig. 40) hors de la droite  $DB$ , du centre  $A$  avec un rayon quelconque suffisamment grand, tracez un arc  $CF$ , coupant  $DB$  aux points  $C$  et  $F$ , de ces points comme centres et avec un même rayon arbitraire, tracez deux arcs qui se coupent soit en  $H$ , soit en  $I$ . La droite  $AI$  ou  $AH$  est la perpendiculaire demandée.

La perpendiculaire  $AD$  (fig. 39), donne le point  $D$  qu'on appelle la projection de  $A$  sur  $CF$  : chaque point de  $CA$  a de

même sa projection, et la longueur  $CD$  est la projection de  $AC$  de  $CG$ ... sur la droite indéfinie  $CF$ .

189. Étant donnés deux points  $G$  et  $B$  (fig. 41) et une droite  $AK$  indéfinie, trouver sur cette ligne un point  $F$ , tel qu'en le joignant aux points donnés  $G$  et  $B$ , les droites  $FG$ ,  $FB$  fassent des angles égaux avec  $AK$ , savoir, angle  $GFA = BFK$ . Menez du point  $B$  la perpendiculaire  $BD$  sur  $AK$ , prenez  $CD = CB$ , et tirez la droite  $DG$ ; cette droite coupera  $AK$  au point  $F$  demandé : car les triangles  $FCD$ ,  $FCB$  sont égaux, d'où l'angle  $BFC = CFD = AFG$ .

Dans l'angle  $NAC$  (fig. 42) on donne les points  $B$  et  $G$ , et on demande de tirer les droites  $BF$ ,  $FL$ ,  $LG$  qui fassent des angles égaux deux à deux avec les côtés de l'angle  $A$ , savoir  $BFC = LFA$ , et  $FLA = GLN$ . Reproduisez la construction précédente pour le point  $B$  et le côté  $AC$ , c'est-à-dire prenez  $CD = BC$  sur la perpendiculaire  $BD$  à  $AC$ . Tout point  $F$  de  $AC$  donne deux droites  $FD$ ,  $FB$ , également inclinées sur  $AC$  : ainsi la droite cherchée  $LF$  doit passer par le point  $D$ , qui remplace  $B$  dans la recherche proposée ; en sorte qu'il ne s'agit plus que de savoir tirer du point  $D$  deux lignes  $DL$ ,  $LG$ , également inclinées sur  $AN$  : il faut donc encore reproduire la construction précédente pour le point  $D$  et la droite  $AN$ . Ainsi on tirera  $DH$  perpendiculaire sur  $NA$  prolongée, on prendra  $ID = IH$  ; par le point  $B$ , on mènera  $HG$  qui donnera le point  $L$ , puis  $LD$  qui donnera le point  $F$ , enfin la droite  $FB$  : donc  $BF$ ,  $FL$  et  $LG$  rempliront les conditions voulues.

La même construction représentée fig. 43 donne le contour  $EFLMK$ , qui joint les points extrêmes  $B$  et  $K$  par une suite de lignes brisées également inclinées deux à deux sur les côtés successifs de la fig.  $MBAC$ . On pourra opérer de même pour quatre droites formant trois angles, etc. . . . Ce tracé résout complètement le problème des *bricoles* au jeu de billard.

190. On dit que deux droites  $AB$ ,  $CD$  (fig. 45) sont *parallèles* quand, situées dans un plan, elles ne se rencontrent pas, quelque loin qu'on les prolonge. La droite  $EF$  qui les coupe est appelée *transversale*, les angles  $FHB$ ,  $HID$ , d'un même côté de la transversale, l'un en dehors, l'autre en dedans des parallèles,

sont dits *correspondans* ; les angles *alternes* sont situés des deux côtés de la sécante ; les *internes* sont au dedans des parallèles, les *externes* sont en dehors ; les *alternes-internes* sont, tels que  $\text{AHI}$ ,  $\text{HID}$  de part et d'autre de la sécante, et entre les parallèles ; les *alternes-externes*, tels que  $\text{EHB}$ ,  $\text{CIF}$ , sont aussi des deux côtés de la sécante, mais en dehors des parallèles : dans ces deux derniers cas, les angles ont leurs ouvertures tournées en sens contraires, et leurs sommets sont situés sur les deux parallèles. Les angles internes  $\text{BHI}$ ,  $\text{HID}$ , et les externes  $\text{EHB}$ ,  $\text{FID}$  sont d'un même côté de la sécante.

Deux droites  $\text{AB}$ ,  $\text{CD}$  (fig. 45) sont parallèles quand, étant dans un plan et coupées par une sécante  $\text{EF}$ , elles remplissent l'une des cinq conditions suivantes :

1°. Les angles correspondans égaux,  $\text{EHB} = \text{HID}$  ; 2° les angles alternes-internes égaux,  $\text{AHI} = \text{HID}$ , 3° les angles alternes-externes égaux,  $\text{EHB} = \text{CIF}$ , 4° la somme des angles internes d'un même côté,  $\text{BHI} + \text{HID} = 2$  droits ; 5° la somme des angles externes d'un même côté,  $\text{EHB} + \text{DIF} = 2$  droits.

1<sup>er</sup> Cas.  $\text{EHB} = \text{HID}$  ; car si les droites  $\text{AB}$ ,  $\text{CD}$ , se rencontreraient en  $\text{O}$  (fig. 44), on aurait un triangle  $\text{HOI}$ , où l'angle extérieur  $\text{EHB}$  serait  $> \text{HID}$  (n° 167), contre l'hypothèse.

2<sup>o</sup> Cas.  $\text{AHI} = \text{HID}$  ; si le triangle  $\text{HOI}$  était possible, on aurait l'angle extérieur  $\text{AHI} > \text{HID}$ , contre la supposition.

3<sup>o</sup> Cas.  $\text{EHB} = \text{CIF}$  ; ces angles étant opposés au sommet avec les précédens, c'est comme si l'on donnait  $\text{AHI} = \text{HID}$ .

4<sup>o</sup> Cas.  $\text{BHI} + \text{HID} = 2$  droits ; on sait (n° 167, 1<sup>o</sup>) que le triangle  $\text{HOI}$  est alors impossible.

5<sup>o</sup> Cas.  $\text{EHB} + \text{DIF} = 2$  droits, comme  $\text{HID} + \text{DIF} = 2$  droits, on en conclut  $\text{EHB} = \text{HID}$ , qui rentre dans le 1<sup>er</sup> cas.

Deux droites  $\text{AB}$ ,  $\text{CD}$  (fig. 45) perpendiculaires à une troisième  $\text{LM}$  sont parallèles, puisque la figure remplit les cinq conditions ci-dessus. Et en effet, si les droites  $\text{AB}$ ,  $\text{CD}$  se rencontreraient en un point  $\text{O}$  (fig. 44),  $\text{OH}$ ,  $\text{OI}$ , seraient deux per-

pendiculaires menées du point  $O$  sur  $EF$ , ce qui ne se peut (n° 167, 6°).

191. Les réciproques de toutes ces propositions sont vraies. En effet, un angle  $BCA$  (fig. 46), quelque petit qu'il soit, est toujours plus grand qu'une bande  $BCEF$  formée par deux perpendiculaires  $BC$ ,  $EF$ , menées à la droite  $CD$ . Car si l'on décrit du sommet  $C$  l'arc de cercle  $bd$ , avec un rayon quelconque, l'angle  $BCA$  sera contenu un nombre fini  $n$  de fois dans l'angle droit  $BCD$ , puisqu'il sera contenu autant que l'arc  $bd$  l'est dans le quadrans  $bad$ . Portons  $n$  parties égales  $CE, EG, \dots$  le long de la droite indéfinie  $CD$ , jusqu'en un point  $M$ ; puis abaissons sur  $CD$  des perpendiculaires  $FE, HG, \dots NM$ , en tous les points de division. Nous aurons ainsi  $n$  bandes  $BCEF, FEGH$ , etc., toutes égales entre elles, car en pliant la figure selon la droite  $FE$ , il est évident que les bandes  $BE, FG$  se superposeront en coïncidence parfaite. Ainsi la surface de l'angle droit  $BCD$  est formée de  $n$  fois l'angle  $BCA$ , tandis que  $n$  fois la bande  $BCEF$  est moindre que cette surface, ou  $n \times BCA > n \times BCEF$ , ou  $BCA > BCEF$ .

Ainsi la droite  $CA$  suffisamment prolongée doit rencontrer  $EF$  quelque part et s'étendre au-delà, puisque la bande  $BCEF$  ne peut contenir l'angle  $BCA$ , quelque petit qu'il soit. Toute droite  $CA$  qui fait avec  $CD$  un angle  $<$  un droit doit donc couper la perpendiculaire  $FE$  sur  $CD$ .

Donc, 1° Lorsque deux droites  $AB, CD$  (fig. 45) sont parallèles, la perpendiculaire  $LM$  menée à  $CD$  est aussi perpendiculaire à  $AB$ ; puisque sans cela  $AB$  devrait couper  $CD$ . Cela revient à dire que par un point  $L$  on ne peut mener qu'une seule parallèle à  $CD$ , savoir  $AB$  perpendiculaire à  $LM$ .

2°. Toute sécante  $EF$  qui coupe deux parallèles  $AB, CD$ , fait les angles correspondans égaux,  $EHB = HIN$ ; les angles alternes-internes égaux,  $AHI = BIN$ ; les angles alternes-externes égaux,  $EHH = CIF$ . En effet, du milieu  $K$  de  $KI$ , soit abaisse  $LM$  perpendiculaire sur les deux parallèles (1°); les deux triangles  $KIM, LKH$  seront égaux, à cause des angles



droits  $L$  et  $M$ , des angles  $K$  opposés au sommet, et de  $KI = KH$ , (constr.) ; donc l'angle  $LHK = KIM$  ; et comme ces angles sont opposés au sommet avec  $EHB$ ,  $CLF$ , ces quatre angles sont égaux.

3°. La somme des angles internes, ou des externes, d'un même côté, vaut deux droits : car  $AHI + BHI = 2$  droits, et  $AHI = HID$  (2°) ; donc  $BHI + HID = 2$  droits. De même  $EHB = HID$ ,  $HID + FID = 2$  droits, donc  $EHB + FID = 2$  droits.

4°. Les angles que fait une sécante en coupant deux parallèles, sont égaux quand ils sont de même espèce, et supplémentaires quand l'un est aigu et l'autre obtus.

192. Il suit de là que 1° pour mener, par un point donné  $C$  (fig. 47) une droite  $CD$  parallèle à  $AB$ , on pourra employer l'une quelconque des six propriétés précédentes. Par exemple, d'un rayon quelconque  $CB$  et du centre  $C$ , on décrira un arc  $BI$ , puis du centre  $B$  l'arc  $CH$  : enfin, on prendra l'arc  $BI = CH$ , et  $CI$  sera parallèle à  $AB$ . Car, en menant la sécante  $BC$ , les angles  $ABC$ ,  $BCI$  seront égaux (n° 177, 3°).

2°. Deux droites  $AC$ ,  $BD$  (fig. 48) parallèles à une troisième  $EF$  sont parallèles entre elles ; car la perpendiculaire  $AI$  à  $EF$  l'est aussi à ses parallèles  $AC$  et  $BD$  ; celles-ci ne se rencontrent donc pas (190).

3°. Deux angles  $CAB$ ,  $DEF$  (fig. 49) dont les côtés sont parallèles, et l'ouverture tournée du même sens, sont égaux : car prolongeant  $EF$  en  $G$ , les parallèles  $AC$ ,  $ED$  donnent l'angle  $DEF = CGF$  comme correspondans : à cause des parallèles  $AB$ ,  $GF$ , on a l'angle  $CGF = CAB$  ; donc  $CAB = DEF$ . Si l'on prolonge un côté  $EF$ , les angles  $DEI$  et  $BAC$ , dont l'ouverture n'est pas tournée du même côté, ne sont plus égaux, ces angles sont supplémens l'un de l'autre.

4°. Deux parallèles  $AB$ ,  $CD$  (fig. 47) sont partout équidistantes ; car de deux points quelconques  $A$  et  $B$ , et du milieu  $E$  de  $AB$ , menons les perpendiculaires  $AC$ ,  $BD$ ,  $EF$  sur  $AB$ , elles le seront aussi sur  $CD$ , or, en pliant la figure suivant  $EF$ ,  $EB$  se coïncidera sur son égal  $EA$ , et à cause des angles



droits,  $BD$  prendra la direction  $AC$ , et  $FD$  se couchera sur  $FC$ . Ainsi, le point  $D$  tombera sur  $C$ ; d'où  $AC=BD$ .

193. Les parties de deux parallèles  $AB$ ,  $CD$  (fig. 50) interceptées entre deux autres parallèles  $BD$ ,  $AC$ , sont égales, car menant  $BC$ , on a deux triangles égaux  $ABC$ ,  $DBC$  (le côté  $BC$  est commun et l'angle  $BCD=ABC$ ,  $BCA=DBC$ , comme alternes-internes). Donc  $AB=CD$  et  $BD=AC$ . Le théorème précédent (4°) est un cas particulier de celui-ci.

Réciproquement, si  $AB=CD$  et  $AC=BD$ , les deux triangles sont encore égaux, comme ayant leurs trois côtés respectivement égaux; d'où l'on tire angle  $DCB=ABC$ ,  $CDB=BAC$ ; donc  $AB$  est parallèle à  $CD$ ;  $AC$  l'est à  $BD$ .

Enfin, si l'on suppose  $AB$  égal et parallèle à  $CD$ ,  $AC$  est aussi égal et parallèle à  $BD$ , parce que les deux triangles sont encore égaux, etc.

194. Sur le côté  $KI$  (fig. 51) d'un angle donné  $IKC$ , soit pris un point quelconque  $E$ , et mené  $ED$  parallèle à  $KC$ ; prenons  $KE=KF$ , et tirons  $KF$ . Dans le triangle isocèle  $KEF$ , l'angle  $EKF=F$ ; mais  $F=FKC$  comme alternes-internes; ainsi,  $KE$  coupe par moitiés l'angle  $IKC$ . De même, prenant  $FK=FD$ , l'angle  $DKC$  est moitié de  $FKC$ , ou le quart de  $IKC$ , etc. Cette construction sert à diviser l'angle  $IKC$  en 2, 4, 8... 2<sup>n</sup> parties égales.

### *Des Perpendiculaires et Parallèles considérées dans le cercle, et des Tangentes.*

195. Tout rayon  $CD$  perpendiculaire à une corde  $AB$ , la coupe au milieu  $E$ , ainsi que l'arc soutendu  $ADB$  (fig. 52). En effet, les obliques égales  $AC$ ,  $CB$ , prouvent que  $E$  est le milieu de  $AB$  (n° 184); en pliant la figure suivant  $CD$ , le point  $A$  tombe en  $B$ ;  $AD$  se couche sur  $DB$ , ainsi  $D$  est le milieu de l'arc  $ADB$ .

196. Le centre  $C$ , le milieu  $E$  de la corde et celui  $D$  de l'arc, étant en ligne droite, il s'ensuit que toute ligne  $CD$  qui

passer par deux de ces points, passe aussi par le 3<sup>e</sup>, et est perpendiculaire à la corde  $AB$ . De plus, puisque par un point  $C$ ,  $E$  ou  $D$ , on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à  $AB$ , des qu'une droite, passant par l'un de ces trois points, sera perpendiculaire à  $AB$ , on en conclura qu'elle passe par les deux autres. Donc, de ces quatre conditions, être perpendiculaire à une corde, passer son milieu, par le milieu de l'arc et par le centre, deux étant supposées, les deux autres s'ensuivent nécessairement.

On peut, au reste, démontrer directement chacun des six cas compris dans ce théorème, en le traitant comme celui qui nous a servi de base.

197. Pour diviser un arc  $ADB$  (fig. 52), ou un angle  $ACB$  en deux parties égales, il suffit d'abaisser la perpendiculaire  $CD$  sur la corde  $AB$  (n<sup>o</sup> 187). Comme par le même moyen on peut de nouveau faire la bissection de chaque moitié, etc., on sait diviser un arc ou un angle en 2, 4, 8. . .  $2^n$  parties égales. (Voy. n<sup>o</sup> 194.)

198. Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés  $N$ ,  $B$  et  $D$  (fig. 53). Menons  $NB$  et  $BD$ , puis les perpendiculaires  $HE$ ,  $IF$  sur leurs milieux  $E$  et  $F$ . Chacun des points de  $HE$  est autant éloigné de  $N$  que de  $B$ ; ces points jouissent seuls de cette propriété : ainsi tous les cercles passant par les points  $N$  et  $B$  ont leurs centres sur la perpendiculaire  $HE$ ; de même pour  $FI$  relativement à  $B$  et  $D$ . Donc le point  $C$  où se coupent  $HE$  et  $FI$ , est à la même distance de  $N$ ,  $B$  et  $D$ , et remplit seul cette condition : ainsi  $C$  est le centre du cercle unique qui passe par les trois points.

Les perpendiculaires  $FI$  et  $HE$  ne se rencontreraient pas si les trois points  $N$ ,  $B$  et  $D$  étaient en ligne droite (n<sup>o</sup> 191, 1<sup>o</sup>.), et le problème serait impossible. Mais dans tout autre cas,  $FI$  coupe  $HE$ , puisque si  $FI$  et  $HE$  étaient parallèles, les droites  $BN$ ,  $BD$  qui leur sont respectivement perpendiculaires, ne seraient qu'une seule et même ligne, car sans cela on aurait deux perpendiculaires à  $HE$  partant de  $B$ , savoir  $NB$  et le prolongement de  $BD$ .

Observez que la perpendiculaire abaissée sur le milieu de la corde  $ND$ , passe aussi par le point  $C$ , puisqu'il est à la même distance de  $N$  et de  $D$ ; en sorte que les trois perpendiculaires doivent concourir en  $C$ , et qu'on détermine ce centre en se servant de deux quelconques des trois cordes  $NB$ ,  $BD$ ,  $ND$ .

Donc, 1° deux cercles ne peuvent avoir trois points communs sans se confondre.

2°. Il est facile de trouver le centre d'un cercle ou d'un arc donné : il suffit d'y marquer trois points  $N$ ,  $B$  et  $D$ , et de faire la construction qu'on vient d'indiquer.

199. Une droite ne peut couper un cercle en plus de deux points, puisque s'il y avait trois points communs, en y menant des rayons, on aurait trois obliques égales (n° 184, 3°).

Une ligne  $TG$  (fig. 54) qui ne rencontre le cercle qu'en un point  $F$  s'appelle *Tangente*. Le rayon  $CF$  est perpendiculaire à la tangente en  $F$  : car tout autre point  $G$  de cette tangente étant hors du cercle,  $CG$  est  $> CE = CF$ ; donc  $CF$  est la plus courte distance de  $C$  à  $TG$ , c'est-à-dire que  $CF$  est perpendiculaire à  $TG$  (n° 184, 1°).

Réciproquement, si  $TG$  est perpendiculaire au rayon  $CF$ , cette droite  $TG$  est tangente au cercle. Car tout oblique  $CG$  étant  $> CF$ , tout autre point  $G$  de  $TG$  est hors du cercle.

Ainsi, pour mener une tangente en  $F$  au cercle  $CA$ , il faut mener le rayon  $CF$  et sa perpend.  $TG$  (n° 188 et 212, 1°).

200. Étant donnés deux points (fig. 55), l'un en  $A$  sur la droite  $AT$ , l'autre en  $B$ , cherchons le cercle  $ABI$  qui passe en  $A$  et  $B$ , et qui touche la droite  $AT$ .  $AB$  étant une corde,  $EF$  perpend. sur le milieu de  $AB$  contient le centre  $C$ ; ce centre est aussi sur  $AG$  perpend. à  $AT$ ; donc il est à l'intersection  $C$ . Ainsi menant les perpend.  $GA$  à  $AT$ , et  $FE$  au milieu de  $AB$ , le point  $C$  de section sera le centre; le rayon sera  $AC$ .

201. Les arcs  $AD$ ,  $BE$  (fig. 54) compris entre deux cordes parallèles  $AB$ ,  $DE$ , sont égaux. Car soit le rayon  $CF$  perpend. à ces deux cordes, on a (n° 195) l'arc  $AF = BF$  et  $DF = FE$ ; en soustrayant, il vient  $AD = EB$ . Les deux cordes peuvent encore comprendre entre elles le centre  $C$ ; telles sont  $AB$  et

$DE'$  ; on a alors  $AF = FB$ ,  $D'F' = F'E'$  ; en soustrayant ces deux équations de la demi-circonf.  $FAP' = FBF'$ , il vient  $AD' = BE'$ .

La même chose a encore lieu pour une corde  $AB$  et la tangente  $TG$  qui lui est parallèle ; car le rayon  $FC$  mène au point de contact  $F$ , étant perpend. à la tangente, l'est aussi à  $AB$  ; donc  $AF = FB$ .

### *Dés Intersections de Cercles.*

202. Si deux circonférences  $C, C'$  (fig. 56) ont un point  $A$  commun sur la ligne  $CC'$  qui contient les centres, elles ne se rencontrent en aucun autre point : car en un point quelconque  $H$  de l'une, menons  $CH$  et  $C'H$ , nous avons  $CC'$  ou  $CA + AC' < CH + HC'$  ; ôtant les égales  $CA$  et  $CH$ , il reste  $AC' < HC'$  : le point  $H$  est donc hors de la circonf.  $C'$ . Si les centres sont en  $C$  et  $C''$  d'un même côté du point commun  $A$ , on a  $CH$  ou  $CA < CC'' + C'H$ , et retranchant  $CC''$ , il reste.....  $CA < C'H$ , le point  $H$  est donc hors de la circonf.  $C''$ .

La perpend.  $AT$  sur  $CC'$  au point  $A$ , est tangente aux deux circonf. qui se touchent en  $A$ .

Mais si les deux cercles  $C$  et  $C'$  ont en  $M$  un point commun (fig. 57) hors de la ligne qui joint les centres, ces cercles se coupent. Menons  $MN$  perpend. sur  $CC'$  ; et prenons  $NM = IM$ . Les obliques égales  $CM$  et  $CN$  prouvent que  $N$  est un point de la circonf.  $C$  ;  $N$  est aussi sur la circonf.  $C'$ , car  $C'M = C'N$ . Donc ces circonf. ont un 2<sup>e</sup> point commun en  $N$ . Un 3<sup>e</sup> point commun serait impossible (n<sup>o</sup> 198).

Donc, 1<sup>o</sup> si les circonférences n'ont qu'un seul point commun, il est situé sur la ligne qui joint les centres, et réciproquement : en outre, la distance des centres est égale à la somme ou à la différence des rayons ; car on a (fig. 56)  $CC' = CA + C'A$ , ou  $CC' = C'A - C'A$ , suivant que l'un des cercles est extérieur ou intérieur à l'autre.

2<sup>o</sup>. Si les cercles se coupent, la ligne qui joint les centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune. De

plus, la distance des centres est moindre que la somme des rayons, et plus grande que leur différence; car on a visiblement (fig. 57)  $CC' < CM + C'M$  et  $CC' + C'M > CM$ , ou.....  $CC' > CM - C'M$ .

3°. Enfin, si les cercles n'ont aucun point commun, la distance des centres est plus petite que la différence des rayons ou plus grande que leur somme, suivant que les cercles sont ou ne sont pas compris l'un dans l'autre; car on a (fig. 58)  $CD = DO - CA - AO$ , et  $CC' = CA + C'B + AB$ .

On conclut de là que  $D$  étant la distance des centres,  $R$  et  $r$  les rayons, on a, lorsque les circonférences

se coupent.....  $D < R + r$  et  $D > R - r$

se touchent  $\left\{ \begin{array}{l} \text{extérieurement.....} D = R + r \\ \text{intérieurement.....} D = R - r \end{array} \right.$

n'ont aucun point commun  $\left\{ \begin{array}{l} \text{extérieurs.....} D > R + r \\ \text{intérieurs.....} D < R - r \end{array} \right.$   
et sont l'un à l'autre

203. La réciproque de chacune de ces propositions est également vraie. Si, par ex., on a à la fois  $D < R + r$  et  $D > R - r$ , les deux circonf. se coupent; car, 1° si elles se touchaient on aurait  $D = R + r$ , ou  $= R - r$ ; et si elles n'avaient aucun point de section,  $D$  serait  $> R + r$ , ou  $< R - r$ .

De même, si  $D = R + r$ , les cercles se touchent extérieurement; car si cela n'est pas, il faut admettre l'une des quatre autres dispositions. Or, s'ils se coupent, on a  $D < R + r$ , ce qui est contraire à la supposition; 2° s'ils se touchent intérieurement, on a  $D = R - r$ , ce qui ne peut être, puisque  $D = R + r$ , etc. (\*).

204. Quand on connaît les centres et les rayons de deux cercles, pour s'assurer s'ils se coupent, ou se touchent, etc.,

(\*) En général, lorsqu'on a prévu tous les cas possibles d'un système, et que chacun comporte des conditions qui ne peuvent coexister avec celles que donnent les autres cas, les réciproques ont lieu, et se démontrent comme on vient de le voir; c'est ce qu'on remarque dans la théorie des obliques, n° 184, ainsi qu'au n° 209, etc.



Il n'est donc pas nécessaire de décrire les circonfs. ; il suffira d'ajouter et de soustraire les rayons, et de comparer les résultats à la distance des centres, pour décider auquel des cinq cas possibles la figure proposée se doit rapporter.

Étant donnés deux points, l'un en  $A$  (fig. 55), sur un cercle  $C$ , et l'autre en  $B$ , pour décrire une circonfs. qui passe par ces points  $A$  et  $B$  et touche ce cercle  $C$  en  $A$ , on mènera la tangente  $AT$ , et le problème sera ramené à celui du n° 200.

### *Des Triangles.*

205. La somme des trois angles de tout triangle  $ABC$  vaut deux droits (fig. 59). Prolongeons en  $CD$ , l'un des côtés  $AC$  du triangle  $ABC$ , et menons  $CF$  parallèle à  $AB$ ; les trois angles en  $C$  sont ceux du triangle; car  $FCD = A$  comme correspondants;  $BCF = B$  comme alternes-internes; ajoutant ces équations,  $FCD + BCF$ , ou  $BCD = A + B$ ; ainsi l'angle extérieur  $BCD$  d'un triangle  $ABC$  est la somme des deux intérieurs opposés  $A$  et  $B$  (ce qui généralise le théorème n° 167). On a donc...  
 $A + B + C = 2$  droits.

Si l'on fait (fig. 60) l'angle  $MON = A$ ,  $MOL = B$ ,  $LOK = C$ , la ligne  $OK$  sera le prolongement de  $NO$ . Cette construction fait connaître l'un des trois angles d'un triangle, quand les deux autres sont donnés.

Concluons de là que, 1° deux triangles qui ont deux angles respectivement égaux, sont équiangles.

2°. Un triangle peut avoir ses trois angles aigus, mais il ne peut avoir qu'un seul angle droit ou obtus. (Voy. n° 167, 2°.)

3°. Les deux angles aigus d'un triangle rectangle  $ABC$  (fig. 61) sont complémentaires,  $B + C =$  un droit  $D$ .

4°. Quand la ligne  $BC$  tourne sur le point  $B$  pour s'écarter de la perpendiculaire  $BA$ , et devient  $BC'$ , l'angle  $ABC$  croît, et l'angle  $C$  décroît, la somme de ces angles aigus restant toujours  $= D$ .

5°. Les trois angles d'un triangle équilatéral étant égaux ( $n^o$  164), chacun vaut les deux tiers d'un droit.

6°. Dans un triangle isocèle ABC (fig. 15),  $A = B$  et  $A + B + C = 2D$ ; donc  $2A + C = 2D$ ,  $A = D - \frac{1}{2}C$ ,  $C = 2(D - A)$ ; il suffit de connaître un seul des angles pour trouver les deux autres.

7°. Deux angles dont les côtés sont respectivement perpendiculaires sont égaux s'ils sont de même nature, comme  $BAC$ ,  $B'A'C'$  (fig. 62); ils sont supplémentaires si l'un est aigu et l'autre obtus, tels que  $BAC$ ,  $C'A'O'$ . Car en prolongeant  $A'B'$  et  $A'C'$ , en D et D', jusqu'à leur rencontre avec AB, AC, qui leur sont perpendiculaires, les triangles rectangles ADF, A'D'F ont les angles A et A' égaux, comme compléments des angles égaux en F.

8°. Quand deux droites AB, CB (fig. 63) vont concourir en un point éloigné ou inaccessible B, on peut trouver l'angle B sans le mesurer actuellement, soit en menant DE parallèle à BC, qui donne  $B = ADE$ ; soit en tirant une droite quelconque AC, mesurant les angles A et C, et prenant le supplément de leur somme  $A + C$ , ainsi qu'on l'a fait ci-dessus.

206. Un triangle est déterminé lorsqu'on en connaît, 1° Deux côtés  $m$  et  $n$  et l'angle  $k$  qu'ils forment (fig. 18); on fera ( $n^o$  177, 3°), un angle  $A = k$ , et sur les côtés indéfinis AG, AH, on prendra  $AC = m$ ,  $AB = n$ ; enfin on tirera BC.

2°. Un côté  $n$  et deux angles  $k$  et  $l$  adjacents; sur l'un des côtés indéfinis  $ba$ ,  $bc$  d'un angle  $a = k$ , on prendra  $ab = n$ ; on mènera  $bc$  faisant l'angle  $b = l$ , le triangle demandé sera  $abc$ .

3°. Un côté  $n$ , un angle  $k$  adjacent, et un angle  $i$  opposé. On cherche d'abord le 3° angle ( $n^o$  205) qui est adjacent au côté  $n$ ; on connaît l'angle  $k$ , et on retombe sur le cas précédent.

4°. Trois côtés  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ; on prendra (fig. 57)  $CC' = m$ , et des centres C, C', avec les rayons  $CM = n$ ,  $C'M = p$  on décrira deux circonférences. Les intersections M, N déterminent les deux triangles égaux  $CMC'$ ,  $CNC'$ , qui résolvent le problème. Les deux cercles ne se coupent qu'autant que  $m > n - p$ .

et  $< n + p$ ; sans cette double condition, le triangle ne peut exister (n° 202).

207. Construire un triangle  $ABC$  (fig. 64) dont on connaît deux côtés  $a, c$ , et l'angle  $K$  opposé à  $a$ ? Faites l'angle  $BCA = K$ ; sur l'un des côtés indéfinis, prenez  $CB = a$  au côté adjacent donné  $a$ ; le côté opposé  $c$  devra se placer comme  $BA$  pour fermer le triangle. Or, du centre  $B$ , avec le rayon  $BA = c$ , décrivez un cercle  $AA'$ ; les points  $A, A'$  de section avec le côté  $AC$ , détermineront les triangles  $ABC, A'BC$ , qui satisfont tous deux à la question; on a donc, en général, deux solutions  $ABC, A'BC$ ; mais il faut distinguer cinq cas.

1°. Si le rayon  $c$  du cercle est plus petit que la perpend.  $BD$ ,  $c < BD$ , le cercle ne coupe pas  $AC$ , et le problème est impossible.

2°. Si ce rayon égale la perpend.,  $c = BD$ , l'arc est tangent en un point  $D$ , et le triangle rectangle  $CBD$  satisfait seul à la question. Donc un triangle rectangle est déterminé par deux de ses côtés; et deux triangles rectangles sont égaux, quand l'hypoténuse et un côté sont respectivement égaux.

3°. Si le rayon  $c$  est  $> BD$  et  $< CB = a$ , les obliques  $BA = BA'$  sont  $< BC$ , et par conséquent situées d'un même côté de  $BC$  (n° 184); les triangles  $ABC, A'BC$  sont l'un et l'autre conformes aux conditions du problème, ce sont les deux solutions. Remarquons que  $A$  est supplément de l'angle  $CA'B$ , puisque le triangle isocèle  $ABA'$  a l'angle  $A = BA'A$ , ainsi, l'un de nos deux triangles est *acutangle*, l'autre *obtusangle*. Si l'on savait d'avance que le triangle cherché a ou n'a pas d'angle obtus, l'une de ces solutions se trouverait exclue.

4°. Si  $c > a$ , ou  $BA > BC$ , les points  $A$  et  $A'$  tombent des deux côtés de  $BC$  (fig. 65); on n'a donc qu'une solution  $ABC$ .

5°. Nous avons jusqu'ici supposé que l'angle donné  $K = A$  est aigu; s'il est obtus, tel que  $BA'C$ , la même construction sert encore à donner la solution  $A'BC$  (fig. 64), qui est unique, parce que le triangle  $ABC$  ne peut convenir à la question. Observez que le côté  $c$  opposé à l'angle obtus  $C$  doit être le plus

grand, et que si l'on eût donné  $c < a$ , le problème eût été absurde.

Deux triangles qui ont deux côtés respectivement égaux, et un angle égal opposé à l'un de ces côtés, sont donc égaux quand ils sont de même nature (l'un et l'autre rectangles, ou acutangles ou obtusangles) (\*).

208. Les cordes égales  $CD$ ,  $AB$  (fig. 66) sont à égales distances du centre  $O$ . Menons les perpend.  $OI$ ,  $OK$ ; les triangles rectangles  $O CI$ ,  $O AK$  sont égaux, à cause de  $CI$  et  $AK$  qui sont des moitiés de cordes égales; donc  $O I = O K$ .

Réciproquement, si  $O I = O K$ , les triangles sont encore égaux; d'où  $CD = AB$ .

Si par un point donné  $M$  ou  $d$ , intérieur ou extérieur au cercle on veut mener une corde  $CD$  de longueur donnée, on la portera arbitrairement en  $AB$  sur la circonsc. ; puis, menant la perpend.  $OK$ , et traçant le cercle  $KI$ , la corde cherchée sera tangente à cette courbe. Ainsi, il restera à mener cette tangente par le point  $M$  (n° 212, II), et on aura les deux solutions du problème.

209. De deux cordes inégales  $AB$ ,  $CD$  (fig. 67), la plus grande  $AB$  est la plus proche du centre  $O$ . Car on a l'arc  $AEB > CFD$  (n° 180) : prenons l'arc  $AE = CD$ , la corde  $AE$  sera  $= CD$ , et à la même distance du centre  $O$ ; d'où  $O L = O I$ . Comme  $AE$  tombe en dessous de  $AB$ , on a  $O I > O G$ , et par conséquent  $> O K$ .

Réciproquement, si  $O L > O K$ , la corde  $CD$  est  $< AB$ ; car autrement on aurait  $CD =$  ou  $> AB$ , d'où l'on conclurait  $O L =$  ou  $< O K$ , par la proposition directe (note n° 203)

210. Résolvons maintenant quelques problèmes.

I. Inscrire un cercle (fig. 68) dans un triangle  $ABC$ , c'est-à-

(\*) En récapitulant tout les cas d'égalité des triangles, on peut dire que deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont trois des parties qui les composent respectivement égales, mais il faut, 1° exclure le cas de trois angles donnés; 2° exiger que si l'on a deux angles donnés, ils soient placés de même à l'égard du côté donné; 3° enfin sous-entendre que s'ils ont deux côtés égaux et un angle égal opposé à l'un, les triangles soient de même nature.



dire tracer une circonférence de cercle qui soit tangente aux trois côtés. Ce problème revient à trouver un point  $O$  intérieur, qui soit à égale distance des trois côtés du triangle  $ABC$ ; car, si les perpend.  $OE$ ,  $OD$ ,  $OF$  sont égales, le cercle décrit du centre  $O$ , avec le rayon  $OE$ , sera tangent aux trois côtés (n° 199).

Cherchons d'abord un point  $o$  à égale distance des deux côtés  $AC$ ,  $AB$ ; menant  $Ao$ , les perpend. égales  $oe$ ,  $of$  donnent les triangles rectangles égaux  $Aeo$ ,  $Aof$  (n° 207, 2°.). Donc  $Ao$  divise l'angle  $A$  en deux parties égales.

Réciproquement, si la droite  $Ao$  coupe l'angle  $A$  en deux parties égales, tout point  $o$  de cette ligne donne les deux perpendiculaires égales  $oe$ ,  $of$ .

Donc, tous les points de la ligne  $AO$  sont à même distance de  $AB$  que de  $AC$ , et les points de cette ligne jouissent seuls de cette propriété; en sorte que  $AO$  est le lieu de tous les centres des cercles tangens à ces deux côtés, et que, par conséquent, le centre cherché est l'un des points de  $AO$ . Ce centre doit aussi, par la même raison, se trouver sur la droite  $OB$ , qui divise l'angle  $B$  en deux parties égales; il sera donc à leur intersection ( $O$ ), qui non-seulement sera à égale distance des trois côtés du triangle, mais encore qui jouira seul de cette propriété. Menons la droite  $OC$ ; elle divisera l'angle  $C$  en deux parties égales, puisque les deux triangles rectangles  $ECO$ ,  $DCO$  ont l'hypoténuse commune et un côté égal,  $OD = OE$ .

Concluons donc de là,

- 1°. Qu'on peut inscrire un cercle dans tout triangle;
- 2°. Qu'on n'en peut inscrire qu'un seul;
- 3°. Que le centre est situé à l'intersection de deux lignes qui divisent en parties égales deux des angles du triangle;
- 4°. Que la droite menée de ce centre au 3<sup>e</sup> angle, coupe pareillement cet angle en parties égales.

Soit  $p$  le contour ou Périmètre du triangle (fig. 68); comme on a  $AF = AE$ ,  $BF = BD$ ,  $CE = CD$ , on en tire.....  
 $p = 2AF + 2BD + 2CD$ , ou  $p = 2AF + 2BC$ ; d'où

$$AF = \frac{1}{2}p - BC = AE = \frac{1}{2}(AB + AC - BC).$$



Il est donc aisé de trouver les points  $F$ ,  $E$ , et par suite  $D$ , puisque  $CE = CD$ ; on pourra résoudre le problème en faisant passer une circonf. tangente aux trois côtes, en  $D$ ,  $E$ ,  $F$ .

II. Décrire un cercle (fig. 52) dans lequel deux droites données  $AB = m$ ,  $AD = n$ , soutendent des arcs doubles l'un de l'autre? Comme le triangle  $ADB$  doit être isoscèle, après avoir tiré  $AB = m$ , on décrira des centres  $A$  et  $B$ , avec le rayon  $n$ , des arcs qui détermineront le point  $D$  et le triangle  $ABD$ , auquel il ne s'agira plus que de circonscrire un cercle.

III. Construire le triangle rectangle  $BAC$  (fig. 69), dont un côté  $AB$  de l'angle droit et le périmètre  $BE$  sont données? Puisque  $BC + CA = AE$ , élevons en  $A$  la perpend.  $AD = AE$ ; nous aurons  $BC = CD$ , et le triangle  $BCD$  sera isoscèle; ainsi,  $CI$  perpend. au milieu de  $BD$  donnera le point  $C$ .

IV. Par un point  $I$  (fig. 59), mener dans l'angle  $BCA$  une droite  $AIB$  qui forme le triangle isoscèle  $ABC$ , savoir  $AC = BC$ , et l'angle  $A = B$ . L'angle extérieur  $BCD$  étant  $= A + B$  (n° 205)  $= 2A$ , si l'on mène  $CF$  qui coupe par moitiés l'angle  $BCD$ ,  $FCD$  sera  $= A$ , et  $CF$  parallèle à  $AB$ . Donc, il faut tracer  $CF$ , et par le point donné  $I$  mener  $AIB$  parallèle à  $CF$ .

V. Par un point donné  $M$  (fig. 66), mener  $CD$  telle, que la partie  $dD$  interceptée entre les deux circonfér. concentriques  $DB$ ,  $db$  soit de longueur connue  $l$ ? Si  $CD$  est la droite cherchée, toute corde  $AB = CD$  est à la même distance du centre, ou  $KO = OI$ ,  $KB = ID$ ,  $Kb = Id$ , puis  $Bb = Dd = l$ . Qu'en un point quelconque  $B$  on porte la longueur  $l$  de  $B$  en  $b$ , entre les deux circonfér.; qu'on mène la droite  $bB$  prolongée en  $A$ ; enfin, qu'on trace le cercle  $OIK$  tangent à  $Ab$ , il le sera aussi à la droite cherchée  $CD$ ; il ne s'agira plus que de mener par le point  $M$  une tangente  $CD$  à ce cercle  $IK$ ; ce sera la droite demandée.

VI. Construire un triangle rectangle  $BCD$  (fig. 64), dont on connaît l'hypoténuse  $BC$ , et la somme ou la différence des côtés  $CD$ ,  $BD$  de l'angle droit? Soit  $AD = BD = A'D$ ; les triangles rectangles isoscèles  $BAD$ ,  $BA'D$  ont les angles  $A$  et  $A'$

égaux à la moitié d'un droit ( $n^{\circ} 205, 3^{\circ}$ ). Dans le triangle  $BAC$  ou  $B'A'C'$ , outre  $BC$ , on connaît donc l'angle  $A$  ou  $A'$ , et le côté  $AC$  ou  $A'C'$ , et il est aisé de décrire ce triangle. Sur la base  $AC$  ou  $A'C'$ , on tirera  $AB$  ou  $A'B'$  sous la direction d'un demi-angle droit, du centre  $C$ , et avec le rayon  $CB$ , on tracera un cercle qui coupera  $AB$  ou  $A'B'$  au sommet  $B$  (il y a en général deux points d'intersection, et par conséquent deux solutions  $n^{\circ} 207$ ) ; il restera ensuite à abaisser la perpend.  $BD$  qui terminera le triangle demandé  $BCD$ .

### Mesure des angles dans le cercle.

211. Nous connaissons la mesure des angles dont le sommet est au centre ( $n^{\circ} 181$ ) ; cherchons cette mesure lorsque le sommet est situé d'une manière quelconque ; et d'abord examinons le cas où l'angle est formé par deux cordes, le sommet étant sur la circonsc. ; on dit alors que l'angle est *Inscrit* : il a pour mesure la moitié de l'arc compris entre les côtés

1<sup>o</sup>. Si l'un des côtés  $AD$  de l'angle  $GAD$  (fig. 70) passe par le centre  $C$ , en menant  $EF$  parallèle à  $AG$ , on a  $GE = AF$  ( $n^{\circ} 201$ ) ; mais aussi  $ED = AF$ , à cause des angles égaux  $ACF$  et  $DCE$  ; ainsi,  $E$  est le milieu de l'arc  $GD$ , et l'angle  $ECD$  ou son égal  $GAD$  ( $n^{\circ} 182, 4^{\circ}$ ), a pour mesure  $ED$  ou la moitié de l'arc  $GD$ .

2<sup>o</sup>. Si le centre  $C$  est entre les côtés de l'angle  $BAG$ , en menant le diamètre  $AD$ , les angles  $BAD, DAG$  ayant pour mesure les moitiés de  $BD$  et de  $DG$ , la somme, ou la moitié de l'arc  $BDC$ , est la mesure de l'angle  $BAG$ .

3<sup>o</sup>. Si le centre  $C$  est hors de l'angle, comme pour  $HAB$ , on a de même  $\angle HD$  et  $\angle BD$  pour mesures des angles  $HAD, BAD$  ; en retranchant, on trouve  $\angle HB$  pour mesure de l'angle  $HAB$ .

4<sup>o</sup>. Enfin, s'il s'agit de l'angle  $TAB$ , formé par une tangente  $AT$  et par une corde  $AB$ , le diamètre  $AD$  est perpendiculaire à  $AT$ , l'angle  $TAD$  a donc pour mesure le quadrans ou la moitié de l'arc  $AHBD$ , celle de  $BAD$  est  $\angle BD$ , la différence de ces arcs est  $\angle AHB$ , mesure de l'angle  $TAB$ .

Réciproquement, si un angle  $BAG$  a pour mesure  $\frac{1}{2} BG$ , le sommet  $A$  est sur la circonf.; car, si  $\frac{1}{2} BG$  pouvait mesurer l'angle  $BIG$ , on formerait l'angle  $BAG$  qui aurait même mesure, d'où  $BIG = BAG$ , ce qui ne se peut (n° 171).

Prolongeons en  $K$  le côté  $HA$  de l'angle  $HAG$ ; la moitié de l'arc  $GAH$  est la mesure de l'angle  $KAG$ , puisque  $KAG$  est supplément de l'angle  $HAG$ .

On verra aisément que

5°. L'angle  $BAD$  (fig. 71) inscrit dans le demi-cercle, est droit, car il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence.

6°. Tous les angles inscrits  $A, C, D, \dots$  (fig. 72), qui s'appuient sur le même arc  $BE$ , ayant même mesure, sont égaux.

7°. Si un angle  $BAE$ , de grandeur fixe, se meut de manière que ses côtés passent sans cesse l'un en  $B$ , l'autre en  $E$ , le sommet prenant successivement les positions  $A, C, D, \dots$  décrira la circonf.

212. On résout divers problèmes à l'aide de ce théorème.

I. Abaisser une perpendiculaire  $AD$  (fig. 71) à l'extrémité d'une ligne  $AB$  sans la prolonger. Puisque l'angle  $A$  doit être droit, toute ligne  $BD$  doit être le diamètre d'un cercle passant en  $A$  (5°). On décrira donc, du centre quelconque  $C$ , un cercle qui passe en  $A$ ; puis par le point  $B$  où ce cercle coupe  $AB$ , on mènera le diamètre  $BD$ , qui donnera le point  $D$ ;  $DA$  sera la perpend. cherchée.

II. Par un point extérieur  $D$  (fig. 73) mener une tangente  $AD$  au cercle  $CAB$ . Puisque l'angle  $CAD$ , formé par la tangente et le rayon, doit être droit, cet angle est inscrit dans le demi-cercle dont  $CD$  est le diamètre (5°). On décrira donc cette circonf.  $CADB$ ; elle coupera le cercle proposé  $CAB$  au point de contact  $A$ . On aura, outre la tangente  $AD$ , une autre solution  $BD$ , et il est prouvé que ces deux lignes satisfont seules à la question.

III. Partager l'angle quelconque  $ACB$  (fig. 74) en trois parties égales. Traçons du sommet  $C$  le cercle  $IFAB$ ; concevons la ligne  $AO$  tracée de manière à former l'angle  $O = \frac{1}{3} ACB$ . L'angle  $ACB$  est extérieur au triangle  $AOC$ , d'où  $3O = O + OAC$ ;

et  $OAC = 2O$ . Mais menant le rayon  $FC$ , le triangle isoscèle  $FAC$  donne  $OAC = AFC$ ; or l'angle  $AFC$ , extérieur au triangle  $OFC$ , est  $= O + FCO = OAC = 2O$ ; il en résulte que l'angle  $FCO = O$ , et que le triangle  $FCO$  est isoscèle,  $OF =$  le rayon  $CF$  du cercle.

Le problème proposé consiste donc à savoir mener la droite  $AO$  telle, que la partie extérieure  $OF$  soit égale au rayon; l'angle  $O$  sera le tiers de l'angle  $ACB$ , l'arc  $BG$  ou  $FI$  le tiers de l'arc  $AB$ . Mais il n'appartient pas à la Géométrie élémentaire de donner des moyens de mener cette droite  $AO$ : comme on n'y traite que des propriétés de la ligne droite et du cercle, on n'y emploie aussi que la règle et le compas; on verra d'ailleurs des moyens d'opérer la *trisection de l'angle*, ce qu'on ne peut faire ici que par tâtonnement.

IV. Décrire un cercle qui passe en deux points donnés  $B, E$  (fig. 75), et qui soit tel, que les angles  $O$  inscrits soient égaux à un angle donné  $A$ ; c'est ce qu'on appelle *décrire sur une droite  $BE$ , un segment capable de l'angle  $A$* . La tangente en  $E$  fera aussi l'angle  $BEK = A = O$  (n° 211, 4°.); si donc on mène la droite  $KEI$  telle que l'angle  $BEK$  soit  $= A$ , elle sera tangente. La question est donc réduite à faire passer en  $B$  un cercle tangent à  $KI$  au point  $E$  (n° 204). On élèvera les perpend.  $CE$  à  $KI$ , et  $CG$  sur le milieu de  $BE$ ;  $C$  sera le centre.

Cette construction est souvent employée, surtout lorsqu'il s'agit de former un triangle dans lequel on connaît, entre autres choses, un côté et l'angle opposé, comme dans les questions suivantes.

V. Décrire un triangle  $BDE$  (fig. 76) dont on connaît la base  $b$ , la hauteur  $h$  et l'angle  $A$  du sommet. Après avoir tracé  $BE = b$  et sa parallèle  $DD'$ , à la distance  $HG = h$  de  $BE$ , on décrira sur  $BE$  un segment capable de l'angle donné  $A$ , et les points où  $DD'$  coupera le cercle, donneront pour solutions les triangles demandés  $BDE, BD'E$ .

VI. Soient trois points  $B, A, C$  (fig. 77) tracés sur une même droite, fixer le lieu d'un quatrième point  $D$ , connaissant les



angles  $BDC$  et  $BDA$ . On décrira sur  $BC$  le segment  $miB$  capable de l'angle  $BDC$ , ainsi qu'on vient de le dire, et le point cherché  $D$  sera sur cette circonférence  $miB$ , qui est le lieu des sommets  $D$  de tous les angles égaux à  $BDC$ . De même, sur  $BA$ , le segment  $pqA$  capable de  $BDA$  : le point  $D$  sera à l'intersection des deux circonf. Quand l'une de ces circonf. passe à la fois par les trois points  $ABC$ , selon que l'autre est ou n'est pas dans le même cas, le problème est indéterminé ou absurde.

VII. Construire un triangle  $ABC$  (fig. 68) dont on connaît la base  $AB$ , l'angle opposé  $C$  et le rayon  $OF$  du cercle inscrit? Puisque  $OA$  et  $OB$  divisent en deux parties égales les angles  $A$  et  $B$  du triangle cherché  $ABC$ , dans le triangle  $AOB$ , l'angle  $O$ , supplément de  $OAF + OBF$ , ou de  $\frac{1}{2}(A+B)$ , est  $O = 2D - \frac{1}{2}(A+B)$ ; et comme  $A+B = 2D - C$ , on a  $O = D + \frac{1}{2}C$ . L'angle  $O$  étant connu, on déterminera le point  $O$  (prob. V), puis traçant le cercle  $EDF$ , qui touche  $AB$  en  $F$ , les tangentes  $AE$ ,  $BD$  achèveront le triangle cherché.

VIII. Étant données un triangle  $A'B'C'$  (fig. 78) et deux circonf. concentriques  $AO$ ,  $CO$ , construire un triangle  $ABC$  qui ait deux sommets  $A$  et  $B$  sur la grande circonf., et l'autre  $C$  sur la petite, et qui soit équiangle avec le propose  $A = A'$ ,  $B = B'$ ,  $C = C'$ .

L'angle  $A$  ayant pour mesure  $\frac{1}{2}BD$ , si de  $A'$ , comme centre, et du rayon  $AO$  on décrit l'arc  $HI$ , il sera moitié de  $BD$ . On prendra donc en un lieu quelconque l'arc  $BD = 2.HI$ ; les côtes  $AB$  et  $AC$  passeront par  $B$  et  $D$ . De plus, l'angle  $BCD$  étant supplément de  $C'$ , on aura le lieu du sommet  $C$ , en décrivant sur la corde  $BD$  un segment  $BCcD$  capable de cet angle  $2D - C'$ ; la droite  $DCA$  donnera le point  $A$ , et le triangle cherché  $ABC$ .

Le point  $c$  donne le triangle  $aBc$ , autre solution du problème; outre qu'on peut attribuer à la corde  $BD$  une infinité de situations, ce qui donne autant de solutions doubles.

213. L'angle  $BAC$ , dont le sommet  $A$  est en un lieu quelconque du plan (fig. 79 et 80), a pour mesure la moitié de la somme ou de la différence des arcs  $BC$ ,  $DE$ , compris entre les



côtés, selon que le sommet  $A$  est au-dedans ou au-dehors de la circonférence.

Menez  $EF$  parallèle à  $DC$ . 1<sup>o</sup> Si  $A$  est situé dans la circonf. (fig. 79), la mesure de l'angle  $E = BAC$  est

$$\frac{1}{2} BF = \frac{1}{2} (BC + CF) = \frac{1}{2} (BC + DE).$$

2<sup>o</sup>. Si  $A$  est situé hors du cercle (fig. 80), la mesure de l'angle  $A = BEF$  est  $\frac{1}{2} BF = \frac{1}{2} (CB - CF) = \frac{1}{2} (CB - ED)$ .

Ainsi, la mesure de l'angle  $A$  est  $\frac{1}{2} (a \pm b)$ , en faisant  $a = BC$ ,  $b = DE$ . Cette formule est même générale, car  $b = 0$  répond au cas où le sommet est sur la circonf., et  $b = a$  à celui où il est au centre.

### *Lignes proportionnelles. Triangles semblables.*

214. Soient deux droites quelconques  $AH$ ,  $ah$  (fig. 81); si sur l'une on prend des parties égales  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD \dots$ , et que par les points de division, on mène des parallèles  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc \dots Hh$ , dans une direction arbitraire, les parties  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd \dots$  qu'elles interceptent sur  $ah$ , sont égales entre elles. Car si l'on mène  $ai$ ,  $bl$ ,  $cm \dots$  parallèles à  $AH$ , on aura des triangles  $aib$ ,  $blc$ ,  $cmd \dots$  égaux entre eux, à cause de  $ai = bl = cm \dots = AB = BC = \dots$

Il suit de là que  $AB$  sera contenu dans  $AH$  autant de fois que  $ab$  dans  $ah$ , etc. d'où  $\frac{AE}{EH} = \frac{ae}{eh}$ ;  $AE : EH :: ae : eh$ .

215. Deux droites  $AH$  et  $ah$  (fig. 82) sont coupées en parties proportionnelles par trois parallèles quelconques  $Aa$ ,  $Ee$ ,  $Hh$ ,

savoir,  $\frac{AE}{EH} = \frac{ae}{eh}$ ; car,

1<sup>o</sup>. Si les parties  $AE$ ,  $EH$  sont commensurables, en portant la commune mesure sur  $AH$ , elle sera contenue un nombre exact de fois dans  $AE$  et  $EH$ : on retombera donc dans le cas ci-dessus, parce que les parallèles à  $Aa$ , menées par les points de division, couperont  $ah$  en parties égales.

2°. Si  $AE$  et  $HE$  sont incommensurables, divisons  $AE$  en un nombre arbitraire de parties égales, et portons l'une d'elles de  $E$  vers  $H$ ; soit  $I$  le point de division le plus près de  $H$ ; menons  $Ii$  parallèle à  $Hh$ . Cela posé,  $AE$  et  $EI$  étant commensurables, on a  $\frac{EI}{EA} = \frac{ei}{ea}$  : et comme  $EI = EH - HI$ ;  $ei = eh - hi$ , il vient  $\frac{EH}{EA} - \frac{HI}{EA} = \frac{eh}{ea} - \frac{hi}{ea}$ . Or, les distances  $HI$  et  $hi$  peuvent être rendues aussi petites qu'on voudra, en prenant le nombre de divisions de  $AE$  de plus en plus grand, les autres termes étant constans : de sorte que les points  $H$  et  $h$  sont les limites de  $I$  et  $i$ . Puisque les 2<sup>es</sup> termes des deux membres décroissent indéfiniment, le principe fondamental (n° 113) donne donc encore  $\frac{EH}{EA} = \frac{eh}{ea}$ .

De la proportion démontrée, on tire (n° 73)

$$\frac{AE}{AH} = \frac{ae}{ah}, \text{ d'où } \frac{AH}{ah} = \frac{AE}{ea} = \frac{EH}{eh}.$$

216. Une parallèle  $EB$  à la base d'un triangle  $HAC$  (fig. 82) coupe les côtés en parties proportionnelles, puisque  $AB = ae$ ,  $BC = eh$ ; d'où

$$\frac{AE}{AH} = \frac{AB}{AC} = \frac{EH}{BC}.$$

On peut répéter sur le triangle  $HAC$  ce qu'on a dit sur la fig. 81.

Réciproquement, si l'on a  $\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BC}$ ,  $EB$  est parallèle à  $HC$ ; car si cela n'était pas, menant  $HL$  parallèle à  $EB$ , on aurait  $\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BL}$ ; donc  $BL = BC$ .

217. Il suit de là que, 1° lorsqu'on a trois lignes  $m$ ,  $n$ ,  $p$  (fig. 82), pour trouver une quatrième proportionnelle, c.-à-d. une ligne  $x$ , telle qu'on ait  $\frac{m}{n} = \frac{p}{x}$ , on fera un angle quelconque  $HAC$ , on prendra sur ses côtés  $AE = m$ ,  $AB = n$ ,

$AB = p$ ; puis menant  $EB$  et sa parallèle  $BC$ ,  $AC$  sera la quatrième proportionnelle cherchée  $x$ .

2°. Les lignes quelconques  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $AE$ ,  $AF$ , ..... (fig. 83) partant d'un même point  $A$ , sont coupées en parties proportionnelles par les parallèles  $Bf$ ,  $bf$ ; car en n'ayant égard qu'à  $AB$  et  $AC$ , on a  $\frac{AB}{Ab} = \frac{AC}{Ac}$ ; de même  $\frac{AC}{Ac} = \frac{AD}{Ad}$ , à cause des droites  $AC$  et  $AD$ , etc. Réunissant ces proportions qui ont rapport commun, il vient

$$\frac{AB}{Ab} = \frac{AC}{Ac} = \frac{AD}{Ad} = \frac{AE}{Ae} = \frac{AF}{Af} \dots$$

3°. Pour diviser une droite donnée  $AF$  (fig. 84) en plusieurs parties égales, par ex. en cinq, on mènera une ligne quelconque indéfinie  $aF$ , sur laquelle on portera cinq fois l'ouverture de compas arbitraire  $Fe = ed = de = \dots$ , puis menant  $Aa$  et les parallèles  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$ ,  $Ee$ , on aura.....  $AB = BC = CD = \dots$

4°. Pour partager une ligne donnée  $a'F$  (fig. 85) en parties proportionnelles à celles d'une autre droite donnée  $af$ , on tirera la ligne quelconque  $AF$ , sur laquelle on portera  $FE = fe$ ,  $ED = ed$ ,  $DC = dc$ , ....; puis menant  $Aa'$  et les parallèles  $Bb'$ ..., on aura les points de division cherchés  $e'$ ,  $d'$ ,  $c'$ ....

Si  $fa$  est l'une des dimensions d'une figure, et qu'on veuille que cette dimension devienne  $Fa'$ , il faudra changer les parties  $fe$ ,  $fd$ ... en  $Fe'$ ,  $Fd'$ ... L'échelle d'un plan étant, par ex.,  $fa$ , elle est devenue  $Fa'$ . C'est à cette construction que se rapporte l'art de réduire un plan à une échelle donnée.

218. Deux triangles  $ABC$ ,  $A'B'C'$  (fig. 86) dont les angles sont respectivement égaux, sont nommés *Semblables* ou *Équirangles*: les côtés de même dénomination sont appelés *Homologues*. Soient  $A = A'$ ,  $B = B'$ ,  $C = C'$ ;  $AB$  est homologue de  $A'B'$ ,  $BC$  de  $B'C'$ ,  $AC$  de  $A'C'$ . Les côtés homologues se distinguent en ce qu'ils sont opposés aux angles égaux.

Deux triangles semblables ont les côtés homologues proportionnels. En effet, plaçons le triangle  $A'B'C'$  sur  $ABC$ , de

per *Lo* en 9, on calcule le 9<sup>e</sup> de 57, qui est 6, et l'on prend une longueur de six parties de l'échelle.

Cette échelle est surtout employée pour réduire les lignes d'un dessin dans un rapport donné : on a coutume de former *CD* et *CA* de dix parties, et de numérotter convenablement les transversales, afin d'en faciliter l'usage. C'est alors une *échelle de dixmes*. (Voy. fig. 89.)

6°. Voici un autre moyen remarquable de sous-diviser une échelle en fractions très petites. Si les longueurs égales *AB*, *CD* (fig. 90) sont partagées, l'une en 5, l'autre en 6 parties égales aux points 1, 2, 3... et 11, 12 .., la longueur *A11*, que nous désignerons par *a*, sera le 5<sup>e</sup> de *AB*,  $a = \frac{1}{5} AB$ , et  $C1 = \frac{1}{6} AB$ ; d'où  $A11 - C1 = \frac{1}{5} AB - \frac{1}{6} AB = \frac{1}{30} AB$ , ou  $\frac{2}{6} a$ . Donc, les règles étant appliquées *C* en *A*, *D* en *B*, le n° 11 dépassera le n° 1 de  $\frac{1}{6} a$ , 12 dépassera 2 de  $\frac{2}{6} a$ , 13 de  $\frac{3}{6} a$ ...

D'après cela, si l'on a trouvé qu'une longueur portée sur l'échelle *AB* s'étend du point zéro jusqu'en *i*, elle contient 13 parties, plus la fraction  $i13$ , qu'il faut évaluer. On applique la règle *CD* (qu'on appelle *Fernier* ou *Nonius* du nom des inventeurs) en *C'D'* le long de *AB*, de manière que *C'* réponde en *i*; examinant la suite des divisions, on en reconnaît deux qui coïncident, *H* et 5, ainsi la division 17 dépasse 4 de  $\frac{1}{6} a$ , 16 dépasse 3 de  $\frac{2}{6} a$ ...; enfin 13 dépasse *C'* ou *i* de  $\frac{2}{6} a = i13$ , c'est la fraction cherchée, et  $13 \frac{2}{6}$  est la longueur proposée en parties de l'unité *a*.

On a soin de faire les divisions serrées, afin que les fractions soient plus petites, et qu'on soit assuré que deux divisions coïncideront toujours sensiblement. Si  $n-1$  parties de *AB* répondent à *n* divisions du vernier *CD*, celui-ci sert à évaluer le n° d'une division de l'échelle; et si la coïncidence est établie à la graduation *k*<sup>e</sup> du vernier, la fraction est  $\frac{k}{n}$ . L'entier est donné par le chiffre de la ligne *AB*, et la fraction par celui du vernier.

L'échelle de la fig. 91 a 9 de ses divisions coupées en 10 sur le vernier *AB*, qui donne les 10<sup>es</sup> : les divisions en coïncidence sont au n° 6 du nonius, et la longueur de 0 à *A* est 57,6.

Le même principe s'applique à la division des arcs de cercle, dans les instrumens propres à mesurer les angles. Si l'on a divisé (p. 239) la circonférence en 360 parties égales ou *degrés*, et chaque degré en deux; qu'une alidade mobile autour du centre porte à son extrémité un vernier dont 30 parties interceptent 29 de ces demi-degrés; ces sous-divisions du nonius dépasseront de  $\frac{1}{30}$ ,  $\frac{2}{30}$ ,  $\frac{3}{30}$ ... les demi-degrés, et donneront ainsi, à la seule inspection, des 60<sup>e</sup> de degrés ou des *minutes*. Si le zéro de l'alidade est d'abord placé (fig. 36) en *a*, au n° 0 du cercle, et si elle est dirigée à un objet *A*, l'instrument restant ainsi fixé dans le plan des points *A C B*; qu'on fasse glisser l'alidade sur le limbe pour la diriger à l'objet *B*, le zéro de l'alidade sera porté sur un point *b* du cercle, et l'arc *ab* qui mesure l'angle proposé *ACB* sera formé, par ex., de 53 degrés et d'une fraction que le vernier servira à faire estimer en minutes. Il suffira d'examiner quelle est la division du vernier qui coïncide avec une de celles du cercle, et de compter son rang à partir de zéro. A cet effet, on grave les chiffres des divisions du vernier de 5 en 5; on lit ainsi les degrés sur le cercle et les minutes sur le vernier.

221. Soit un triangle *ABC* (fig. 92) rectangle en *A*; si l'on abaisse sur l'hypoténuse *BC* la perpend. *AD*, les deux triangles partiels *ABD*, *ADC* seront semblables entre eux et à *ABC*. Car l'angle *B* est commun aux triangles *ABD* et *ABC*; outre l'angle droit, en *D* pour l'un, et en *A* pour l'autre: il suit donc de là que l'angle *C* est égal à *BAD*,  $C = \alpha$ . De même *C* est commun aux triangles *ADC* et *ABC*, outre l'angle droit; ainsi  $\beta = B$ . Les triangles *ABD* et *ADC* ont d'ailleurs les côtés perpend. En formant des proportions avec les côtés homologues, on trouve que,

1°. La perpendiculaire *AD* est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de l'hypoténuse *BC*. Car les triangles *ABD* et *ADC* donnent  $\frac{DB}{AD} = \frac{AD}{DC}$ , d'où  $AD^2 = BD \times DC$

2°. Chaque côté *AB* de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière *BC* et le segment *BD* correspondant,



Car les triangles  $ABD$ ,  $ABC$  donnent  $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$ , ou.....

$AB^2 = BD \times BC$ ,  $ADC$  et  $ABC$  donnent  $AC^2 = DC \times BC$ .

3°. Le carré de l'hypoténuse  $BC$  est au carré d'un des côtés  $BA$  de l'angle droit, comme l'hypoténuse  $BC$  est au segment  $BD$  correspondant à ce côté. Cela suit de l'équ.....

$AB^2 = BD \times BC$ , divisée par  $BC$ , puisqu'on a  $\frac{AB^2}{BC} = BD$ .

4°. Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. En effet, ajoutant les équations.....

$AB^2 = BD \times BC$ ,  $AC^2 = DC \times BC$ , on trouve

$$AB^2 + AC^2 = BC(BD + DC) = BC^2$$

Designant par  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les côtés opposés respectivement aux angles  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $a$  étant l'hypoténuse, on a

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Cette proposition, la 47° d'Euclide, et la plus importante de toute la Géométrie, apprend à trouver la longueur de l'un des côtés de tout triangle rectangle, connaissant les deux autres; on a en effet,

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}, \text{ et } b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Rapportant donc les côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$  à une unité, on en mesurera deux (n° 175), et l'on conclura par un calcul simple le nombre d'unités du troisième. Soit, par exemple,  $b = 3$ ,  $c = 4$ , on trouve  $a^2 = 9 + 16 = 25$ , d'où  $a = 5$ .

La réciproque de cette proposition résulte des deux suivantes. On peut, au reste, démontrer directement que si...  $AC^2 = AD^2 + DC^2$  (fig. 15), le triangle  $ADC$  est rectangle, car, menons  $DB$  perpend. sur  $CD$ , et prenons  $DB = AD$ ; le triangle  $DCB$  est rectangle, et l'on a  $CB^2 = DB^2 + DC^2$ ; ainsi  $CB^2 = AC^2$ , et les deux triangles  $ACD$ ,  $BCD$  sont égaux. Donc l'angle  $ADC = CDB = 1$  droit.

222. Le carré d'un côté de tout triangle quelconque est égal à la somme des carrés des deux autres côtés  $\pm$  le double de

produit de la projection de l'un de ces deux côtés sur l'autre multiplié par ce dernier côté. On prend + quand le premier côté dont on cherche la valeur est opposé à un angle obtus, et — quand ce côté est opposé à un angle aigu.

En effet, si l'angle  $A$  (fig. 64) du triangle  $ABC$  est aigu, en abaissant la perpend.  $BD$  sur  $AC$ , on a deux triangles rectangles  $CBD$ ,  $ABD$  qui donnent

$$BC^2 = BD^2 + DC^2, \quad BD^2 = AB^2 - AD^2;$$

d'où  $BC^2 = DC^2 + AB^2 - AD^2$ ,  $a^2 = c^2 + DC^2 - x^2$ , en désignant par  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les trois côtés  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  du triangle. et faisant  $AD = x$ . Or,  $DC = AC - AD = b - x$ ; en substituant il vient

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx.$$

Si le triangle proposé a son angle  $A$  obtus, comme cela arrive à  $A'BC$ , tout se passe de même, si ce n'est que...  $DC = CA' + A'D = b + x$ , d'où

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx.$$

Ici  $x$  désigne le segment adjacent à l'angle  $A$  qui est opposé au côté  $a$  dont on cherche la valeur.

223. Ainsi, lorsque les trois côtés d'un triangle sont donnés, il est bien aisé de juger de la nature de chacun de ses angles; on prendra les perpend.  $AB$  et  $AC$  (fig. 16) égales aux deux petits côtés  $b$  et  $c$ , et l'on mènera  $BC$ ; suivant que  $BC$  sera  $<$ ,  $>$  ou  $= a$ , l'angle opposé au grand côté  $a$  sera aigu, obtus ou droit: dans ce dernier cas,  $BAC$  serait le triangle même.

Si les côtes sont donnés en nombres, après en avoir fait les carrés  $a^2$ ,  $b^2$  et  $c^2$ , on comparera le plus grand à la somme des deux autres, et, suivant qu'il sera égal, plus petit ou plus grand que cette somme, l'angle opposé sera droit, aigu ou obtus. Le calcul peut même donner la longueur de la perpend.  $BD = h$  (fig. 64). Car on tire de notre formule

$$x = AD = \frac{1}{2} b - \frac{(a+c)(a-c)}{2b},$$

$x$  devient négatif, lorsque l'angle  $A$  auquel se rapporte le seg-

ment  $x$  est obtus, comme pour le triangle  $A'BC$ , pour lequel  $a^2 > b^2 + c^2$ . La fraction prend le signe  $+$  quand  $a < c$ , comme fig. 65.

Le second segment de la base est  $CD = y = b - x$ ; enfin la hauteur est (\*)

$$h = BD = \sqrt{(c+x)(c-x)}.$$

Toutes ces formules se prêtent aux log. Soient, par exemple,  $a = 150$ ,  $b = 66$ ,  $c = 110$ ; on voit que le triangle est possible (n° 206, 4°.), car  $150 < 110 + 66$ , et  $> 110 - 66$ . De plus  $150^2 > 110^2 + 66^2$ , donc l'angle  $A$  est obtus; on trouve  $AD = x = 33 - 78,78... = -45,7878... BD = h = 100,017$ .

224. Si la ligne  $AC$  (fig. 93) divise en deux parties égales l'angle  $A$  au sommet du triangle  $BAD$ , les côtés  $AB$  et  $AD$  sont proportionnels aux segmens  $BC$  et  $CD$  de la base. En effet, en prolongeant  $DA$  en  $E$ , jusqu'à la rencontre de  $BE$  parallèle à  $AC$ , on a  $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{BC}$ : or, l'angle  $BAC = ABE = DAC$ , de plus  $E = DAC$ ; donc  $E = ABE$ . Le triangle  $EAB$  étant isoscèle, on a  $AE = AB$ ; donc  $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ .

225. Les parties de deux cordes  $BE$ ,  $DC$  (fig. 94) qui se coupent en  $A$ , forment des produits égaux (\*\*).  
 $BA \times AE = DA \times AC$ . En effet, menant  $BC$  et  $DE$ , nous avons les triangles  $BAC$ ,  $DAE$  qui sont semblables à cause des angles (p. 258) inscrits au même arc,  $E = C$ ,  $B = D$ . Comparant les côtés homologues, il vient  $\frac{BA}{AC} = \frac{AD}{AE}$ ; d'où...  
 $BA \times AE = AD \times AC$ .

(\*) On peut donc trouver la surface d'un triangle dont on connaît les trois côtés, puisqu'on a sa base  $b$  et sa hauteur  $h$ . Dans notre ex. numérique, cette aire est  $= \frac{1}{2} 66 \times 100,017 = 3300,56$ .

(\*\*). On énonce ordinairement ainsi ce théorème et celui du n° 228. Les cordes se coupent en parties réciproquement proportionnelles, les sécantes sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures. Nous avons préféré les énonciations ci-dessus, comme comprises dans une phrase plus claire et plus facile à se présenter à l'esprit.

226. La perpend.  $AD$  (fig. 95) au diamètre  $BE$  se nomme une ordonnée.

L'ordonnée  $AD$  est moyenne proportionnelle entre les segments  $AB$ ,  $AE$  du diamètre; car  $AD = AC$  dans la proportion qui précède. D'ailleurs ceci revient au n° 221, 1°, puisque (fig. 92) le triangle rectangle  $ABC$  est inscriptible au demi-cercle.

Si l'on veut donc une ligne  $x$  moyenne proportionnelle entre deux lignes données  $m$  et  $n$  (fig. 95), on prendra, sur une droite indéfinie,  $AB = m$ ,  $AE = n$ ; on élèvera une perpend.  $DC$  au point  $A$ , et sur le diamètre  $BE$  on tracera un cercle  $BDEC$ ;  $AD$  sera  $x$ .

227. Il résulte aussi de la proposition (n° 221, 2°.) que (fig. 92) la corde  $AB$  est moyenne proportionnelle entre le diamètre  $BC$  et le segment  $BD$  correspondant. On a donc (fig. 96)

$BA^2 = BC \times BD$  et  $BE^2 = BC \times BF$ , d'où  $\frac{BA^2}{BE^2} = \frac{BD}{BF}$ ; ainsi

les carrés de deux cordes qui partent d'un même point de la circonférence sont entre eux comme les segments du diamètre qui passe par ce point.

228. Toute sécante  $AE$ ,  $AC$  (fig. 97) multipliée par sa partie extérieure  $AB$ ,  $AD$ , donne le même produit,  $AB \times AE = AD \times AC$ : en menant les lignes  $DE$ ,  $BC$ , on a les triangles semblables  $ABC$ ,  $ADE$ ; car outre l'angle commun  $A$ , ils ont  $C = E$  (p. 258). Ainsi on a  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ , d'où  $AB \times AE = AD \times AC$ .

La tangente  $AB$  (fig. 98) est moyenne proportionnelle entre une sécante quelconque  $AC$  et sa partie extérieure  $AD$ . En effet, en menant  $BD$ , les triangles  $ABD$ ,  $ABC$  sont semblables, car outre l'angle  $A$  commun, on a  $C = ABD$  (n° 211, 4°); ainsi

$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ , ou  $AB^2 = AD \times AC$ .

Ces théorèmes peuvent être renfermés en un seul; car, soient  $a$  et  $b$  les distances mesurées sur la droite  $AC$  (fig. 94, 97), d'un point  $A$  à la circonférence, ou  $AD = a$ ,  $AC = b$ , soient de même  $a'$  et  $b'$  les parties analogues pour une autre ligne  $ABE$ ,

ou  $AB = a'$ ,  $AE = b'$ , on a  $ab = a'b'$ , quel que soit l'angle sous lequel les lignes se coupent, et en quelque lieu que soit le point  $A$ . Si l'on fait tourner  $AE$  autour de  $A$ , les points d'intersection  $B$  et  $E$  changeront, et lorsque la ligne  $AB$  (fig. 97) sera tangente,  $B$  et  $E$  coïncideront, ainsi  $a' = b'$ , d'où  $ab = a'^2$ .

229. Voici plusieurs problèmes qu'on résout par ces divers principes.

I. *Mesurer la hauteur d'un édifice*  $AB$  (fig. 99). On plante verticalement un piquet ou *Jalon*  $DE$ , puis on dirige un rayon visuel  $DB$  au sommet  $B$ , et l'on marque le point  $C$  où il rencontre l'horizon, on a  $\frac{CE}{DE} = \frac{CA}{AB}$ ; tout est ici connu, excepté le 4<sup>e</sup> terme  $AB$ , qu'on détermine par le calcul (n° 72, 2°.)

On pratique cette opération plus commodément en se servant des longueurs  $AC$  et  $C'E'$  de l'ombre que projettent les hauteurs  $AB$ ,  $D'E'$  sur l'horizon.

II. *Mener une tangente à deux cercles* (fig. 100). Soit  $AD'E'$  cette tangente; joignons les centres par la ligne  $AC'C$ , et menons les rayons  $CD$ ,  $C'D'$ ; nous avons  $\frac{AC'}{AC} = \frac{C'D'}{CD}$ . Mais pour une sécante  $AI$ , en mettant  $CI$  et  $C'I'$  au lieu de  $CD$  et  $C'D'$ , on aura  $\frac{AC'}{AC} = \frac{C'I'}{CI}$ , donc  $CI$  est parallèle à  $C'I'$ .

On mènera donc deux rayons parallèles quelconques  $CI$ ,  $C'I'$ ; la droite  $II'$  ira couper  $C'C$  au point  $A$ , par lequel menant la tangente à l'un des cercles, elle le sera aussi à l'autre. Lorsque les cercles ne se coupent pas, il y a une seconde solution en  $A'$ , ce qui fait quatre tangentes.

III. *Par deux points donnés*  $C$  et  $D$  (fig. 98), *tracer une circonférence qui touche la droite donnée*  $AB$ . Cette droite ne passe pas entre  $C$  et  $D$ , puisqu'elle couperait la corde  $CD$ : en joignant  $C$  et  $D$  par une droite prolongée en  $A$  jusqu'à la rencontre avec  $AB$ ,  $AD$  et  $AC$  sont connus, et il s'agit de trouver  $AB$ , car il ne restera plus qu'à faire passer un cercle par trois points donnés  $B$ ,  $C$ ,  $D$  (n° 198). Or,  $AB$  est tangente et  $AC$  sécante (n° 229), d'où  $AB^2 = AC \times AD$ : on trouvera aisément



ment (n° 226) la moyenne proportionnelle entre  $AC$  et  $AD$ .

Le problème a deux solutions, attendu qu'on peut porter la longueur  $AB$  en sens opposé, voy. n° 329, III, et la fig. 197, où  $A$  et  $B$  sont les points donnés et  $DD'$  la tangente.

Si la tangente était donnée parallèle à la corde, comme fig. 54, où  $A, B$  sont les points donnés, et  $TG$  la tang., le centre serait visiblement sur  $FF'$  perpend. au milieu de la corde  $AB$ , et le pied  $F$  serait le point de contact. Il faudrait ensuite tracer le cercle qui passe par  $A, B$  et  $F$ .

IV. Décrire un cercle  $CAB$  qui passe par un point donné  $m$  (fig. 101), et touche deux droites données  $DA, BD$ . On a vu (n° 210, 1) que le centre de ce cercle est sur  $CD$  coupant par moitié l'angle  $ADB$ . D'ailleurs la corde  $im$  perpend. sur  $CD$  est coupée en  $o$  par le milieu : ainsi on mènera cette perpend. sur  $CD$ , on prendra  $om = oi$ , et il restera à faire passer un cercle par  $i$  et  $m$ , qui touche  $DB$  ou  $DA$ .

Si le point donné est en  $A$  sur l'une des droites, le centre est à la rencontre  $C$  de  $DC$  avec  $AC$  perpend. à  $DA$ .

On sait donc tracer un cercle qui passe par trois points, ou par deux points et touche une droite, ou par un point et touche deux droites, ou enfin un cercle qui touche trois droites données (n° 210, 1).

V. Tracer un cercle  $BiA$  (fig. 101) tangent à deux droites  $DA, DB$ , et à un cercle  $Km$  donné. Le centre  $C$  est sur  $CD$ , qui coupe en deux parties égales l'angle  $BDA$  : de ce centre inconnu  $C$  traçons un cercle  $HKG$  passant par le centre donné  $A$  ; que ce centre  $A$  soit transporté en un point quelconque de  $HKG$ , le cercle  $CAm$  doit être tangent à ce cercle mobile. Considérons celui-ci dans sa position  $HA$ , où il touche  $DA$  ; la tangente  $LH$  à l'arc  $HK$  est perpendiculaire au rayon  $CH$ , et par conséquent parallèle à  $DA$ . Donc la droite  $LH$  est connue, puisqu'elle est parallèle à  $DA$ , et distante de  $DA$  de la quantité donnée  $Km = HA$ . Il faut en dire autant de  $L'H'$  parallèle à  $DB$ . Ainsi le cercle  $HKGH'$  sera facile à décrire, puisqu'il est tangent aux droites tracées  $LH, L'H'$ , et passe en  $K$  : ce cercle  $KG$  a le même centre  $C$  que celui qu'on cherche ;

il ne reste donc qu'à mener  $CA$ , et  $Am$  sera le rayon demandé.

Comme les parallèles  $LH$ ,  $L'H'$  peuvent être menées dans l'angle  $D$ , le problème comporte deux solutions, pourvu que la circonsc.  $Km$  ne coupe  $DA$ , ni  $DB$ .

On trouve, dans le 2<sup>e</sup> *Supplément à la Géom. descr.* de M. Hachette, un grand nombre de problèmes de ce genre.

VI. Trouver un point  $C$  (fig. 117) sur la circonférence  $ABD$ , tel que les cordes  $BC$ ,  $CD$ , menées à deux points donnés  $A$  et  $D$  de cette courbe, soient entre elles dans un rapport donné  $= \frac{m}{n}$ . En supposant le problème résolu, la ligne  $CO$  qui coupe

en parties égales l'angle  $BCD$  (n<sup>o</sup> 224), donne  $\frac{BC}{CD} = \frac{BO}{OD} = \frac{m}{n}$ ;

on prendra donc le milieu  $A$  de l'arc  $DAB$ , et l'on partagera en  $O$  la corde  $DB$  dans le rapport donné; la droite  $AO$  prolongée donnera le point  $C$ .

VII. Étant données la corde  $AB = k$ , et la hauteur  $DE = h$  d'un segment  $ABDE$  de cercle (fig. 52), trouver, par le calcul, le rayon  $DC = r$ ? Le triangle rectangle  $ADE$  donne  $AD^2 = \frac{1}{4}k^2 + h^2$ ; mais on tire du n<sup>o</sup> 227,  $AD^2 = 2hr$ , ainsi, en égalant ces deux valeurs, on trouve  $r = \frac{1}{2}h + \frac{k^2}{8h}$ . On a coutume de donner le nom de *flèche* du segment à sa hauteur  $DE$ .

Si  $k = 313$  et  $h = 12,32$ , on trouve  $r = 1000$ . Cette formule peut servir à faire retrouver le centre  $C$  d'un arc tracé.

VIII. Par le point  $B$  (fig. 102) d'intersection de deux cercles, mener une corde  $CD$  qui ait une longueur donnée  $M$ . Supposons le problème résolu, menons par le point  $B$  une ligne quelconque  $EF$ , et joignons  $A$  avec  $E$ ,  $C$ ,  $F$  et  $D$ ; les triangles  $AEF$ ,  $ACD$  ont l'angle  $E = C$ , comme appuyés sur le même arc  $BIA$ , de même  $F = D$ ; ainsi  $\frac{EF}{CD} = \frac{AE}{AC}$ , et  $AC$  est une quatrième proportionnelle à  $EF$ ,  $M$  et  $AE$ ; on prendra donc  $FL = M$ , on mènera  $LK$  parallèle à  $AF$ ,  $AK$  sera  $= AC$ , il ne s'agira plus que de décrire du centre  $A$ , avec ce rayon  $AK$ , un cercle qui donnera, par son intersection, le point  $C$  ou  $C'$ :

on a ainsi les deux solutions du problème, qui serait absurde si l'arc décrit avec le rayon  $AK$  était entièrement au dehors du cercle  $AE$ .

IX. Proposons-nous de couper une ligne  $CA$  (fig. 103) en deux parties telles, que la plus grande  $BC$  soit moyenne proportionnelle entre l'autre partie  $AB$  et la ligne entière  $AC$ ; c'est ce qu'on appelle *couper la ligne  $AC$  en moyenne et extrême raison*. La proportion  $AB : BC :: BC : AC$  ne peut faire connaître  $BC$ , parce qu'elle contient une 2<sup>e</sup> inconnue  $AB$ ; mais augmentant chaque antécédent de son conséquent (n° 73, 1<sup>o</sup>.), comme  $AC = AB + BC$ , on a  $AC : BC :: BC + AC : AC$  ou  $AC^2 = BC(BC + AC)$ ; il s'agit donc de déterminer sur  $AC$  un point  $B$  tel, que  $AC$  soit moyen proportionnel entre  $BC$  et  $BC + AC$ ; c'est ce qui aura lieu si l'on construit un cercle dont  $AC$  soit la tangente,  $BC + AC$  la sécante entière, et  $BC$  la partie extérieure (par conséquent  $AC$  la partie interceptée dans le cercle). Élevons en  $A$  la perpendiculaire  $AD = \frac{1}{2} AC$ , menons l'hypoténuse  $DC$ ; nous avons  $AC^2 = CE \times CF = CE \times (CE + CA)$ ; donc  $CE$  est la longueur inconnue qu'on doit porter de  $C$  en  $B$ ;  $B$  sera le point demandé (\*).

X. Inscrire un triangle def dans un autre  $ABC$  (fig. 105), c.-à-d. le placer comme  $DEF$ , de sorte que  $d$  tombe en  $D$  sur le côté  $AC$ , etc. En supposant le problème résolu, et traçant par les points  $EFB$  une circonférence, ainsi que par  $ADF$ , on voit que le segment  $FOE$  est capable de l'angle donné  $B$ , et le segment  $FOD$  capable de l'angle  $A$  (n° 212, IV). Décrivons donc sur  $fc$  et  $fd$  des segments capables de  $B$  et  $A$ . La base  $AB$  est donnée,

(\*) On peut encore opérer comme il suit (fig. 104). On a trouvé

$$AC^2 = BC^2 + AC \times BC = BC \times (BC + AC) = BC \times BD,$$

en prolongeant la ligne  $AC$  de  $CD = CA$ .  $E$  étant le milieu de  $DC$ , on a ...  $BC = BE - EC$ ,  $BD = BE + EC$ , le produit change notre équation en ...  $AC^2 = BE^2 - EC^2$ ; ainsi  $AC$ ,  $BE$ ,  $EC$  sont les trois côtés d'un triangle rectangle  $EP$ . On mènera donc  $CF$  égal et perpendiculaire à  $AC$ , tirant l'hypoténuse  $EF$  et la portant du  $E$  en  $B$ , on aura le point  $B$ . Cette construction s'applique avec élégance au théorème n° 240

et forme une double corde dans les deux cercles. Si donc, d'après le problème VIII, on décrit en  $f$  la corde  $ab = AB$ , il ne restera plus qu'à mener les lignes  $ad$ ,  $bc$  prolongées en  $e$ , et l'on aura le triangle  $abc = ABC$ , par conséquent on connaîtra les points  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , puisque  $BE = be$ , etc. Comme on peut mener la corde  $ab$  de deux manières, le problème a deux solutions.

### *Des Polygones.*

230 On nomme *Polygone* toute figure  $ABCDE$  (fig. 106) terminée par des droites. Le *Quadrilatère* a 4 côtes, le *Pentagone* 5, l'*Hexagone* 6, l'*Octogone* 8, le *Décagone* 10, le *Dodécagone* 12, le *Pentédécagone* 15, etc. Le nombre des angles est le même que celui des côtes, car tant que le polygone n'est pas fermé, chaque côte qu'on trace fait un angle de plus, et la figure reçoit un côté de plus qu'elle n'a d'angles; enfin le côté qui ferme le polygone fait deux angles.

Une *Diagonale* est une ligne  $AD$  (fig. 118) qui traverse le polygone d'un angle à l'autre. La diagonale  $AC$  sépare le triangle  $ABC$  du polygone  $ABCD$ ... de  $n$  côtes, et réduit la figure à  $ACDEF$  de  $n-1$  côtes. Chaque diagonale menée de  $A$  sépare de même un nouveau triangle, et réduit le polygone à avoir un côté de moins, enfin, lorsqu'on n'a plus qu'un quadrilatère  $ADEF$ , la seule diagonale  $AE$  le partage en deux triangles. Ainsi il y avait d'abord autant de diagonales que de triangles et de côtes supprimés; mais pour la figure de 4 côtes, une seule diagonale donne 2 triangles; donc le nombre de diagonales qu'on peut mener d'un même angle  $A$  à tous les autres est  $n-3$ ; celui des triangles est  $n-2$ .

Tous les angles de l'hexagone  $ABCD$ ... sont *Saillans*, l'angle  $A$  (fig. 107) est *Rentrant* (n° 172).

231. Pour construire un polygone dont toutes les parties soient données, après avoir pris sur une droite indéfinie (fig. 106), une longueur  $AB$  égale à l'un des côtes, on formera en  $A$  et  $B$  deux angles  $BAF$ ,  $ABC$  égaux à ceux qu'on sait devoir être



adjacens à  $AB$  ; puis on prendra sur  $BC$  et  $AF$  les longueurs données , et ainsi de suite.

Après avoir ainsi tracé les côtés  $FA$ ,  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  et  $DE$ , le côté  $FE$ , destiné à fermer l'hexagone, est déterminé, ainsi que les angles  $E$  et  $F$ . Si donc  $n$  désigne le nombre des angles d'un polygone,  $2n$  sera celui des parties qui le composent,  $2n-3$  est celui des quantités qu'il suffit de connaître pour pouvoir le construire. Il y a donc des relations qui lient entre elles ces  $2n$  parties, de sorte qu'on puisse déterminer 2 côtés et un angle, d'après la connaissance des autres parties. Ce problème de *Polygonométrie* ne peut maintenant être résolu ; mais il est facile d'assigner la relation qui existe entre les angles.

232. Si  $n$  est le nombre de côtés et  $D$  l'angle droit, la somme des angles intérieurs est  $2D(n-2)$ , ou 2 fois autant d'angles droits que le polygone a de côtés moins deux. Car menons d'un point quelconque intérieur  $O$  (fig. 106), les lignes  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , . . ; elles formeront autant de triangles  $OAB$ ,  $OBC$ , . . qu'il y a de côtés. La somme de tous les angles est donc deux droits, répétée autant de fois qu'il y a de côtés, ou  $2nD$ . Mais la somme des angles en  $O$  vaut quatre droits : donc on a  $2nD - 4D$ . C'est aussi ce qui résulte de ce que ces angles sont la somme de ceux des  $(n-2)$  triangles en lesquels le polygone est décomposé par ses diagonales (fig. 118).

233. Les quatre angles d'un quadrilatère valent donc quatre droits. Si cette figure a deux de ses côtés parallèles  $Aa$ ,  $Hh$  (fig. 81), on la nomme *Trapeze* ; c'est un *Parallélogramme* (fig. 108), si les quatre côtés sont parallèles deux à deux. On sait d'ailleurs (n° 193), que la diagonale  $BD$  partage tout parallélogramme en deux triangles égaux  $ABD$ ,  $BCD$  ; que les angles opposés sont égaux  $A = C$ ,  $B = D$  ; que les côtés opposés sont égaux. Réciproquement, si  $AB = DC$  et  $AD = BC$ , la figure  $ABCD$  est un parallélogramme. Les diagonales  $AC$ ,  $BD$  se coupent mutuellement en deux parties égales ; cela résulte de l'égalité des triangles  $AOD$  et  $BOC$ .

Le *Rhomb* ou *Lozange* est un parallélogramme (fig. 109) dont les quatre côtés sont égaux. Il est visible que les diagonales



$AC$  et  $BD$  sont à angle droit, parce que les quatre triangles  $AOD$ ,  $AOB$ ,  $DOC$  et  $BOC$  sont égaux. Réciproquement, si  $AO = OC$  et  $DO = OB$ , la figure  $ABCD$  est un parallélogramme, qui devient même un rhombe, lorsque  $AC$  et  $BD$  sont à angle droit.

Enfin, si le parallélogramme  $ABCD$  (fig. 110) a l'un de ses angles  $A$  droit, l'angle opposé  $C$ , qui lui est égal, sera aussi droit; il en est de même des autres  $B$  et  $D$ , puisque réunis ils valent deux droits, et qu'ils sont égaux; la figure a donc ses quatre angles droits. C'est pour cela qu'on nomme *Rectangle* le parallélogramme qui a ses angles droits. Les diagonales  $AC$ ,  $BD$  sont égales.

Si  $AB = AD$ , le rectangle s'appelle *Carré*; le carré a donc les quatre côtés égaux et les quatre angles droits.

234. La somme des angles extérieurs  $GAB$ ,  $HBC$ ... (fig. 111), formés en prolongeant dans un même sens les côtés d'un polygone, vaut toujours quatre angles droits. En effet, les angles extérieurs sont supplémens des intérieurs adjacens: mais l'angle  $AOB$  est supplément des angles  $OAB + OBA$ , de même  $BOC$  l'est de  $OBC + OCB$ , etc; donc la somme des angles en  $O$  ou quatre droits, est la somme des supplémens des angles  $ABC$ ,  $BCD$ ... du polygone: *c. q. f. d.*

235. Les polygones qui ont les côtés égaux et les angles égaux sont appelés *Réguliers*. Un cercle qui touche tous les côtés d'un polygone est appelé *Inscrit*; le cercle est *Circonscrit* quand il passe par les sommets de tous les angles.

On peut toujours inscrire et circoncrire un cercle à un polygone régulier  $ABCDEF$  (fig. 112). 1°. En effet, divisons les angles  $A$  et  $B$  en deux parties égales, par les lignes  $AO$  et  $BO$ , et du point  $O$  de concours menons  $OC$ . Le triangle  $ABO = BOC$ , car  $AB = BC$ ; le côté  $OB$  est commun, et l'angle  $ABC$  a été divisé en deux parties égales: donc  $OA = OC = OB$ . On prouvera de même que  $OB = OD = OC$ , etc.

On voit donc que le point  $O$  est le centre du cercle circonscrit au polygone; que les lignes menées de ce centre aux angles sont égales; qu'elles divisent ces angles en deux parties

égales, qu'elles forment des triangles isocèles  $AOB$ ,  $BOC$ ... Enfin que les angles au centre  $AOB$ ,  $BOC$ ... sont égaux entre eux.

2°. Les cordes  $AB$ ,  $BC$ ... étant à la même distance du centre  $O$ , les perpendiculaires  $OG$ ,  $OI$ ... sont égales (n° 208); si donc on écrit du centre  $O$  avec le rayon  $OG$  une circonférence, elle touchera tous les côtés du polygone en leur milieu  $G$ ,  $I$ ...

236. Nous savons donc circonscrire et inscrire des circonférences à un polygone régulier donné. Le problème inverse consiste à inscrire ou circonscrire un polygone régulier d'un nombre de côtés déterminé à une circonf. donnée : or, il s'en faut de beaucoup qu'on sache résoudre ce problème en général. Nous allons exposer les cas dans lesquels on peut en trouver la solution.

Avant, nous remarquons que, lorsqu'un polygone est inscrit, il est aisé d'en circonscrire un d'un même nombre de côtés, et réciproquement. En effet, soit  $ABC$ ... (fig. 113), un polygone régulier inscrit donné; aux points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ... menons les tangentes  $af$ ,  $ab$ ,  $bc$ ..., leur système formera le polygone circonscrit demandé; car, les triangles  $aAB$ ,  $bBC$ ... sont égaux et isocèles, parce que leurs bases  $AB$ ,  $BC$ ... sont égales, et que leurs angles adjacents ont la même mesure (n° 211, 4°.) : donc  $aB = Bb = bC = Cc$ ..., l'angle  $a = b = c$ ...

On pourrait aussi (fig. 112) mener des tangentes par les milieux  $g$ ,  $i$ ,  $k$ ... des arcs  $AgB$ ,  $BiC$ ,  $CkD$ ...;  $abedef$  formerait le polygone demandé : car les côtés étant parallèles à ceux du polygone inscrit, les angles sont égaux (n° 192, 3°.) : de plus, l'angle  $GOI$  est divisé en deux parties égales par  $OB$ , puisque  $B$  est le milieu de l'arc  $gi$ . D'un autre côté, le triangle  $gOb = bOi$ , et  $Ob$  coupe le même angle  $gOi$  en deux parties égales : ainsi les trois points  $O$ ,  $B$ ,  $b$  sont en ligne droite. Il en est de même de  $O$ ,  $C$  et  $c$ , de  $O$ ,  $D$  et  $d$ ... On a donc  $\frac{AB}{ab} = \frac{OB}{Ob}$ ,  $\frac{BC}{bc} = \frac{OB}{Ob}$  d'où  $ab = bc$ , puisque  $AB = BC$ . Et ainsi des autres côtés.

Cette double construction serait assez pénible : il est préférable de mener une seule de ces tangentes  $ab$  (fig. 112), de la

conduire jusqu'aux rayons  $OA$ ,  $OB$  prolonges, puis de décrire du rayon  $Oa$  une circonférence, sur laquelle on porte  $ab$  autant de fois qu'il y a de côtes

Réciproquement, si le polygone circonscrit  $abcdef$  est donné, on mènera du centre  $O$  les lignes  $aO$ ,  $bO$ ..., puis par les points  $A$ ,  $B$ ..., où elles coupent la circonférence, on décrira les cordes  $AB$ ,  $BC$ ..., et le polygone régulier sera inscrit.

237. Puisque la somme des angles au centre est  $4D$ , chacun vaut  $\frac{4D}{n}$  lorsque le polygone est régulier,  $n$  désignant le nombre de côtés du polygone.

L'angle au centre du triangle équilatéral est donc  $\frac{1}{3}D$ ,

Celui du carré est  $D$ , du pentagone régulier  $\frac{2}{5}D$ ,

De l'hexagone  $\frac{2}{3}D$ , du decagone  $\frac{2}{5}D$ , etc...

La somme des angles à la circonférence (n° 232) est  $2D(n-2)$ ; chacun vaut donc  $\frac{2D(n-2)}{n}$ . Ainsi l'angle du carré est droit; celui de pentagone régulier est  $\frac{2}{5}D$ , de l'hexagone  $\frac{1}{3}D$ , du decagone  $\frac{2}{5}D$ ...

Chaque côté  $AB$ ,  $BC$ ... soutend un arc  $= \frac{C}{n}$ ,  $C$  désignant la circonférence.

238. Le côté  $FE$  de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon  $OF$  (fig. 114) : car l'angle  $FOE$  est le  $\frac{1}{6}$  de 4 droits, ou  $O = \frac{1}{3}D$ , les angles égaux  $E$  et  $F$  du triangle isocèle  $OFE$  valent ensemble  $2D - \frac{1}{3}D$  ou  $\frac{5}{3}D$  : chacun vaut donc  $\frac{5}{6}D$ , et le triangle  $OFE$  a ses trois angles égaux, d'où  $FE = OF$ .

Si l'on joint les angles de deux en deux, on aura le triangle  $BDF$  équilatéral inscrit : comme  $EO = EF =$  le rayon  $R$ ,  $ODEF$  est un rhombe, les diagonales sont à angle droit (n° 233), et  $IO = EI = \frac{1}{2}R$ ; ainsi (n° 221, 4°.)

$$FI = \sqrt{(FO^2 - IO^2)} = \sqrt{(R^2 - \frac{1}{4}R^2)} = R\sqrt{\frac{3}{4}};$$

d'où  $FD = R\sqrt{3}$ . C'est le côté du triangle équilatéral inscrit.

En divisant en 2, 4, 8... parties égales les arcs  $AB$ ,  $BC$ ... on aura les polygones inscrits de 12, 24, 48...  $3 \times 2^n$  côtés.

239. Puisque (n° 237) l'angle au centre du carré (fig. 110) est droit, pour inscrire un carré dans un cercle  $ABCD$ , on mènera deux diamètres perpendiculaires  $AC$ ,  $BD$ , et l'on joindra leurs extrémités. On voit, en effet, que la figure  $ABDC$  a les quatre angles droits et les côtés égaux. On a

$$AD^2 = DO^2 + AO^2 = 2R^2; \text{ d'où } AD = R\sqrt{2}.$$

Puisque  $\frac{AD}{R} = \sqrt{2}$ , on voit que la diagonale du carré est incommensurable avec son côté (n° 63).

On sait donc inscrire les polygones de 4, 8, 16...  $2^i$  côtés.

240. Soit  $AB$  (fig. 115) le côté du decagone régulier inscrit, l'angle  $O$  au centre est  $\frac{2}{3}D$  (n° 237); les angles égaux  $OAB$ ,  $OBA$  réunis valent  $2D - \frac{2}{3}D$  ou  $\frac{4}{3}D$ , donc chacun vaut  $\frac{2}{3}D$ , c.-à-d. est double de  $O$ . Pour trouver le rapport de  $AB$  au rayon  $AO$ , divisons l'angle  $B$  en deux parties égales par la droite  $CB$ ; l'angle  $ABC = O = CBO$ , indique que le triangle  $OBC$  est isoscèle, d'où  $OC = CB$ . Mais le triangle  $ACB$  l'est aussi, à cause de  $C = \frac{2}{3}D = A$ ; ainsi  $CB = AB = OC$ . Or, on a (n° 224)  $\frac{AC}{OC} = \frac{AB}{OB}$ , ou  $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AO}$ , ou le côté  $AB$  moyen proportionnel entre  $AC$  et  $AO$ ; d'ailleurs,  $CO$  ou  $AB < AO$  donne aussi  $AC < AB$ ; donc (n° 229, IX)

En divisant le rayon en moyenne et extrême raison, la plus grande partie sera le côté du decagone régulier inscrit.

$AB = BF$  donne  $AF$  pour le côté du pentagone régulier inscrit. On pourra aussi inscrire les polygones réguliers de 20, 40...  $5 \times 2^i$  côtés. Et comme les côtés de l'hexagone et du decagone soutendent des arcs qui sont le  $6^\circ$  et le  $10^\circ$  de la circonférence  $C$ , la différence de ces arcs, ou  $\frac{1}{6}C - \frac{1}{10}C = \frac{1}{30}C$ , est soutendu par le côté du polygone régulier de 15 côtés, et de là ceux de 30, 60...  $15 \times 2^i$  côtés.

Tels sont les polygones réguliers qu'on sait inscrire, et qu'on peut comprendre dans la formule  $a \times 2^i$ ,  $a$  étant l'un des quatre nombres 3, 4, 5 et 15, et  $i = 0$ , ou un nombre entier et positif quelconque. Quant aux autres polygones, on



se contente, faute de mieux, de diviser, en tâtonnant, la circonférence en un nombre convenable de parties égales. On résout aussi le problème à l'aide du compas de proportion et du rapporteur; mais comme ces instrumens sont eux-mêmes construits par tâtonnement, on ne peut regarder ces procédés comme géométriques. La division de la circonférence en parties égales est surtout importante pour faire les instrumens propres à la mesure des angles. (Voy. la *Géom. du Compas*, par *Mascheroni*.) Comme la trisection de l'angle complèterait cette opération (n° 212, III), on s'est long-temps, mais en vain, efforcé de trouver la solution de cette question. Elle est maintenant démontrée impossible par le secours de la règle et du compas seuls (n° 464, I).

241. Nous terminerons par l'exposition de quelques propriétés des quadrilatères inscriptibles au cercle.

I. On a, dans le quadrilatère  $ABCO$  (fig. 116),  $A + C = 2$  droits, puisque les angles  $A$  et  $C$  embrassent la circonférence entière (n° 211); de même  $B + O = 2$  droits. Ainsi, dans tout quadrilatère inscriptible au cercle, les angles opposés sont supplémentaires.

Réciproquement, si  $A + C = B + O = 2$  droits, le quadrilatère  $ABCO$  est inscriptible au cercle, puisque si la circonférence passant par  $AOC$ , ne passait pas en  $B$ , l'angle  $B'$  ne serait pas le supplément de  $O$  (n° 213).

Donc on peut toujours circonscrire un cercle à tout rectangle  $ABCD$  (fig. 110); les diagonales  $BD$ ,  $AC$  sont les diamètres.

II. Dans tout quadrilatère inscrit  $ABCD$  (fig. 117), le produit des diagonales égale la somme des produits des côtés opposés. Car, menons  $CK$  qui fasse l'angle  $KCD = BCO$ ; d'où  $BCK = OCD$ , en ajoutant  $OCK$  aux deux membres; or, l'angle  $BAC = BDC$  (n° 211); ainsi les triangles  $BAC$  et  $KCD$  sont semblables. De même l'angle  $CBK = CAD$ , et le triangle  $CBK$  est semblable à  $CAD$ . Donc on a

$$\frac{KD}{CD} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{BK}{BC} = \frac{AD}{AC},$$



d'où  $KD \times AC = AB \times CD$ ,  $BA \times AC = AD \times BC$  : ajoutant ces éq., il vient enfin  $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$ .

III. Si des points  $A$  et  $B$  (fig. 108), on abaisse sur la base  $DC$  du parallélogramme  $ABCD$  les perpendiculaires  $AE$ ,  $BF$ , les triangles  $ADC$ ,  $BDC$  donneront (n° 222)

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \times DE,$$

$$BD^2 = BC^2 + DC^2 + 2DC \times CF.$$

En ajoutant ces éq., comme  $DE = CF$  et  $AB = DC$ , on a

$$BD^2 + AC^2 = AD^2 + BC^2 + DC^2 + AB^2.$$

Ainsi, dans tout parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés. La proposition est d'ailleurs évidente pour un rectangle (n° 221, 4°).

### *Des Figures semblables et de la Circonférence.*

242. On dit que deux polygones (fig. 118)  $ABCDEF$ ,  $abedef$  sont semblables, lorsqu'ils sont formés des triangles  $T$  et  $t$ ,  $T'$  et  $t'$ ,  $T''$  et  $t''$  . . . , respectivement semblables et disposés dans le même ordre.

Sur une droite donnée  $ab$ , homologue à  $AB$ , il est aisé de décrire un polygone  $abcd$  . . . semblable à  $ABCD$  . . . On fera d'abord  $t$  semblable à  $T$ , ce qui ne présente aucune difficulté (n° 218), puis  $t'$  semblable à  $T'$ , sur  $ac$  homologue à  $AC$ , etc.

Les polygones semblables ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels. Car les triangles semblables  $T$  et  $t$  ont l'angle  $B = b$ , ainsi que l'angle  $BCA = bca$ ; de plus

(n° 218),  $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$ . De même  $T'$  et  $t'$  ont l'angle

$ACD = ncd$ ; d'où l'on voit que l'angle  $BCD = bcd$ : en outre,

$\frac{AC}{ac} = \frac{DC}{dc} = \frac{BC}{bc}$ . On prouverait de même, à l'aide de  $T''$  et

$t''$ , que l'angle  $CDE = cde$ , et que  $\frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de}$ , etc.

Réciproquement, si les polygones ont les angles respectivement

égales, et si de plus  $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \text{etc.}$ , les polygones sont semblables; car  $B = b$ , et les côtés qui comprennent ces angles sont proportionnels, par hypothèse; d'où il suit (n° 219) que  $T$  et  $t$  sont semblables, et de plus,  $\frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$ , et l'angle  $BCA = bca$ . Retranchant ces angles de  $BCD = bcd$ , il reste l'angle  $ACD = acd$ , et comme on suppose que  $\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}$ , on a  $\frac{AC}{ac} = \frac{CD}{cd}$ , à cause du rapport commun,  $\frac{BC}{bc}$ ; ce qui prouve que  $T$  est semblable à  $t$ ; et ainsi de suite.

1°. Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont des figures semblables, puisque leurs angles sont respectivement égaux, ainsi que leurs côtés (n° 235).

2°. Si après avoir conduit les diagonales des angles  $A$  et  $a$  (fig. 119), on a des triangles semblables chacun à chacun, les angles sont égaux, et les côtés homologues proportionnels: donc, si l'on mène les diagonales d'un autre angle tel que  $E$ ,  $e$ , les nouveaux triangles composans seront aussi semblables.

3°. Donc deux diagonales homologues quelconques  $BF$ ,  $b$  (fig. 119) sont proportionnelles à deux côtés quelconques  $CD$ ,  $cd$ , savoir,  $\frac{BF}{bf} = \frac{CD}{cd}$ .

4°. Soient deux polygones semblables  $ABC...abc...$  (fig. 119) si l'on prend deux côtés homologues quelconques  $ED$ , et  $ed$ , et si, de leurs extrémités, on mène les diagonales à tous les autres angles, on formera des triangles respectivement semblables  $EDF$  à  $edf$ ,  $EDA$  à  $eda$ ,  $EBD$  à  $ebd$ , etc., car les angles des polygones sont égaux, et les diagonales homologues sont proportionnelles aux côtés.

5°. Lever un plan n'est autre chose que construire des polygones semblables à ceux que forment, sur le terrain, les droites qui joignent des points dont la situation respective est connue. Pour cela, on mesure sur le terrain un nombre suffisant de parties, puis on décrit ensuite, sur le papier

(n° 218....), d'autres triangles semblables à ceux qui composent les polygones dont il s'agit.

243 Si, dans deux polygones semblables (fig. 119), on mène deux droites  $Gh$ ,  $gh$ , placées semblablement, c.-à-d. coupant les côtés  $BC$ ,  $bc$  en parties proportionnelles, ainsi que  $FE$  et  $fe$ , les longueurs  $GH$ ,  $gh$  seront dans les rapports des côtés, ou

$\frac{GH}{gh} = \frac{BC}{bc}$ , et seront des angles égaux avec ces côtés. En effet, soit pris sur  $BC$  et  $bc$  des points  $H$  et  $h$ , tels qu'on ait

$\frac{HC}{hc} = \frac{CB}{cb} = \frac{CE}{ce}$ , et menons  $HE$ ,  $he$ . Les triangles  $HCE$ ,  $hce$  seront semblables (n° 219) puisque, l'angle  $HCE = hce$ . Il s'ensuit que l'angle  $EHc = ehc$  et  $\frac{EH}{eh} = \frac{HC}{hc} = \frac{BC}{bc}$ .

Maintenant, en considérant les polygones semblables  $ABHEF$ ,  $abhcf$ , si les points  $G$  et  $g$  coupent les côtés  $FE$  et  $fe$  proportionnellement, la ligne  $GH$  jouira de la même propriété que  $HE$ . Donc, etc.

244 D'un point quelconque  $O$  (fig. 120), pris dans l'intérieur du polygone  $ABC...$ , menons des lignes  $OA$ ,  $OB...$  aux sommets  $ABC...$ ; prenons sur ces lignes des longueurs qui leur soient proportionnelles, ou telles qu'on ait  $\frac{OA}{oa} = \frac{OB}{ob} = \frac{OC}{oc} \dots$ .

Les triangles  $OAB$ ,  $Oab$  seront semblables, et  $AB$  parallèle à  $ab$ . En raisonnant de même pour  $OBC$ ,  $Obc$ , etc., on verra que les polygones  $ABC... abc...$  ont les côtés parallèles et proportionnels, et par conséquent sont semblables.

De même, sur les lignes  $Ob$ ,  $Oa$ , si l'on prend des parties  $OK$ ,  $Ok$  proportionnelles aux côtés  $ac$ ,  $AE$ ; puis  $OF$ ,  $of$  proportionnelles à  $ab$ ,  $AB$ , etc., les polygones  $KFG...$   $kfg...$  seront semblables, comme formés de triangles  $OKI$ ,  $Oki$ ,  $OKF$ ,  $okf$ ..., respectivement semblables.

245 Les périmètres de polygones semblables sont comme leurs lignes homologues; car (fig. 118) on a.....

$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \dots$ , et le théorème (n° 73, 3°) donne

$$\frac{AB + BC + CD + \dots}{ab + bc + cd + \dots} = \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \dots$$

En appliquant ceci aux polygones réguliers d'un même nombre de côtes, on a  $\frac{ABCD \dots}{abcd \dots} = \frac{AB}{ab} = \frac{OB}{ob} = \frac{OI}{oi}$  (fig. 121), par

que les triangles  $OBI$ ,  $Obi$  sont semblables, comme ayant les angles au centre égaux (n° 235); ainsi, les périmètres des polygones réguliers semblables sont entre eux comme les rayons des cercles inscrits et circonscrits

246. La circonférence est la limite des polygones réguliers inscrits et circonscrits (n° 113). Chaque côte  $AB$  (fig. 122) d'un polygone régulier étant plus court que l'arc  $ACB$  qu'il soutend, on voit que la circonférence rectifiée est plus longue que le périmètre de tout polygone inscrit. De plus, prenant  $C$  au milieu de l'arc  $BCA$ , on a la corde  $AB < AC + CB$ , ce qui fait voir qu'en doublant le nombre des côtes d'un polygone inscrit, le périmètre approche de plus en plus de la circonférence, sans cesser d'être plus petit qu'elle.

D'un autre côté, l'arc  $CAL < CE + EL$  (n° 172) fait voir que le périmètre de tout polygone circonscrit est plus grand que la circonférence; la tangente  $AK$  est le demi-côté du polygone circonscrit d'un nombre double de côtes (n° 236); et comme  $KA$ , perpendiculaire à  $AO$ , est  $<$  l'oblique  $KE$ , on a...  $AK + KC < EC$ : en doublant le nombre des côtes d'un polygone circonscrit, le périmètre approche donc davantage de la longueur de la circonférence sans cesser d'être plus grand qu'elle.

$P$  et  $p$  étant les périmètres de polygones réguliers semblables, l'un circonscrit, l'autre inscrit, et  $R$  et  $r$  les rayons  $OC$ ,  $OI$  de cercles inscrits, on a  $\frac{P}{p} = \frac{R}{r}$ , et  $P - p = \frac{P}{R} (R - r)$  (n° 73, 1°.)

Or,  $P$  diminue en s'approchant de la circonférence  $LCB \dots$ ,  $R$  est constant, et  $R - r$  ou  $CI$  décroît indéfiniment lorsqu'on double successivement les nombres de côtes de polygones  $P$  et  $p$  (n° 209); ce qui prouve que la différence  $P - p$  entre leurs périmètres approche autant qu'on veut de zéro, c.-à-d. que la

périmètres approchent indéfiniment de la circonférence, qui est toujours comprise entre eux, et qui ne leur est jamais rigoureusement égale : donc, etc.

247. *Les circonférences sont entre elles comme leurs rayons ou leurs diamètres.* En effet (fig. 121), désignons par  $C$  et  $c$  les circonférences dont les rayons sont  $BO = R$ ,  $bo = r$ ; par  $P$  et  $p$  deux polygones réguliers inscrits  $ABC... abc...$  semblables, enfin par  $Z$  et  $z$  la différence entre chaque périmètre et la circonférence circonscrite, ou  $C - P = Z$ ,  $c - p = z$ . On en tire

$$\frac{P}{p} \text{ ou } \frac{R}{r} = \frac{C - Z}{c - z}, \text{ d'où } \frac{C}{R} - \frac{Z}{R} = \frac{c}{r} - \frac{z}{r};$$

or,  $R$ ,  $C$ ,  $r$  et  $c$  restent constans,  $Z$  et  $z$  varient avec le nombre des côtés, et peuvent devenir aussi petits qu'on voudra, donc (n° 113)

$$\frac{C}{R} = \frac{c}{r}, \text{ ou } \frac{C}{c} = \frac{R}{r} = \frac{2R}{2r}.$$

248. *Trouver une ligne droite égale à une circonférence d'un rayon donné, c.-à-d. rectifier cette courbe.* Concevons deux circonférences  $C$ ,  $c$  de rayons  $R$ ,  $r$  : nous avons  $\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}$ , chaque circonférence contient donc son diamètre le même nombre de fois, que nous désignons par  $\pi$ . Si l'on connaissait ce quotient constant  $\pi$ , on aurait donc

$$\text{circonférence } R = 2\pi R.$$

Pour déterminer le rapport constant  $\pi$  de toute circonférence à son diamètre, il faut trouver la longueur rectifiée d'une circonférence quelconque, ainsi que celle de son diamètre, puis diviser la première par la seconde, le quotient sera le nombre  $\pi$ . Pour cela, prenons un polygone régulier quelconque dont nous connaissions le périmètre, et les rayons  $r$  et  $R$  des cercles inscrit et circonscrit; puis concevons un autre polygone régulier isopérimètre, c.-à-d., d'un contour égal; et calculons les rayons  $r'$  et  $R'$  des cercles inscrit et circonscrit à ce dernier

$BE = a$  (fig. 123) est un côté de ce polygone,  $HD$  un diamètre perpendiculaire,  $C$  le centre du cercle  $BDE$ ,  $CA = r$ ,



$CB=R$  sont les rayons donnés des circonf. inscrite et circonscrite. Menons  $DB, DE$ , puis la perpendiculaire  $CG$  tombant au milieu  $G$  de la corde  $DE$ ; et par le point  $F$ ,  $IG$  parallèle à  $BE$ ,  $IG$  sera moitié de  $BE$  (n° 218). Comme l'angle  $EDB$  est moitié de  $ECB$ ,  $EDB$  sera l'angle au centre, et  $GI$  le côté du polygone régulier d'un nombre double de côtés.  $DF=r'$ ,  $DG=R'$  seront les rayons de cercles inscrit et circonscrit à ce dernier. Or on a  $DF=\frac{1}{2}DA=\frac{1}{2}(DC+CA)$ , ou  $r'=\frac{1}{2}(R+r)$ ; dans le triangle rectangle  $CGD$ ,  $DG^2=DC \times DE$  (n° 221, 2°), ou  $R'^2=Rr'$ , ainsi  $r'$  et  $R'$  sont données par les équations

$$r' = \frac{1}{2}(R+r), \quad R' = \sqrt{Rr'}.$$

Répétant ce calcul sur le polygone  $IG$ , on trouvera de même les rayons  $r''$  et  $R''$  des polygones réguliers isopérimétriques d'un nombre double de côtés du précédent; puis les rayons  $r''', R'''$ , etc. on aura ainsi une série de résultats

$$r, R, r', R', r'', R'', r''', R''', \dots,$$

dont chaque  $r$  est la moyenne arithmétique, et chaque  $R$  la moyenne géométrique entre les deux termes précédents. Tels sont les rayons des cercles inscrits et circonscrits à cette suite de polygones réguliers isopérimétriques d'un nombre de côtés continuellement doublé.

Mais  $F$  étant au milieu de  $AD$ ,  $AF$  ou  $DF > AC$ ,  $r' > r$ , puis l'hypoténuse  $DC > DG$ , ou  $R' < R$ : ainsi  $r, r', r'' \dots$  croissent, et  $R, R', R'' \dots$  décroissent continuellement. Ces quantités tendent sans cesse vers l'égalité à mesure que les côtés deviennent plus nombreux; car  $BC^2 - CA^2 = BA^2$ , ou  $R^2 - r^2 = \frac{1}{4}a^2$ , donne

$$R - r = \frac{a^2}{4(R+r)} = \frac{a^2}{8r'},$$

et  $a$  décroît autant qu'on veut, tandis que  $r'$  augmente. On voit donc que si l'on superpose tous ces polygones en faisant coïncider leurs centres  $C, D, \dots$  les circonf. inscrites s'en écartent et les circonscrites s'en rapprochent de plus en plus. Elles finissent par ne laisser entre elles qu'un espace aussi petit qu'on

seut, dans lequel se trouve trace le polygone régulier. Que l'on ait poussé le calcul des  $r$  et  $R$  jusqu'à 10 chiffres décimaux, par exemple, et l'on trouvera enfin deux rayons dont les dix chiffres seront les mêmes : la distance du polygone à ses deux circonf. sera nulle dans cet ordre d'approximation, et l'on pourra prendre le périmètre de ce polygone pour longueur de ses circonf.

Soit donc  $a$  le côté du 1<sup>er</sup> polygone de  $n$  côtés ;  $na$  sera son contour, et celui de chacun des autres polygones : et si  $x$  est le rayon des cercles inscrit et circonscrit dans l'ordre de décimales conservées au calcul, ou celui de la circonf. définitive

$$= na, \text{ on aura } na = 2\pi x, \pi = \frac{na}{2x}.$$

Par exemple le côté de l'exagone inscrit  $a=1$ , le périmètre  $=6$  ;  $R=1$ ,  $r=\sqrt{(1)B^2-1B^2}$  (fig. 132), ou  $r=\frac{1}{2}\sqrt{3}$  : on en tire successivement les résultats suivans :

$r = 0,86601$	5404	0,95356	5731	0,95490	8354
$R = 1$		0,95551	1769	0,95494	0311
$r' = 0,93301$	2701	0,95458	8750	0,95492	4332
$R' = 0,96592$	5826	0,95510	0122	0,95493	2322
$r'' = 0,94946$	9264	0,95484	4436	0,95492	8327
$R'' = 0,95766$	2197	0,95497	2270	0,95493	0325 (*)

Dès qu'on arrive à deux rayons successifs  $r$  et  $x$ , ce nombre est le rayon de la circonf. isopérimètre qui est  $=6=2\pi x$  ; or  $x=0,95492\ 9662$  ; ainsi  $\pi=3,14159\ 2654$ . On peut obtenir

(\*) Le calcul des rayons  $R$  est facile par log., mais on l'abrège encore par le procédé suivant. Soit  $R=r'+d$ ,  $d$  étant la différ. des deux rayons entre lesquels on veut une moyenne géométrique  $R'=\sqrt{(r'^2+r'd)}$ , on a (n° 135) en extrayant la racine

$$R' = r' + \frac{1}{2}d - \frac{d^2}{8r'}, \text{ etc. } = r' \sqrt{1 + \frac{d}{r'}}.$$

Ces formules abrègent les opérations mais on remarque que si  $d$  n'a au plus que la moitié des chiffres de  $r'$ , en considérant ces nombres comme entiers,  $d^2$  est  $< 8r'$  parce que  $d^2$  n'a plus que la même quantité de chiffres que  $r'$ . Pour avoir une valeur de  $R'$  approchée à moins de  $\frac{1}{2}$ , on peut donc se contenter de  $R' = r' + \frac{1}{2}d$ , qui est moyenne arithmétique entre  $R$  et  $r'$ . Ainsi dès qu'on est arrivé à deux valeurs consécutives de  $R$  et  $r'$ , dont la moitié à gauche de

nus ainsi  $\pi$  avec telle approximation qu'on veut. Au reste, nous exposerons des procédés plus expéditifs. On obtient

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279,$$

$$\log \pi = 0,49714\ 98726\ 94133\ 85435\ 12682\ 88291$$

Si dans l'équ. circ.  $R = 2\pi R$ , on fait  $R = 1$ , et  $= 1$ , il vient circ.  $= \pi$ , et  $\frac{1}{2}$  circ.  $= \pi$  : donc le rapport constant  $\pi$  de toute circonférence à son diamètre exprime aussi la circonf. dont le diamètre est un, et la demi-circonf. qui a un pour rayon.

Si on limite la valeur à  $\pi = 3,142$ ... on trouve qu'on peut poser  $\pi = \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$ . Ce résultat très simple, dû à Archimède, est adopté dans les arts. Adrien Metius, en prenant  $3,141593$ , a trouvé  $\pi = \frac{355}{113}$ , nombre remarquable en ce que les termes sont formés des trois premiers impairs, répétées 2 fois, 113,355. Ce résultat ayant 6 décimales exactes, ne produit pas une erreur d'un centimètre sur une circ. de 18000 mètres de rayon (1 ligne sur 4000 toises de rayon).

Voici une rectification graphique approchée de la circonf. On a prouvé (n° 238, 239) que le côté du carré inscrit est  $R\sqrt{2}$ , que celui du triangle équilatéral est  $R\sqrt{3}$  : la somme est  $R(\sqrt{2} + \sqrt{3})$  ou  $R \times 3,14627$ ..., égale, à un demi-centième près, à la demi-circonf. rectifiée. Ainsi, après avoir inscrit au cercle proposé, par les procédés connus, un carré et un triangle équilatéral, on ajoutera le côté de l'un au côté de l'autre, et l'on aura, à très peu près, une droite égale à la demi-circonférence.

Leurs chiffres est une partie commune, on n'a plus à prendre que des moyennes arithmétiques. C'est ce qui arrive ci-dessus au nombre marqué \*) et à tous les suivants. Alors il n'est plus nécessaire de calculer ces moyennes successives, car soit  $m$  un de ces nombres et  $m+d$  le suivant, leur moyenne est  $m + \frac{1}{2}d = m + \frac{1}{2}d - \frac{1}{4}d$ , et continuant de prendre les moyennes, on trouve

$$m + \frac{2}{3}d + \frac{1}{12}d, \quad + \frac{2}{3}d - \frac{1}{24}d, \quad m + \frac{2}{3}d + \frac{1}{48}d.$$

Les nombres dont la limite est  $m + \frac{2}{3}d$  : telle est la valeur définitive des quantités  $m$  et  $R$  lorsqu'elles sont devenues égales.

Lorsque la circonf.  $C$  est donnée, et qu'on demande son diamètre  $D$ , de  $C = \pi D$ , on tire

$$D = \frac{1}{\pi} C = k C \quad k = \frac{1}{\pi} = 0,31831\dots, \log k = \bar{1},50285013.$$

L'arc  $ACB$  (fig. 122) étant le  $n^{\text{me}}$  de la circonf., ou l'angle  $O$  de  $n^{\text{me}}$  de 4 droits,  $\pi$  son nombre de degrés, on a la proportion  $180^\circ : \pi R :: n : \text{la longueur } x \text{ de l'arc } ACB$ ; donc

$$x = \frac{\pi R n}{180} = \frac{2\pi R}{n} = k R n, \text{ et en faisant } \log k = \bar{2},24187737.$$

## II. DES SURFACES.

### *Aires des Polygones et du Cercle.*

249. Une *Aire* est l'étendue comprise entre les lignes qui terminent une figure fermée. Les aires *Equivalentes* sont celles qui sont d'égale étendue, sans qu'elles puissent coïncider par la superposition.

Deux rectangles  $AEFD$ ,  $aefd$  (fig. 124) sont égaux lorsque leurs bases sont égales et que leurs hauteurs le sont aussi, ou  $AD = ad$  et  $AE = ac$  on voit en effet qu'on peut faire coïncider l'une de ces figures avec l'autre. Mais si l'on compare le parallélogramme  $ABCD$  au rectangle  $AEFD$ , on les trouvera simplement équivalens, parce que le triangle  $AEB = DFC$ .

Les parallélogrammes  $ABCD$ ,  $abcd$ , qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont équivalens, puisqu'ils équivalent aux rectangles égaux  $ADFE$ ,  $adfe$ .

Soit un triangle  $ABC$  (fig. 125); menons  $CD$  et  $BD$  parallèles à  $AB$  et  $AC$ , les deux triangles  $ACB$ ,  $BCD$  sont égaux: ainsi, tout triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur. De sorte que tous les triangles  $ACB$ ,  $AEB$ ,  $AFB\dots$ , qui ont même base  $AB$  et leurs sommets sur  $CF$  parallèle à  $AB$ , sont égaux.

250. Comparons maintenant deux parallélogrammes quelconques.

1°. *Les rectangles de même base sont comme les hauteurs.*  
 En effet, si les deux rectangles  $ABCD = R$ ,  $abcd = r$  (fig. 126) ont les bases  $AB$  et  $ab$  égales, et que les hauteurs  $AD = H$  et  $ad = h$  soient commensurables, il y aura une longueur  $ax$  contenue  $m$  fois dans  $H$  et  $n$  fois dans  $h$ , et l'on aura (n° 156)  $\frac{H}{h} = \frac{m}{n}$ . En menant par les points de division  $x, x', y, y', \dots$  des parallèles aux bases, les rectangles  $R$  et  $r$  seront partagés, l'un en  $m$ , l'autre en  $n$  rectangles égaux, et l'on aura

$$\frac{R}{r} = \frac{m}{n}, \text{ d'où } \frac{R}{r} = \frac{H}{h}.$$

Si les hauteurs sont incommensurables, partageons de même  $AD$  en parties égales  $Ax', x'y', \dots$ , et portons l'une sur  $ad$  en  $xa, xy, \dots$ ; soit  $i$  le point de division le plus voisin de  $d$ : en menant  $il$  parallèle à  $dc$ ,  $\frac{al}{R} = \frac{ai}{H}$ , à cause de la commensurabilité, ou  $\frac{r}{R} + \frac{dl}{R} = \frac{h}{H} + \frac{id}{H}$ , donc on a  $\frac{r}{R} = \frac{h}{H}$ , puisque  $dl$  et  $id$  sont aussi petits qu'on veut, et que  $r, R, h, H$  sont constants (n° 113).

2°. *Les rectangles sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs.* Car (fig. 127) soient des rectangles  $AC, ac$  dont les bases sont  $AB = B$ ,  $ab = b$ : portons l'une de ces figures sur l'autre, en faisant coïncider l'un de leurs angles droits, ce qui déterminera les rectangles  $AK = r$ , et  $AH = R'$ , de même hauteur  $AI$ ,  $R'$  ayant même base  $AB$  que le rectangle  $AC = R$  et même hauteur  $AI$  que  $r$ , on a donc

$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{h}, \frac{R'}{r} = \frac{B}{b}, \text{ d'où } \frac{R}{r} = \frac{BH}{bh}.$$

3°. Les mêmes théorèmes ont également lieu pour les parallélogrammes, puisqu'ils sont équivalents aux rectangles de même base et de même hauteur. Donc *les parallélogrammes sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs.*



251. Mesurer une aire, c'est chercher le nombre de fois qu'elle contient une autre aire donnée. Prenons pour unité de surface, le rectangle  $abcd$ , pour mesurer le rectangle  $ABCD$  (fig. 128); puisque  $\frac{R}{r} = \frac{B}{b} \times \frac{H}{h}$ , on portera la base  $ab$  sur  $AB$ , afin de savoir combien l'une est contenue dans l'autre: on en dira autant des hauteurs  $ad$ ,  $AD$ ; ensuite on multipliera ces nombres de fois; puisque  $3 \times 4 = 12$ ,  $R$  contient ici 12 fois  $r$ .

Comme les bases et les hauteurs pourraient ne pas se contenir exactement, on dit plus généralement que la mesure d'une aire  $ABCD$  (fig. 127) est son rapport avec une autre  $abcd$  prise pour unité (n° 36, 71); cette mesure est le produit du rapport  $\frac{B}{b}$  des bases par celui  $\frac{H}{h}$  des hauteurs. Il en est de même de tout parallélogramme. D'où il résulte que si  $l$  représente le nombre abstrait  $\frac{B}{b} \times \frac{H}{h}$ , l'aire du parallélogramme est  $l$  fois celui qui est l'unité de la surface.

Si l'on prend pour unité d'aire le carré  $abcd$  (fig. 128) dont le côté est l'unité linéaire, on a  $b = h = 1$ , d'où  $R = BH$ .  $BH$  est le produit abstrait des nombres d'unités linéaires contenus dans  $B$  et  $H$ ; soit encore ce produit  $BH = l$ , l'équ. revient à  $R = l$  fois le carré pris pour unité d'aire. Ainsi, l'aire d'un parallélogramme est le produit des nombres de fois que l'unité linéaire est contenue dans sa base et dans sa hauteur, ce qu'on exprime d'une manière abrégée, quoique incorrecte, en disant que l'aire d'un parallélogramme est le produit de sa base par sa hauteur.

La mesure de l'aire  $ABCD$  (fig. 110) du rectangle qui a ses côtés égaux est  $BC \times BC$ , l'aire du carré est donc la seconde puissance de son côté. C'est pour cela que les mots *carré* et *seconde puissance* sont regardés comme synonymes.

252. Tout ce qui a été dit précédemment du produit des lignes évaluées en nombres, doit se dire aussi des rectangles qui ont leurs côtés pour facteurs. Par ex., la proposition (n° 228) peut s'énoncer ainsi: *Le carré construit sur la tangente est égal*

au rectangle qui a pour base la sécante entière, et pour hauteur sa partie extérieure ; et ainsi des autres

Le caractère essentiel des démonstrations géométriques est de rendre la rigueur du raisonnement à une clarté comparable à celle des axiomes. On ne doit jamais y perdre de vue les objets comparés : ainsi ces théorèmes n'ayant été obtenus que par des calculs fondés sur la théorie des lignes proportionnelles, nous donnerons ici une démonstration directe des trois propositions fondamentales, relatives au rapport des aires. Les autres en dérivent ensuite sans efforts, ainsi qu'on peut s'en convaincre en les reprenant tour à tour.

253. I. Construisons (fig. 129) sur la ligne  $AC = AB + BC$  les carrés  $AF$  et  $AI$  : il est visible que l'aire  $AI = AF + FI + EH + CF$ , ou  $= AF + FI + 2CF$ , parce que les rectangles  $EH$  et  $CF$  sont égaux. Comme  $AF$  est le carré de  $AB$ ,  $FI$  celui de  $BC$ , on retrouve ainsi la proposition

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$a$  et  $b$  étant des lignes, et  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $ab$  des aires.

Pareillement  $AF = AI + FI - 2EI$ , à cause de  $BD = BI - FI$  et de  $EI = BI$  : on retrouve donc aussi

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

254. II. Soit un triangle  $ABC$  (fig. 130) rectangle en  $A$  ; décrivons des carrés  $BF$ ,  $BG$ ,  $AE$  sur ses trois côtés ; puis menons les obliques  $AF$ ,  $BE$  et la perpendiculaire  $AL$  sur l'hypoténuse  $BC$ . Les triangles  $ACF$ ,  $BCE$  sont égaux ; car leurs angles en  $C$  se composent de l'angle commun  $BCA$  plus d'un angle droit  $BCF$  ou  $ACE$  ; d'ailleurs, les côtés adjacens sont  $BC = CF$ ,  $AC = CE$ , côtés des carrés. Mais ces triangles sont les moitiés des rectangles  $CD$ ,  $AE$ , puisque les bases communes sont  $CF$ ,  $EC$ , et que les sommets  $A$  et  $B$  sont sur les bases opposées  $DL$ ,  $BA$  : donc rectangle  $CL = AE$ . On prouve de même que rectangle  $BL = BG$ , et ajoutant ces équations  $BF = AE + BG$ , on a  $a^2 = b^2 + c^2$ , c.-à-d. que le quarré construit sur l'hypoténuse est égal à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit (comme n° 221, 4°)

Les rectangles  $CL$  et  $BF$  de même hauteur sont entre eux comme les bases  $DC$  et  $BC$  : ainsi  $\frac{CL \text{ ou } CI}{BF} = \frac{CD}{BC}$  ; on a encore

$$\frac{BG}{BF} = \frac{BD}{BC}, \text{ et } \frac{AE}{BG} = \frac{CD}{BD}.$$

Ces propositions reviennent à celles du n° 221, 2°. et 3°

III Si le triangle  $ABC$  n'est pas rectangle (fig. 131), et que l'angle  $A$  soit aigu, faites la même construction que ci-dessus, et abaissez  $BK$ ,  $CM$  perpend. sur les côtés opposés. Le même raisonnement prouvera que les triangles  $ACF$ ,  $BCE$  sont égaux, ainsi que les rectangles  $CL$ ,  $CK$ , dont les aires sont doubles de celles des triangles. Ainsi, rectangle  $CL = CK = AE - AK$ , rectangle  $BL = BM = BG - AM$ . Or, les triangles rectangles  $BAI$ ,  $AOC$  sont semblables, à cause des deux côtés perpendiculaires qui comprennent un angle égal (n° 205, 8°.), d'où  $AI : AO :: AB : AC$ , et  $AI \times AC = AO \times AB$ , rectangle  $AK = AM$ . Ajoutant donc les rectang.  $CL$  et  $BL$ , il vient  $BF = AE + BG - 2AK$ , ou  $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times AI$  (comme n° 222).

Si l'angle  $BAC$  est obtus (fig. 133), la même construction donne encore le triangle  $BCE = CAF$ , d'où . . . . . rectang.  $CL = CK = AE + AK$  : on trouve de même  $BL = BG + AK$  ; ajoutant, il vient  $BF = AE + BG + 2AK$ , ou  $a^2 = b^2 + c^2 + 2b \times AI$  (comme n° 222).

155. Le côté du carré équivalent à un parallélogramme est moyen proportionnel entre sa base et sa hauteur. Car soient  $B$  la base,  $H$  la hauteur d'un parallélogramme, et  $x$  le côté du carré équivalent, on a  $x^2 = BH$ . D'après cela, pour carrer un parallélogramme, ou en avoir la quadrature (n° 251), portez-en la base et la hauteur (fig. 92), de  $B$  en  $C$ , et de  $B$  en  $D$ , sur une droite ; puis, sur le diamètre  $BC$ , décrivez une demi-circconférence  $BAC$ , qui coupera en  $A$  la perpendiculaire  $DA$  menée en  $D$  sur  $BC$  : la corde  $BA$  sera le côté du carré cherché (n° 227). Si la figure donnée est le rectangle  $CL$  (fig. 130), en prenant  $BC = DL$ , on a le carré  $CI = \text{rect. } CL$ .

256. *L'aire du triangle est la moitié du produit de sa base B par sa hauteur H, ou  $\frac{1}{2} BH$ , d'après ce qu'on a dit (n° 249).*

1°. Le carré équivalent à un triangle donné est  $x^2 = \frac{1}{2} BH$ ; on a donc la quadrature d'un triangle, en cherchant une moyenne proportionnelle entre la hauteur et la moitié de la base, c.-à-d. en prenant (fig. 130)  $BD$  égal à la moitié de la base, et  $BC$  à la hauteur, et achevant la construction comme ci-dessus;  $BG$  est équivalent au triangle proposé.

2°. Les triangles  $ABF$ ,  $BIC$  (fig. 134) qui ont même hauteur, sont entre eux comme leurs bases  $AF$ ,  $IC$ .

Pour couper par une ligne  $BF$  un triangle  $ABC$  en deux parties qui aient entre elles un rapport donné, il suffit de partager (n° 217, 4°.) la base  $AC$  en deux segments  $AF$ ,  $FC$  qui soient dans ce rapport, et de tirer  $BF$ .

257. Soit un polygone  $ABDE \dots$  (fig. 135); menons  $AD$  et sa parallèle  $BC$ , qui rencontre en  $C$  le côté  $ED$  prolongé; enfin, tirons  $AC$ . Le triangle  $ABD$  peut être remplacé par  $ACD$ , qui lui est équivalent, ainsi l'hexagone  $ABDEFG$  est équivalent au pentagone  $ACEFG$ .

En appliquant de nouveau cette construction à ce pentagone, on le changera en un quadrilatère, puis en un triangle, et enfin, si l'on veut, en un carré. On sait donc réduire tout polygone à un triangle, ou à un carré équivalent.

258. L'aire d'un polygone s'obtient en le décomposant en triangles, et cherchant l'aire de chacun. Si le polygone est régulier comme  $ABCD \dots$  (fig. 112), l'aire est égale au périmètre multiplié par la moitié du rayon  $OG$  du cercle inscrit, qu'on nomme *Apothème*. Car  $n$  étant le nombre des côtés, on prendra  $n$  fois l'aire  $AOB$  d'un des triangles au centre, savoir,

$$n \times AB \times \frac{1}{2} OG = \text{périmètre} \times \frac{1}{2} OG.$$

259. L'aire du trapèze  $AHah$  (fig. 82) est le produit de sa hauteur par la moitié de la somme de ses bases parallèles, ou par la ligne menée à distance égale de chacune. En effet, menons  $AC$  parallèle à  $ah$ , puis  $Ee$  par les milieux de  $AH$  et  $ah$ ;  $Ee$  sera parallèle à  $Hh$  (n° 220, 4°.). Or, l'aire du parallélogramme  $AHhE$  est le produit de sa hauteur  $Ee$  par sa base  $AH$ , et l'aire du triangle  $Eah$  est le produit de sa hauteur  $Ee$  par sa base  $ah$ ; donc l'aire du trapèze  $AHah$  est le produit de sa hauteur  $Ee$  par la moitié de la somme de ses bases  $AH$  et  $ah$ .



triangle  $ACh$  est le produit de sa hauteur par  $Ch$  ou  $Be$ : celle du triangle  $AHC$  est le produit de cette même hauteur par  $HC$  ou  $EB$ ; ainsi l'aire  $AHah$  est le produit de la hauteur commune par  $Ee$ , ou par  $hC + HC$ , ou enfin par  $(Aa + Hh)$ . (Voyez, pour l'aire du quadrilatère, n° 318, V, et 364, VI.)

260 L'aire (fig. 112) du trapèze  $ABba = \frac{1}{2} Gg \times (AB + ab)$ . En multipliant  $AB$  et  $ab$  par le nombre des côtés des polygones réguliers  $ABCD \dots$ ,  $abcd \dots$ , on obtient leurs périmètres  $P$  et  $p$ . Ainsi, la différence de leurs aires est  $= \frac{1}{2} Gg (P + p)$ . Comme  $Gg$  tend sans cesse vers zéro, lorsqu'on fait croître le nombre des côtés, et que  $\frac{1}{2} (P + p)$  approche de plus en plus de la circonférence, cette différence peut être rendue aussi petite qu'on veut. Ainsi, l'aire du cercle est la limite des aires des polygones réguliers inscrits et circonscrits (n° 113).

L'aire  $C$  d'un cercle de rayon  $R$  est le produit de la moitié du rayon par sa circonférence, ou du carré du rayon par le rapport  $\pi$  de la circonférence au diamètre. En effet, soient  $\alpha$  l'excès de l'aire du polygone circonscrit sur celle du cercle,  $p$  la circonf., et  $\beta$  l'excès du périmètre du polygone sur la circonf.; l'aire de ce polygone, ou  $C + \alpha$  est donc (n° 258)  $= \frac{1}{2} R (p + \beta)$ . Comme les variables  $\alpha$  et  $\beta$  décroissent indéfiniment (\*), on comparera les termes constans (n° 113), et l'on aura, à cause de  $p = 2\pi R$  (n° 218),

$$\text{cercle } C = \frac{1}{2} pR = \text{circonf.} \times \frac{1}{2} R = \pi R^2$$

Soit  $D$  le diamètre, on a cercle  $= \frac{1}{4} \pi D^2$ , ou à peu près  $= D \times \frac{1}{2} D$ .

\* On observe qu'on aurait été conduit au même résultat, et, raisonnant d'une manière analogue, mais inexacte, on eût négligé les termes  $\alpha$  et  $\beta$ , qui doivent disparaître ensuite: c'est ce qui arrive dans la méthode des *infinitement petits* ou l'on considère la circonférence comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, car alors  $C$  est l'aire de ce polygone, et  $p$  le périmètre, et l'on trouve  $C = \frac{pR}{2}$ . Ce procédé pourrait donc être regardé comme parfaitement rigoureux, si l'on s'assurait *a priori* que les termes ainsi négligés sont *infinitement petits*. Consultez, à ce sujet, les *Reflexions sur la Méthode du Calcul infinitesimal*, par Carnot.



Lorsque l'aire  $C$  du cercle est donnée, le rayon

$$R = \sqrt{\frac{C}{\pi}} = \sqrt{kC}, k = \frac{1}{\pi} = 0,31831, \log. k = -1,50285013$$

Un rectangle qui a pour base la demi-circonférence rectifiée et pour hauteur le rayon, est égal au cercle, on a ainsi la solution approchée du fameux problème de la *quadrature du cercle*. Pour le résoudre rigoureusement, ce qui est à peu près inutile, il faudrait trouver la valeur exacte de  $\pi$ .

261. L'aire du secteur  $AOBI$  (fig. 136) est le produit de la moitié du rayon par l'arc  $AIB$ , en effet on a

$$\frac{AOBI}{AODI} = \frac{AIB}{AID}, AOB I = \frac{\text{cercle}}{\text{circonf.}} \times AIB, \text{ ou } = \frac{1}{2} R \times AIB$$

La longueur de l'arc  $AIB$  est connue (page 291) : ainsi

$$\text{Secteur} = \frac{\pi R^2}{n} = \frac{\pi R^2}{360} = h R^2, \log h = \bar{3},9408473.$$

l'arc  $AIB$  étant le  $n^{\text{me}}$  de la circonf., et  $n$  son nombre de degrés.

L'aire du segment  $ALBI$  est égale à celle du secteur, moins le triangle  $AOBL$  (n° 364, VII).

Aux arcs semblables et concentriques  $ABD, abd$  (fig. 168) circonscrivons des portions de polygones réguliers, le système de ces trapèzes formera une aire dont la limite sera  $ADBabd$ . Il est aisé d'en conclure que l'aire  $ABDabd$  comprise entre deux arcs concentriques est égale au produit de la distance  $A$  entre ces arcs, multipliée par la moitié de leur somme, ou par l'arc  $a'b'd'$  décrit à distance égale de l'un et de l'autre (n° 259).

On peut toujours évaluer, par approximation, une aire curviligne, en la considérant comme un polygone dont les côtés sont forts petits, et la décomposant en triangles ou en trapèzes. Par ex., traçons dans l'aire  $aADd$  (fig. 162) les parallèles équidistantes  $Aa, aI, bB, bK, \dots, dD$ , que nous désignerons par  $p', p'', \dots, p'''$ , et menons une perpend. quelconque  $a'd'$  de  $Aa$  : l'aire sera ainsi coupée en trapèzes, dont les aires sont  $(p' + p'')k, (p'' + p''')k, \dots$ ,  $k$  étant la distance de deux per-

parallèles. La somme est  $aADd = k(\frac{1}{2}p' + p'' + p''' \dots + \frac{1}{2}p^{(n)})$ ; ainsi l'aire curviligne est le produit de la distance  $k$  entre les parallèles, par leur somme diminuée de la moitié des deux extrêmes.

### Comparaison des Surfaces.

262. Comparons les aires des polygones semblables.

I Les aires de deux triangles semblables  $ABC, abc$  (fig. 137) sont comme les carrés de leurs côtés homologues. Car la similitude donne  $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$  : mais les perpendiculaires  $BD$  et  $bd$  aux bases  $AC, ac$ , forment les triangles semblables  $ABD, abd$ , d'où  $\frac{AB}{ab} = \frac{BD}{bd}$  : donc  $\frac{AC}{ac} = \frac{BD}{bd}$  (ce qui est conforme au théorème 243). Multipliant les deux membres par  $\frac{BD}{bd}$ , on a

$$\frac{AC \times BD}{ac \times bd} = \frac{BD^2}{bd^2} = \frac{AB^2}{ab^2} = \dots$$

II Les aires de deux polygones semblables  $ABCD, abcd$ , sont comme les carrés de leurs lignes homologues (fig. 118). Car la similitude des triangles  $ABC, abc$  (n° 242) donne la proportion  $\frac{T}{t} = \frac{AB^2}{ab^2}$  : on a de même  $\frac{T'}{t'} = \frac{AC^2}{ac^2} = \frac{AB^2}{ab^2}$ , etc.; réunissant ces rapports égaux, il vient

$$\frac{T}{t} = \frac{T'}{t'} = \frac{T''}{t''} = \dots = \frac{AB^2}{ab^2},$$

$$\text{d'où (n° 73, 3°.)} \quad \frac{T + T' + T'' \dots}{t + t' + t'' \dots} = \frac{AB^2}{ab^2} = \frac{ABCD \dots}{abcd \dots}$$

263. Concluons de là que, 1°. si l'on construit trois polygones  $M, N$  et  $P$  (fig. 138) semblables, de figures quelconques, dont les côtés homologues soient ceux d'un triangle rectangle

$$ABC, \text{ on aura } \frac{M}{AB^2} = \frac{N}{BC^2} = \frac{P}{AC^2}, \text{ d'où } \frac{M}{AB^2} = \frac{N + P}{BC^2 + AC^2} :$$

or,  $AB^2 = BC^2 + AC^2$ ; donc  $M = A + P$ . Cette proposition étend celle du carré de l'hypoténuse (n° 254) à tous les polygones semblables, de sorte qu'on peut aisément construire une figure égale à la différence des deux autres, ou à leur somme, ou à la somme de tant d'autres qu'on voudra, pourvu qu'elles soient toutes semblables.

2°. Les aires des polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont comme les carrés des rayons des cercles inscrits et circonscrits.

3°. Les cercles  $C, c$  sont comme les carrés de leurs rayons  $R, r$ , ou de leurs diamètres : car soient  $\alpha$  et  $\beta$  les excès des aires des polygones circonscrits sur celles des cercles  $C, c$ ,  $C + \alpha, c + \beta$  seront les aires des polygones,

$$\text{d'où} \quad \frac{C + \alpha}{c + \beta} = \frac{R^2}{r^2}; \text{ puis (n° 113) } \frac{C}{c} = \frac{R^2}{r^2}.$$

Cela résulterait aussi de ce que  $C = \pi R^2, c = \pi r^2$ .

4°. Le cercle qui a pour diamètre l'hypoténuse d'un triangle rectangle est donc égal à la somme de ceux qui ont pour diamètres les côtés de l'angle droit; de sorte qu'il est facile de former un cercle égal à la somme ou la différence de tant de cercles qu'on voudra.

264. Deux triangles  $ABC, abc$  (fig. 137), qui ont un angle égal  $A = a$ , sont entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle. En effet, les perpendiculaires  $BD, bd$  sur leurs bases donnent (n° 256)  $\frac{ABC}{abc} = \frac{BD \times AC}{bd \times ac}$ , or les triangles semblables  $ABD, abd$  donnent  $\frac{BD}{bd} = \frac{AB}{ab}$ .

$$\text{donc} \quad \frac{ABC}{abc} = \frac{AB \times AC}{ab \times ac}.$$

On peut à l'aide de ce théorème, résoudre les questions suivantes :

I. Diviser un triangle  $ABC$  (fig. 134) en trois parties égales.

par des droites  $FD$ ,  $FE$  qui se joignent en un point donné  $F$  sur la base  $AC$ . Divisons la base en trois également aux points  $H$  et  $I$ ; comme le triangle  $CHI$  est le tiers de  $CBA$  (n° 256, 2<sup>e</sup>.),

L'aire inconnue  $CDF = CBI$ . Or, on a,  $\frac{CDF}{CBI} = \frac{CD \times CF}{CB \times CI}$

donc  $CD \times CF = CB \times CI$ , ou  $\frac{CD}{CB} = \frac{CI}{CF}$ ; ce qui prouve

(n° 216) que  $DI$  est parallèle à  $BF$ , et que, par conséquent, il faut mener  $BF$ , puis ses parallèles  $HE$ ,  $DI$ , et enfin  $DF$ ,  $FE$ .

II. La même construction sert à diviser l'aire  $ABC$  (fig. 139) en 4, 5... parties égales par des lignes  $FE$ ,  $FE'$ ,  $FD'$ ,  $FD$ ; il faut couper la base  $AC$  en autant de parties égales. On sait donc diviser l'héritage triangulaire  $ABC$ , en parts égales, par des sentiers qui aboutissent à un puits commun  $F$ .

III. Décrire un triangle  $EIK$  qui soit équivalent à  $ABC$  (fig. 140), dont la base soit  $EI$  et le sommet situé en un point  $K$  de la ligne donnée  $NK$ . Supposons d'abord que les deux triangles  $ABC$ ,  $ADF$  soient équivalens: comme

$$\frac{ABC}{ADF} = \frac{AB \times AC}{AD \times AF},$$

on a  $AB \times AC = AD \times AF$ , ou  $\frac{AB}{AD} = \frac{AF}{AC}$ :

ainsi,  $BF$  est parallèle à  $DC$  (n° 216). Donc si l'on veut construire un triangle  $EGH = ABC$ , dont le sommet  $E$  soit donné la base  $GH$  étant dans la direction  $AH$  de celle du triangle donné, on mènera  $ED$  parallèle à  $AC$ , puis  $DC$  et sa parallèle  $BF$ , et l'on aura  $ADF = ABC$ : prenant ensuite dans la direction  $AC$ ,  $GH = AF$ , le triangle  $GHE$  sera  $= ABC$ , et remplira la condition demandée. Observez que la même construction s'appliquerait encore au cas où, au lieu de donner le sommet  $E$ , on donnerait la base  $GH$ ; on pourrait même donner aussi l'angle  $H$ : autant de problèmes différens qui sont résolus par le même procédé.

En prenant  $EG$  pour base, on pourra de même transformer le triangle  $EGH$  en un autre  $EIL$  équivalent, qui aurait son

sommet en  $I$ ; on aurait changé le triangle  $ABC$  en  $EIL$ , le côté  $EI$  et l'angle  $IEI$  étant données. Enfin  $LK$ , parallèle à  $EI$ , coupe la droite donnée  $NK$  au point  $K$ , et le triangle  $EIK = EIL = ABC$  résout le problème proposé. On pourrait déterminer le point  $K$  en se donnant la longueur  $IK$ , ou l'angle  $EKI$  (n° 212, IV), ou toute autre condition.

### *Des Plans et des Angles dièdres.*

265. De la définition du *Plan* (n° 154), il suit que,

1°. Le plan est une surface infinie en longueur et largeur.

2°. Trois points, ou deux droites qui se coupent, sont toujours dans un même plan, et en déterminent la position. En effet, on peut visiblement concevoir une infinité de plans qui passent par l'une des droites, ou par la ligne qui joint deux des points données, puisqu'on peut faire tourner l'un de ces plans autour de cette ligne comme sur une charnière. Mais ce plan s'arrêtera dans son mouvement, si l'on fixe hors de la ligne un point par lequel il doit passer.

3°. Un triangle est toujours dans un plan.

4°. Deux parallèles déterminent un plan.

5°. Deux plans ne peuvent, sans se confondre, avoir trois points communs en ligne droite: ainsi l'intersection de deux plans est une droite.

266. Faisons tourner l'angle droit  $PAB$  (fig. 141) autour de  $AB$ , jusqu'à ce que  $AP$  fasse, avec une troisième ligne  $AC$ , un angle droit  $PAC$ , on dit alors que  $AP$  est perpendiculaire au plan des deux droites  $AB$ ,  $AC$ .

Si une droite  $AP$  est perpendiculaire à deux autres  $AB$ ,  $AC$  qui se croisent en  $A$ , elle l'est aussi à toute ligne  $AI$  tracée par ce point dans le plan  $BAC$  des deux dernières. En effet, prenons l'angle  $PAI$ : pour cela, joignons les trois points  $P$ ,  $C$ , quelconques, mais tels néanmoins que  $AB = AC$ . Les lignes  $PB$ ,  $PC$  seront égales, à cause du triangle  $PAC = PAB$ . Prenons le milieu  $O$  de la base  $BC$  des triangles isocèles  $PBC$ ,  $PAC$ ; menons  $PO$ ,  $AO$ , qui seront perpendiculaires sur cette base.



$BC$  (n° 163, 2°), les triangles rectangles  $PCO$ ,  $PAC$ ,  $ACO$  donnent

$PC^2 = PO^2 + CO^2 = AP^2 + AC^2$ ,  $AC^2 = CO^2 + AO^2$ , éliminant  $AC^2$ , il vient  $PO^2 = AP^2 + AO^2$ ; ce qui prouve que le triangle  $APO$  est rectangle (p. 268).

Les triangles rectangles  $POI$ ,  $APO$ ,  $AOI$  donnent  $PI^2 = PO^2 + OI^2$ ,  $PO^2 = AP^2 + AO^2$ ,  $OI^2 = AI^2 - AO^2$ ; d'où  $PI^2 = AP^2 + AI^2$ ; ainsi l'angle  $PAI$  est droit;  $PA$  est perpendiculaire à toute droite  $AI$ , tracée dans le plan  $MN$ .

On conclut de là que, 1° les obliques  $PC$ ,  $PB$  (fig. 141), qui s'écartent également de la perpendiculaire  $AP$ , sont égales, et réciproquement. Cela suit du triangle  $PAC = PAB$ .

Les pieds  $B, E, D, C$  des obliques égales  $PB, PE, \dots$  (fig. 142) étant sur une circonférence dont le centre est en  $A$ , on voit que, pour abaisser d'un point  $P$  hors d'un plan  $MN$  une perpendiculaire à ce plan, on marquera trois points  $E, B, C$  sur ce plan, à égales distances de  $P$ ; le centre  $A$  du cercle passant par ces trois points sera le pied de la perpendiculaire.

2° Si l'on fait tourner l'angle droit  $PAB$  (fig. 142) autour de son côté  $AP$ , l'autre côté  $AB$  décrira un plan perpendiculaire à  $AP$ ; car menant en  $A$  le plan  $MN$  perpendiculaire à  $AP$ , s'il ne contenait pas la droite  $AB$  dans toutes ses positions: que l'une fût, par ex.,  $AD$  hors de  $MN$ , le plan  $DAP$  qui couperait  $MN$  selon  $CA$  perpendiculaire à  $AP$ , donnerait, dans ce plan  $DAP$ , deux perpendiculaires  $CA, DA$  à  $AP$ .

3°. Par un point  $C$  ou  $A$  (fig. 142), on peut toujours mener un plan  $MN$  perpendiculaire à une droite  $AP$ , et l'on n'en peut mener qu'un seul. Car, soit menée  $CA$  perpendiculaire sur  $AP$ ; en faisant tourner l'angle droit  $PAC$  autour de  $AP$ ,  $AC$  décrira le plan  $MN$  dont il s'agit.

4°. D'un point  $A$  ou  $P$  (fig. 142), on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire  $AP$  à un plan  $MN$ , elle est la plus courte distance du point  $P$  au plan: plus une oblique s'écarte de  $AP$ , plus elle est longue. Comme les obliques égales s'écartent également de la perpendiculaire, on peut en effet ramener ces diverses lignes à être dans le même plan. Si l'on admet, par ex.,

que  $AI > AC$ , on prendra  $AE = AC$  dans le plan  $PAI$ , et puisque  $PI > PE = PC$ , on en tire  $PI > PC$ .

5°. Deux plans  $ME$ ,  $mn$  (fig. 143) perpendiculaires à une même droite  $AP$  ne peuvent se rencontrer; car s'ils n'étaient pas parallèles, en joignant un point quelconque  $O$  de leur ligne d'intersection avec les pieds  $A$  et  $P$ , les lignes  $AO$ ,  $PO$  seraient deux perpendiculaires abaissées d'un point  $O$  sur la même ligne  $AP$ , ce qui est absurde (n° 167, 6°.).

6°. Pour mener d'un point  $P$  (fig. 141) une ligne  $PO$ , perpendiculaire à une droite  $BC$ , située dans un plan quelconque  $MN$ , on mènera  $PA$  perpendiculaire sur ce plan  $MN$ ; puis du pied  $A$  de celle-ci, on abaissera  $AO$  perpendiculaire sur  $BC$ ; enfin, joignant les points  $O$  et  $P$ ,  $PO$  sera la perpendiculaire demandée. Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre sur  $BC$ ,  $OB = OC$ , de mener  $AB$  et  $AC$ , puis de répéter la démonstration ci-dessus.

Remarquez que le plan  $PAO$  est perpendiculaire sur  $BC$ , ce qui donne aussi le moyen de mener, par un point donné  $P$ , un plan perpendiculaire à une droite  $BC$ .

267. Lorsque deux droites  $PA$ ,  $QO$  (fig. 144) sont parallèles, le plan  $MN$  perpendiculaire à l'une  $PA$ , l'est aussi à l'autre  $QO$ ; car, menant dans le plan  $MN$ , la droite  $AO$  et sa perpendiculaire  $BO$ ; ici, comme fig. 141,  $BO$  est perpendiculaire au plan  $PAO$ , et par conséquent à  $QO$ , qui est dans ce plan  $PAO$  (n° 266). Mais en outre, à cause des parallèles  $PA$ ,  $QO$  l'angle  $PAO$  étant droit,  $QOA$  l'est aussi; en sorte que  $QO$  est perpendiculaire sur  $AO$  et  $BO$ , c.-à-d., sur le plan  $AOB$  ou  $MN$ .

Réciproquement, deux droites  $AP$ ,  $QO$ , perpendiculaires au même plan  $MN$ , sont parallèles entre elles; car, sans cela, on pourrait mener en  $A$  une parallèle à  $QO$ , autre que  $AP$ ; cette parallèle serait, aussi bien que  $AP$ , perpendiculaire au plan  $MN$ , ce qui serait absurde (n° 266, 4°.).

Donc, deux lignes  $Aa$  et  $Bb$  (fig. 145), parallèles à une troisième  $Cc$ , sont parallèles entre elles; car, en menant un plan perpendiculaire à  $Cc$ , il le serait aussi à ses parallèles  $Aa$

et  $Bb$ , en vertu de notre proposition : il suit de sa réciproque, que  $Aa$  est parallèle à  $Bb$ .

268. Les intersections  $KI$ ,  $ki$  (fig. 143) de deux plans parallèles  $MN$ ,  $mn$  par un même plan  $kKI$  sont parallèles ; car d'une part elles sont dans un même plan, et de l'autre elles ne peuvent se rencontrer.

Donc, 1°. la ligne  $AP$ , perpendiculaire au plan  $MN$ , l'est aussi à tout autre plan parallèle  $mn$  ; car, en menant par  $AP$  un plan quelconque  $BCcb$ , les intersections  $BC$ ,  $bc$  étant parallèles, l'angle  $bPA$  est droit. Ainsi  $AP$  est perpend. à toute ligne  $bc$  tracée par le point  $P$  dans le plan  $mn$ .

2°. Les parallèles  $li$ ,  $Kk$ , interceptées entre deux plans parallèles  $MN$ ,  $mn$ , sont égales ; car le plan  $IKki$  de ces lignes donne les parallèles  $IK$ ,  $ik$  ; ainsi la figure  $Ik$  est un parallélogramme, d'où  $li = Kk$ .

Donc deux plans parallèles sont partout à égale distance l'un de l'autre.

269. Si la droite  $Cc$  (fig. 145) est parallèle à la ligne  $Aa$ , elle l'est aussi à tout plan  $AabB$  qui passe par  $Aa$  : puisque  $Cc$  est entièrement comprise dans le plan  $Ac$  des deux parallèles, si  $Cc$  pouvait rencontrer le plan  $Ab$ , ce ne serait que dans l'un des points de  $Aa$ , qui ne serait pas parallèle à  $Cc$ .

Étant données deux droites  $ab$ ,  $Cc$  non parallèles, et qui ne se coupent pas, on peut toujours faire passer par l'une un plan parallèle à l'autre, et l'on n'en peut mener qu'un seul ; car, par un point quelconque  $a$  ou  $b$ , menons  $aA$  ou  $bB$  parallèle à  $cC$ , le plan  $Ab$  sera celui qu'on demande.

270. L'inclinaison de deux plans  $Ab$ ,  $Ac$  (fig. 145), qui se coupent, ou la quantité plus ou moins grande dont ils sont écartés l'un de l'autre, est ce qu'on appelle un angle Dièdre : nous le désignerons par  $baAc$ , en mettant les lettres  $aA$ , qui marquent l'intersection, entre celles  $b$ ,  $c$ , qui se rapportent aux deux faces.

Les angles rectilignes  $bac$ ,  $BAC$ , qui résultent de l'intersection d'un angle dièdre par deux plans parallèles quelconques sont égaux. En effet,  $ab$  et  $AB$  sont parallèles (n° 268),

ainsi que  $ao$  et  $AC$ ; prenons, sur ces droites, des parties égales  $ab = AB$ ,  $ac = AC$ ; menons  $Cc$ ,  $Bb$ ,  $cb$  et  $CB$ . La figure  $Ab$  donne (n° 193)  $Bb$  égale et parallèle à  $An$ ; de même la fig.  $Ac$  donne  $Cc$  égale et parallèle à  $As$ . Ainsi,  $Bb$  est égale et parallèle à  $Cc$ , et la fig.  $Cb$  est un parallélogramme. On en conclut  $CB = cb$ , et par conséquent le triangle  $bac = BAC$ , et enfin, l'angle  $bac = BAC$ .

Concluons de là que, 1°. si deux angles  $bac$ ,  $BAC$  dans l'espace ont les côtés parallèles et l'ouverture tournées dans le même sens, ces angles sont égaux. Si l'ouverture est tournée en sens contraire, ces angles sont suppléments, comme n° 192, 3°.

2°. Les plans de ces angles sont parallèles. En effet, ayant abaissé au sommet  $a$  une perpend.  $al$  sur le plan  $bac$ , et mené par le point  $l$ , où elle rencontre le plan  $BAC$ , et dans ce plan, les parallèles  $IK$ ,  $IL$ , à  $AB$  et  $AC$ , elles seront parallèles à  $ab$  et  $ac$  (n° 267.) Or, les angles  $Iab$ ,  $Iac$  sont droits et égaux à  $aIK$ ,  $aIL$ . Ainsi  $al$  est perpend. au plan  $KIL$  (n° 266). Donc les deux plans  $bac$ ,  $BAC$  sont perpend. à une même droite (n° 266, 5°.).

3°. Les triangles  $bac$ ,  $BAC$  qui joignent les extrémités de trois droites égales et parallèles dans l'espace, sont égaux; les plans de ces triangles sont parallèles.

271. Soient deux angles dièdres  $BAPC$ ,  $bapc$  (fig. 146) coupés par des plans  $BAC$ ,  $bac$  perpend. à leurs arêtes  $AP$ ,  $ap$ ; les angles dièdres sont dans le même rapport que les angles rectilignes  $BAC$ ,  $bac$ , résultant de cette section, et dont les côtés sont des perpend. menées, dans chaque face, en un point de leurs arêtes  $AP$ ,  $ap$ .

En effet, 1°. en quelque point  $A$  de l'arête  $AP$  que la section perpend. soit faite, l'angle  $BAC$  sera le même (n° 270).

2°. Si les angles  $BAC$ ,  $bac$  sont égaux, les angles dièdres le sont aussi, puisque ceux-ci coïncident, en appliquant l'un sur l'autre les angles  $BAC$ ,  $bac$ .

3°. Si  $BAC$  et  $bac$  ont une commune mesure  $Cx$ , en la portant sur  $CAB$  et  $cab$  autant de fois qu'elle peut y être contenue, et menant des plans par les arêtes  $AP$ ,  $ap$  et les lignes

de division  $Ax, Ax' \dots$ , chaque angle dièdre contiendra l'angle dièdre  $CAPx$ , autant de fois que  $Cx$  est contenu dans  $CAB$  et  $cab$ . D'où il suit que les angles dièdres sont entre eux dans le rapport de  $CAB$  à  $cab$ .

4°. Si les angles  $CAB, cab$  sont incommensurables, on prouvera aisément (comme n° 181, 2°.) que cette proportion a encore lieu.

Concluons donc (n° 36, 71) qu'un angle dièdre a pour mesure l'angle rectiligne qui résulte de l'intersection de cet angle dièdre par un plan perpendiculaire à son arête, puisqu'après avoir pris  $cab$  pour unité d'angle, on peut prendre l'angle dièdre  $cpab$  qui lui correspond pour unité des angles dièdres, comme n° 182; de sorte qu'en dernière analyse, les arcs de cercle servent aussi de mesure aux angles dièdres.

Dans la rencontre des plans entre eux, on trouve les mêmes théorèmes que pour celle des lignes. Ainsi, les angles adjacens de deux plans qui se coupent valent deux droits, et leurs angles opposés au sommet sont égaux. Deux plans parallèles, coupés par un plan sécant, forment les angles correspondans, alternes-internes, alternes-externes, égaux; et réciproquement, etc. ....

272. Les plans sont dits perpend., lorsque leur angle dièdre est mesuré par angle droit.

La droite  $AB$  (fig. 147) étant perpend. au plan  $MN$ , tout plan  $PQ$  qui passe par cette ligne est perpend. à  $MN$ ; car, en menant dans le plan  $MN$  la droite  $AC$  perpendiculaire sur  $RP$ , l'angle  $BAC$  est droit (n° 266). Donc, 1°. pour élever en  $A$  la perpend.  $AB$  au plan  $MN$ , appliquez sur ce plan le côté  $PA$  d'un angle droit  $PAB$ , et faites tourner cet angle autour de  $PA$  jusqu'à ce que le plan  $PQ$  devienne perpend. à  $MN$ .

2°. Par une droite, telle que  $PQ$  ou  $AB$  (fig. 148), on ne peut mener qu'un seul plan perpend. à  $MN$ ; ce plan  $ABQP$  est déterminé par une perpend.  $AP$  à  $MN$ .

3°. La Projection  $A$  d'un point  $P$  sur un plan  $MN$  est le pied de la perpend.  $AP$ , abaissée du point  $P$  sur ce plan.

La projection  $AB$  d'une ligne  $PQ$ , est la suite des pieds



de toutes les perpendiculaires abaissées des divers points de la ligne sur le plan. Si cette ligne est droite, le système de toutes ces perpend. formera un plan  $PABQ$ , perpend. à  $MN$  : l'intersection  $AB$  de ces deux plans est la projection de la ligne  $PQ$ , projection qui est une droite déterminée par celles  $A$  et  $B$  de deux points  $P$  et  $Q$ .

L'angle qu'une ligne droite fait avec sa projection sur un plan est ce qu'on appelle l'inclinaison de la droite sur le plan. Les lignes  $AB$ ,  $AO$ ... (fig. 141) sont les projections sur le plan  $MN$  des droites  $PB$ ,  $PO$ ...; et les angles qu'elles forment avec ce plan sont  $PBA$ ,  $POA$ ...

273. Si les plans  $PQ$  et  $MN$  (fig. 147) sont perpend. entre eux, et qu'on mène dans l'un  $PQ$ , la perpend.  $AB$  sur leur intersection  $PR$ , elle le sera à l'autre plan  $MN$ . Car, si l'on mène dans ce plan  $MN$ ,  $AC$  perpendiculaire sur  $PR$ , l'angle  $BAC$  sera droit, puisqu'il mesure celui des plans : ainsi  $AB$  sera perpendiculaire sur  $PR$  et sur  $AC$  (n° 266).

Réciproquement, si les plans  $PQ$  et  $MN$  sont perpend., et que, par un point  $A$  de leur intersection  $PR$ , on élève la perpendiculaire  $AB$  au plan  $MN$ , elle sera dans le plan  $PQ$ ; car, si elle n'y était pas, en menant, dans ce plan  $PQ$ , une perpend. à  $PR$  en  $A$ , elle serait une 2<sup>e</sup> perpend., en ce point, au plan  $MN$ .

Donc, si deux plans  $PQ$ ,  $RS$  (fig. 149) sont perpend. à un 3<sup>e</sup>  $MN$ , leur intersection  $AB$  est perpend. à  $MN$  : car si par le point  $A$  on veut élever une perpend. à ce plan  $MN$ , elle doit être située à la fois dans les deux plans  $PQ$ ,  $RS$ .

274. La plus courte distance  $Oo$  (fig. 145) de deux droites  $ab$ ,  $AC$ , qui ne se coupent pas, est la ligne perpend. sur l'une et l'autre. Car faisons passer par  $ab$  un plan  $bac$  parallèle à  $AC$ , et par  $AC$  un plan  $BAC$  parallèle à  $ab$  (n° 269) : la plus courte distance cherchée sera visiblement celle des plans parallèles  $bac$ ,  $BAC$  (n° 268, 2<sup>e</sup>). Par  $ab$ , on mènera un plan  $baIK$  perpend. au plan  $BAC$ ; l'intersection  $IK$  coupera  $AC$  en un point  $O$ . enfin élevant  $Oo$  perpend. sur le plan  $BAC$ ,  $Oo$  sera la ligne cherchée.

275. Deux droites  $AB$ ,  $CD$  (fig. 150) sont coupées en parties

proportionnelles par trois plans parallèles RS, PQ, MN. En effet, menons AD, et tirons les droites BD, EF, FG, AC; EF sera parallèle à BD (n° 268), ainsi que AC à FG. On aura donc

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD}, \text{ et } \frac{AF}{FD} = \frac{CG}{GD}; \text{ d'où } \frac{AE}{EB} = \frac{CG}{GD}.$$

### Des Angles polyèdres.

276 Lorsque divers plans (fig. 151) ont pour intersections successives, deux à deux, des droites SA, SB, SC... qui se réunissent en un même point S, l'espace indéfini renfermé entre ces plans est ce qu'on nomme *Angle polyèdre* ou *Angle solide*. Chacun des angles ASB, BSC... qui le composent sont des *Angles plans*.

Et si cet espace est limité par un plan ABCDE, le corps SABCDE s'appelle une *Pyramide*.

Si le polygone ABCDE, qui sert de base à une pyramide, est régulier, et de plus, si la perpendiculaire SH, abaissée du sommet S passe par le centre H du polygone, la pyramide est dite *régulière*.

Du reste, on distingue les pyramides, ainsi que les angles polyèdres, par le nombre de faces qui composent l'angle S : un angle *Trièdre* a trois faces ; un angle *Hexaèdre* en a six, etc.

277. Tant de lignes SA, SB... qu'on voudra (fig. 151), partant d'un point S, sont coupées en parties proportionnelles par deux plans parallèles AC, ac; ou, les arêtes d'une pyramide SAC sont coupées proportionnellement par un plan ac parallèle à sa base. Car les parallèles AB à ab, BC à bc... donnent

$$\frac{SA}{Sa} = \frac{SB}{Sb} = \frac{AB}{ab}; \quad \frac{SB}{Sb} = \frac{SC}{Sc} = \frac{BC}{bc}, \text{ etc. ;}$$

et comme ces proportions s'enchaînent par un rapport commun,

on trouve  $\frac{SA}{Sa} = \frac{SB}{Sb} = \frac{SC}{Sc} = \dots$

La réciproque se démontre aisément.

278. La polygone  $abc\dots$ , qui résulte de la section d'une pyramide par un plan  $ac$  parallèle à sa base  $AC$ , est semblable à cette base. Car on a aussi  $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \dots$ ; et comme d'ailleurs les côtés des polygones  $ABC\dots$ ,  $abc\dots$  étant parallèles, les angles  $A$  et  $a$ ,  $B$  et  $b\dots$  sont égaux (n° 270), on en conclut que ces polygones sont semblables. Ces polygones sont entre eux comme les carrés des distances au sommet; car, en menant la perpend.  $SH$  sur  $ABC\dots$ , elle coupera  $abc\dots$  en  $h$ , et l'on aura  $\frac{AB^2}{ab^2} = \frac{ABCD\dots}{abcd\dots}$  (n° 262); mais  $\frac{AB}{ab} = \frac{SB}{sb} = \frac{SH}{sh}$  donc....

279. Dans tout angle trièdre  $S$  (fig. 154), l'un quelconque des angles plans est plus petit que la somme des deux autres: il n'y a lieu à démontrer la proposition qu'à l'égard du plus grand angle plan  $ASE$ . Prenons donc, dans cette face, l'angle  $DSE = FSE$ ; puis menant la droite quelconque  $AB$ , prenons sur l'arête  $SF$  une partie  $SC = SD$ . Les triangles  $DSB$ ,  $CSB$  sont égaux, et donnent  $BD = BC$ ; et comme  $BA < BC + CA$ , on en tire  $AD < AC$ . Ainsi les triangles  $ASC$ ,  $ASD$  ont l'angle  $ASD < ASC$  (n° 173), et par conséquent l'angle

$$BSA < BSC + CSA$$

280. Un angle polyèdre  $S$  (fig. 155) a la somme des angles plans qui le composent moindre que quatre angles droits. En effet, puisque l'angle polyèdre  $S$  est convexe, on peut toujours le couper par un plan qui donne une base  $ABCDE$ , et forme la pyramide  $SAD$ . Des angles de cette base menons les lignes  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC\dots$  à un point  $O$  intérieur et arbitraire: elle aura autant de triangles qu'il y en a pour former l'angle  $S$ ; et la somme des angles de ces divers triangles sera de part et d'autre la même.

Cela posé, on a l'angle plan  $ABC < ABS + SBC$ ; on en doit dire autant des autres angles trièdres  $C$ ,  $D\dots$ ; d'où il suit que la somme des angles du polygone  $ABCDE$  est plus petite que la somme des angles à la base dans les triangles  $SAB$ ,  $SBC\dots$

donc la somme des angles plans en  $S$  est, pour compenser, plus petite que la somme des angles en  $O$ .

On ne peut donc former, avec des polygones réguliers égaux, plus de cinq polyèdres; car, 1°. chaque angle de l'hexagone régulier valant  $\frac{2}{3}$  d'un droit (n° 237), ou  $\frac{2}{3}D$ , trois de ces angles font  $4D$  et ne peuvent être employés à former un angle polyèdre. A plus forte raison, ne pourrait-on pas employer quatre hexagones réguliers, ou des heptagones, etc.

2°. On ne peut, avec 4, 5... pentagones réguliers, composer un angle polyèdre, non plus qu'avec 4, 5... carrés, ou 6, 7... triangles équilatéraux; car chacun des angles vaut respectivement  $\frac{3}{5}D$ ,  $1D$ ,  $\frac{2}{3}D$ .

3°. Ainsi, le corps dont il s'agit ne peut avoir ses angles polyèdres formés que de trois pentagones réguliers, trois carrés, 5, 4, ou 3 triangles. (Voyez la Géométrie de M. Legendre, app. aux livres VI et VII: on y démontre qu'on peut en effet former ainsi les polyèdres réguliers à 12, 6, 20, 8 et 4 faces.)

281. Deux angles trièdres  $S$  et  $s$  (fig. 152 et 154), formés d'angles plans respectivement égaux  $ESF = esf$ ,  $ESG = esg$ ,  $FSG = fs_g$ , ont leurs angles dièdres égaux. Car, si l'on prend deux arêtes égales  $Sb$ ,  $sb$ , et qu'on leur mène les plans  $BAC$ ,  $bac$  perpend., ou aura visiblement les triangles rectangles égaux  $SBC = sbc$  et  $SBA = sba$ ; d'où  $SC = sc$ ,  $SA = sa$ ; donc le triangle  $SCA = sca$ , et par suite le triangle  $BAC = bac$ . Ainsi l'angle  $ABC = abc$ , ou plutôt l'angle dièdre  $ABSC = absc$ . Il en est de même des deux autres angles dièdres.

1°. Si les angles plans égaux sont disposés dans le même ordre, comme dans les fig. 152 et 154 en appliquant la face  $asb$  sur son égale  $ASB$ ,  $sbc$  se placera sur  $SBC$ ,  $sc$  sur  $SC$ , et  $bca$  sur  $BCA$ ; ainsi les corps coïncideront.

2°. Mais si les angles plans égaux ne sont pas disposés dans le même ordre (fig. 154),  $ASB = A'S'B'$ ,  $ASC = A'S'C'$  et  $BSC = B'S'C'$ ; alors les angles dièdres sont encore égaux, mais ils ne peuvent plus coïncider. Pour appliquer le triangle  $A'B'C'$  sur son égal  $ABC$ , il faut renverser le corps  $S'A'C'B'$ , placer  $B'C'$  sur  $BC$ ,  $A'B'$  sur  $AB$  et  $A'C'$  sur  $AC$ ; l'un des corps



se trouve situé en dessus de la base  $ABC$ , l'autre est en dessous (fig. 155). Les corps sont alors *Symétriques* (voy. n° 300); car les perpend.  $SB$ ,  $S'B$  sur le plan de la base commune  $ABC$  sont égales.

3°. Il est visible qu'on pourra encore faire coïncider les angles trièdres  $S$  et  $s$  (fig. 152, 154), s'ils ont un angle dièdre égal formé par deux angles plans égaux et semblablement placés.

4°. Si les angles polyèdres  $S$  et  $S'$  (fig. 151) sont formés d'angles dièdres égaux et d'angles plans égaux, chacun à chacun, et disposés dans le même ordre, ils seront égaux. Car, menons des plans par l'une des arêtes  $SB$  et par toutes les autres, ils formeront les angles trièdres  $ESAB$ ,  $ESBD$ ... Opérons de même sur  $S'$ ; l'angle dièdre  $ESAB = E'S'A'B'$ , donne l'angle plan  $ESB = E'S'B'$ , et l'angle dièdre  $AESB = A'E'S'B'$ , mais, par supposition, l'angle dièdre  $AESD = A'E'S'D'$ , retranchant, il vient  $BESD = B'E'S'D'$ . Donc l'angle dièdre  $BESD = B'E'S'D'$ : et ainsi des autres.

### *Surfaces des corps.*

282. On nomme *Prisme* (fig. 157) le corps engendré par le mouvement d'une droite  $Aa$ , qui se meut parallèlement, son extrémité  $A$  décrivant un polygone quelconque  $ABCDE$ , et sa longueur  $Aa$  restant la même. Si l'Arête  $Aa$  est perpend. au plan de la Base  $ABC$ ..., on dit que le prisme est *Droit*.

Comme  $Aa$  est égale et parallèle à  $Bb$ ,  $Ba$  est un parallélogramme (n° 193); il en est de même de  $Cb$ ...; donc toutes les faces latérales d'un prisme sont des parallélogrammes. Une partie quelconque  $Aa'$  de l'arête  $Aa$  engendre aussi des parallélogrammes  $Ba'$ ,  $Cb'$ ..., de sorte que le polygone  $a'b'c'$ ... décrit par le point  $a'$ , ayant ses côtés égaux et parallèles à la base  $ABC$ ..., ces polygones sont égaux, et leurs plans sont parallèles (n° 270, 2°). Donc, toute section faite dans un prisme par un plan parallèle à la base est égale à cette base: les bases opposées  $ABC$ ...,  $abc$ ... sont donc égales et parallèles. La distance de ces bases est la *Hauteur*.



283. *L'aire d'un prisme est le produit d'une arête  $Aa$  (fig. 158) par le périmètre d'une section perpend.  $a'b'c'$ ...* Il est visible que, les deux bases exceptées, l'aire du prisme est la somme des aires des parallélogrammes qui le composent. Si le prisme est droit, l'aire est le produit du contour de sa base par une de ses arêtes. En coupant le prisme  $Ac$  par un plan  $a'b'c'$ ... perpend. à l'arête  $Aa$ , et plaçant la partie supérieure  $a'c$  sous l'inférieure  $AC$ , de sorte que  $abc$ ... coïncide avec  $ABC$ ..., le prisme deviendra droit. Donc, etc.

284. Supposons que la base du prisme soit un parallélogramme  $ABCD$  (fig. 156); outre les faces  $AC$ ,  $ac$  égales et parallèles, on a encore la face  $Ab$  égale et parallèle à  $Dc$ , puisque les côtés des angles  $aAB$ ,  $dDC$  sont égaux et parallèles (n° 270). De même pour les faces  $Bc$ ,  $Ad$ : c'est ce qui a fait donner le nom de *Parallélépipède* au prisme dont la base est un parallélogramme, puisque les six faces sont égales et parallèles deux à deux, en sorte que l'on peut prendre l'une quelconque pour base.

Réciproquement, le corps formé de six faces parallèles deux à deux est un parallélépipède; car les plans  $AC$ ,  $ac$  étant parallèles,  $AB$  est parallèle à  $ab$  (n° 268),  $Aa$  l'est à  $Bb$ ; la face  $Ab$  est donc un parallélogramme: de même pour  $Bc$ ,  $cd$ ...; donc le polyèdre peut être considéré comme engendré par le mouvement de  $Aa$  glissant parallèlement sur les côtés de  $ABCD$ .

Un prisme est déterminé lorsque la base  $ABC$ ... (fig. 157) et l'arête génératrice  $Aa$  sont données de grandeur et de position; donc un parallélépipède l'est (fig. 156), lorsqu'on connaît l'un de ses angles trièdres  $A$  et les longueurs des arêtes  $Aa$ ,  $AB$  et  $AD$  qui le forment.

Si l'arête  $Aa$  est perpend. à la base (fig. 166), et si cette base est un rectangle, le parallélépipède est *Rectangle*: tous ses angles y sont droits; chaque arête est perpend. aux plans qui la terminent; car on sait que trois droites  $Aa$ ,  $AD$  et  $AB$  sont perpend. entre elles, chacune l'est au plan des deux au-

ires (n° 266) ; si en outre les arêtes sont égales, le prisme est nommé *Cube*.

285. Le plan  $DdbB$  (fig. 156) qui passe par deux arêtes opposées, donne un parallélogramme dont les diagonales  $Dd$ ,  $Bb$  se coupent en deux parties égales (n° 233) ; les quatre diagonales  $Dd$ ,  $Bb$ ,  $Aa$ ,  $Cc$  se coupent donc au même point  $O$  ; car  $Bb$  coupe  $Dd$  en son milieu  $O$ , et  $Aa$  doit aussi couper  $Dd$  en deux parties égales.

286. Lorsqu'une courbe quelconque  $ACDB$  (fig. 159) tourne autour d'un axe  $AB$ , elle engendre une *Surface de révolution*. Le caractère distinctif de ces surfaces consiste en ce que, quelle que soit la courbe génératrice  $ACDB$ , tout plan perpend. à l'axe donne pour intersection une circonf. de cercle. Car la droite  $DI$  perpend. à  $AB$ , décrira dans son mouvement un plan perpend. à l'axe (n° 266, 2°.) ; de plus, le point  $D$  conservera toujours la même distance  $DI$  à cet axe.

287. Le *Cylindre* est un corps engendré par une ligne indéfinie  $Aa$  (fig. 160) qui se meut parallèlement en glissant sur une courbe quelconque  $ABCD$ . Nous regarderons ici le cylindre comme terminé par deux bases parallèles  $ABCD$ ,  $abcd$  ; la *Hauteur* est la distance entre les bases.

Inscrivons et circonscrivons des polygones à la base du cylindre : la génératrice, en glissant sur leur contour, décrit deux prismes, dont le cylindre est visiblement la limite (\*), comme sa base est la limite de leurs bases. Il est aisé de conclure de là que,

1°. Toute section faite dans un cylindre parallèlement à la base donne une courbe égale à celle de la base.

2°. L'aire d'un cylindre droit  $Ac$  (fig. 161) est le produit du périmètre de sa base par sa hauteur. Eu effet, soit  $C$  le contour

---

(\*) Cette proposition repose sur celle-ci, qui est analogue à celle du n° 172, et que nous regardons comme évidente, d'après l'idée que nous nous formons de l'étendue des aires. L'aire d'une figure plane est moindre que celle de toute surface terminée au même contour, et de deux surfaces convexes terminées à ce contour, la plus grande est celle qui enveloppe l'autre.

de la base,  $a$  l'excès du périmètre du polygone circonscrit sur  $C$ , en sorte que ce périmètre  $= C + a$ ,  $Aa = H$ ; enfin  $S$  l'aire du cylindre, et  $\beta$  l'excès de l'aire du prisme circonscrit sur  $S$ , on aura  $S + \beta = H(C + a)$ , d'où (n° 113),  $S = H \times C$ .

3°. Si le cylindre est oblique  $Ac$  (fig. 160), la section  $a'b'c'd'$  perpend. à la génératrice forme deux corps  $Ac'$ ,  $ca'$  qui rapprochés par leurs bases  $ac$  et  $AC$ , qu'on fait coïncider, donnent un cylindre droit. Ainsi, l'aire du cylindre oblique est le produit de sa génératrice  $Aa$  par le contour d'une section  $a'b'c'd'$  perpend. à  $Aa$ .

4°. Le rectangle qui a pour hauteur la génératrice d'un cylindre droit, et pour base le contour de sa base rectifiée, est égal à l'aire de ce cylindre. C'est ce que Monge nomme le *Développement* de cette surface. Lorsque le cylindre est oblique, la section perpend. à l'arête se développe suivant une ligne droite  $a'd'$  (fig. 162) à laquelle toutes les génératrices sont perpend. Si donc on élève en divers points  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ , des perpend. sur lesquelles on portera en dessus et en dessous des parties  $a'a$ ,  $a'A$ ,  $b'b$ ,  $b'B$ , .. respectivement égales aux portions de chaque génératrice, tant en dessus qu'en dessous de la section  $a'b'c'd'$  (fig. 160), on aura l'aire  $aD$ , terminée par deux courbes parallèles  $abcd$ ,  $ABCD$ , et qui sera le développement de la surface du cylindre.

5°. On ne considère dans les élémens de Géométrie que les cylindres dont la base est circulaire: l'*Axe* est la droite parallèle à la génératrice et qui passe par le centre de la base. Le *Cylindre droit* peut donc être regardé comme engendré par la révolution d'un rectangle  $A'Ooa$  qui tourne autour d'un de ses côtés  $Oo$ . Toute section faite parallèlement à la base, dans ce corps de révolution, est un cercle (1°. et n° 286) égal à cette base. L'aire est  $S = 2\pi RH$ ;  $H$  étant la hauteur et  $R$  le rayon de la base (n° 248).

288 L'aire d'une pyramide s'obtient en ajoutant les aires des triangles qui la composent: si la pyramide est régulière, l'aire est le produit du demi-contour de sa base par la perpendiculaire menée du sommet sur un de ses côtés, parce que les

triangles sont égaux, et ont pour hauteur commune cette perpend., qu'on appelle *Apothème*.

289. On nomme *Cône* le corps engendré par une droite indéfinie  $AS$  (fig. 163) assujettie à passer toujours par un point fixe  $S$ , qui est le *Sommet*, et à glisser sur une courbe donnée quelconque  $ABCD$ . Cette surface est formée de deux *Nappes* opposées, réunies en  $S$ . Nous ne traiterons ici que du cas où la base est circulaire : l'*Axe* est la ligne  $SO$  menée du sommet  $S$  au centre  $O$  de la base ; la *Hauteur* est la perpendiculaire menée du sommet sur cette base. Quand cette perpend. se confond avec l'axe, on dit que le cône est *Droit* (fig. 164), on peut le concevoir engendré par un triangle rectangle  $ASO$  qui tourne sur un côté  $SO$  de l'angle droit. *Toute section parallèle à la base d'un cône droit est un cercle* (n° 286).

290. Si l'on inscrit et circonscrit des polygones réguliers au cercle de la base d'un cône droit (fig. 164), en menant des lignes de leurs angles au sommet  $S$ , on formera des pyramides régulières, l'une inscrite, l'autre circonscrite au cône, qui sera visiblement leur limite. Il suit de là que

1°. *L'aire du cône droit SAC est le produit de la circonf. C de sa base, par la moitié de sa génératrice SA.* En effet, soit  $\alpha$  l'excès du périmètre du polygone circonscrit sur la circonf.  $C$ ; la pyramide circonscrite a pour aire  $\frac{1}{2} A(C + \alpha)$ , en désignant par  $A$  l'apothème  $SA$  qui est la génératrice. Mais soit  $S$  l'aire du cône et  $\beta$  l'excès de celle de la pyramide sur  $S$ ; on aura  $S + \beta = \frac{1}{2} A(C + \alpha)$ , d'où (n° 113)  $S = \frac{1}{2} A.C$ ; on a donc  $S = \pi AR$ ,  $R$  étant le rayon de la base.

2°. Si, avec un rayon  $SA =$  la génératrice  $A$ , l'on décrit un arc  $ABD$  (fig. 168) d'une longueur égale à la circonf. de la base, le secteur  $ASD$  aura la même aire que le cône (n° 261). Ce sera son développement; les génératrices seront les divers rayons de ce secteur.

3°. *Le cône tronqué ADda (fig. 165) a pour aire le produit de son côté Aa, par la moitié de la somme des circonférences AC, ac des bases, ou par la circonférence a'd' menée à distance égales de ces bases.* En effet, les sections  $ad$ ,  $a'd'$  sont des cercles



(n° 286); l'aire du tronc  $ADad$  est la différence des aires des cônes  $SAD$ ,  $sad$ . Si d'un même centre  $S$  (fig. 168), avec les rayons  $SA$ ,  $sa$  des génératrices de ces cônes, on décrit des arcs  $AD$ ,  $ad$ ; qu'on prenne  $ABD$  égal à la circonf.  $AC$  de la base inférieure, qu'on mène les rayons  $SA$ ,  $SD$ , l'arc  $abd$  sera égal à la circonf. supérieure  $acd$ ; car d'une part  $\frac{SA}{Sa} = \frac{ABD}{abd}$   
 $= \frac{\text{circ. } AC}{abd}$ : de l'autre (fig. 165), ce même rapport . . .

$\frac{SA}{Sa} = \frac{ABD}{abd} = \frac{\text{circ. } AC}{\text{circ. } ac}$ ; donc  $abd = \text{circ. } ac$ . Il s'ensuit que les aires des secteurs  $SABD$ ,  $SabI$  sont équivalentes à celles des deux cônes, et que l'aire  $AabdDB$  l'est à celle du tronc dont elle est le développement. Donc (n° 261) cette aire. . . .  
 $= Aa \times a''d' = Aa \times \frac{1}{2}(ad + AD)$ .

291. La *Sphère* est un corps (fig. 167) engendré par la révolution d'un demi-cercle  $ADB$  sur un diamètre  $AB$ . Dans cette révolution, un arc quelconque  $DF$  ou  $DE$  engendre une *Zone*; l'arc  $AD$  décrit une *Calotte* ou *Zone à une base*; le secteur  $ACD$  produit le *Secteur sphérique*; enfin, le segment  $ADG$  engendre le *Segment sphérique*.

Il suit de là que la surface de la sphère a tous ses points à égale distance du centre  $C$ , et que si l'on fait tourner le cercle générateur  $ADEBC$  autour d'un autre diamètre quelconque  $DH$ , il produira la même sphère. Par conséquent, tout plan qui passe par le centre coupe la sphère suivant le cercle générateur qu'on nomme un *Grand cercle de la sphère*.

Un plan quelconque coupe la sphère suivant un cercle; car, soit  $DG$  ce plan; menant le diamètre  $AB$  perpend., on peut supposer que la sphère a été engendrée autour de cet *Axe de révolution* (n° 286). Le diamètre du cercle est la corde  $DG$ ; c'est pour cela qu'on nomme *Petits cercles de la sphère* ceux dont le plan ne passe pas par le centre. La base d'un segment sphérique est un petit cercle.

292. Le plan qui n'a qu'un point commun avec la sphère s'appelle *Tangent*; toute droite menée du centre  $C$  (fig. 167)



à ce plan, étant plus longue que le rayon  $CA$  mené au point de contact, puisqu'elle ne peut atteindre ce plan qu'en sortant de la sphère; ce rayon est donc perpendiculaire au plan tangent (n° 266, 4°). Réciproquement, si la ligne  $CA$  est la plus courte ligne qu'on puisse mener du centre à un plan, ce plan n'aura que le point  $A$  commun avec la sphère et lui sera tangent, puisque toute autre ligne menée du centre  $C$  étant  $> CA$  devra sortir de la sphère.

Faisons tourner une tangente quelconque  $AT$ , ainsi que le cercle  $ADB$ , autour du diamètre  $AB$ ,  $AT$  engendrera le plan tangent à la sphère.

293. Lorsqu'un polygone  $ABDI \dots$  (fig. 169) tourne autour d'un axe  $AO$ , chaque côté  $DI$  engendre un tronc de cône dont l'aire (n° 290, 3°.) est  $DI \times \text{circ. } KL$ ;  $K$  étant le milieu de  $DI$  et  $KL$  perpend. sur l'axe  $AO$ . Il est donc bien facile d'avoir l'aire engendrée par  $ABDI \dots$

Mais si le polygone est régulier, cette aire devient plus aisée à obtenir; en effet, soit inscrit un cercle, et mené  $DG$  parallèle à l'axe  $AO$  de révolution, puis le rayon  $KC$ ; les triangles  $DIG$ ,  $LKC$  ayant leurs côtés perpendiculaires donnent  $\frac{DI}{DG} = \frac{KC}{KL}$  ou  $= \frac{\text{circ. } KC}{\text{circ. } KL}$ , d'où l'on tire, l'aire du tronc de cône engendré par  $HDIM = DI \times \text{circ. } KL = DG \times \text{circ. } KC$ . Cette aire est le produit de la circonsc. du cercle inscrit par la hauteur  $DG$  ou  $HM$  de ce tronc.

Il est visible que la même chose a lieu pour le cylindre engendré par le côté  $IP$  parallèle à  $AO$ . Quant au cône que décrit  $BA$ , son aire (n° 290, 1°.) est  $\frac{1}{2} BA \times \text{circ. } BN$ ; et les triangles semblables  $ABN$ ,  $QCA$  donnent de même  $QA \times \text{circ. } BN = AN \times \text{circ. } QC$ . Il en résulte que la somme des aires engendrées par la révolution de plusieurs côtés du polygone régulier, est égale à la circonsc. inscrite multipliée par la somme des hauteurs.

Il suffit, pour notre démonstration, que la portion de polygone générateur soit circonscriptible au cercle: or, la calotte ou la zone sphérique est visiblement la limite de l'aire engen-

écrite par une semblable partie de polygone; d'où il est facile de conclure que, 1°. l'aire de la calotte  $DAG$  (fig. 167), ou de la zone sphérique  $DFNG$  est le produit de sa hauteur  $AI$  ou  $KI$  par la circonférence d'un grand cercle. Soit  $R$  le rayon de la sphère,  $X$  la hauteur de la calotte engendrée par  $DA$ , ou de la zone écrite par l'arc  $FD$  ou  $FE$ ; on a (n° 248).

$$\text{Surface de la zone} = 2\pi RX;$$

2°. Ainsi en prenant le diamètre  $AB$  pour la hauteur  $X$ , on trouve que l'aire de la sphère est le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle, ou quadruple de l'aire d'un grand cercle; donc

$$\text{surface de la sphère} = 2R \times \text{circ. } R = 4\pi R^2.$$

ou environ  $= D \times (3 + \frac{1}{2}) D$ ,  $D$  étant le diamètre.

3°. Pour trouver le rayon de la sphère dont l'aire  $A$  est donnée, on évaluera  $R = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \sqrt{0,079578 \cdot A}$

4°. Menons les tangentes  $DE$ ,  $DG$ ,  $GF$ ,  $EF$  (fig. 170) perpend. et parallèles au diamètre  $AB$ ; le carré  $EG$  engendrera, dans sa révolution autour de  $AB$ , le cylindre circonscrit à la sphère. L'aire  $aefb'$  de la zone produite par un arc quelconque  $b'f$  est égale à celle du cylindre  $ae'e'a'$ , puisque leur valeur est la même  $= dg \times \text{cir. } AC$ . Il en serait de même du cylindre entier par le rapport de la sphère; de sorte que l'aire de la sphère est égale à celle du cylindre circonscrit. Et si l'on y comprend les bases, l'aire de la sphère est les  $\frac{2}{3}$  de celle du cylindre, puisque les deux bases étant des grands cercles, l'aire entière du cylindre en vaut 6, et celle de la sphère 4.

5°. Le triangle équilatéral  $HIK$  (fig. 170), dans sa révolution autour de  $HB$ , engendre le cône circonscrit à la sphère. La droite  $IC$  coupe par la moitié l'angle  $HIB$ , qui est les  $\frac{2}{3}$  d'un droit (n° 164, 1°.); l'arc  $Bi$  est donc le  $\frac{1}{3}$  de la circonf., et la corde  $Bi$  est le côté de l'hexagone  $= CB = R$ ; le triangle  $HBi$  est isocèle,  $Hi = Bi = R$ , et  $IC = 2R$ . Ainsi, dans le triangle  $CIB$ , on a  $IB^2 = IC^2 - CB^2 = 3R^2$ ,  $IB = R\sqrt{3}$ , l'arc  $IB = 2\pi R\sqrt{3}$  (n° 248); enfin l'aire du cône (n° 290)

## GÉOMÉTRIE.

293. On a vu l'un des grands cercles, et double de sa surface  $\pi R^2$  : l'aire totale du cône est  $3\pi R^2$ . En y comparant les aires, l'aire du cylindre est 6 grands cercles, celle du cône  $3$ , et celle de la sphère  $4$ , c.-à-d. que l'aire du cylindre est moyenne proportionnelle entre les aires de la sphère et du cône circonscrit.

Cette proposition se vérifie de même pour le cône et le cylindre inscrits à la sphère, ou engendrés par le carré et le triangle équilatéral inscrits au cercle générateur; l'aire totale du cylindre  $= 3\pi R^2$ , celle du cône  $= \frac{3}{2}\pi R^2$ , et celle de la sphère  $4\pi R^2$ .

### *Des Corps semblables et symétriques.*

294. On dit que deux tétraèdres sont semblables, quand ils ont deux faces semblables, placées de la même manière, et formant un angle dièdre égal. Tels sont les deux tétraèdres  $S$  et  $S'$  (fig. 171), lorsque  $S'AC'$  est semblable à  $SAC$ ,  $B'S'A'$  à  $BSA$ , et l'angle dièdre  $B'S'A'C' = BSA$ .

Les arêtes homologues des tétraèdres semblables sont proportionnelles, toutes les faces sont semblables, les angles dièdres sont respectivement égaux, ainsi que les angles trièdres homologues. En effet, plaçons le triangle  $C'S'A'$  sur  $CSA$ , en faisant coïncider les angles égaux  $S$  et  $S'$ ,  $A'C'$  tombera en ac parallèlement à  $AC$ , à cause des angles égaux  $S'A'C'$  et  $SAC$ . De plus, la face  $B'S'A'$  se couchera sur  $BSA$ , en vertu de l'égalité des angles dièdres; enfin, l'angle  $B'S'A'$  étant  $= BSA$ ,  $S'A'$  tombera sur  $Sb$ , et  $B'A'$  suivant  $ab$  parallèle à  $AB$ . Le tétraèdre  $S'$  sera donc placé en  $Sabc$ , les plans  $ABC$ ,  $abc$  sont parallèles, et les angles dièdres homologues sont égaux (n° 270). On voit donc

1° Qu'un tétraèdre  $SABC$  coupé par un plan  $abc$  parallèle à l'une de ses faces  $ABC$ , forme un tétraèdre semblable au précédent;

2° Que les faces  $ABC$ ,  $abc$  sont semblables, puisque le plan  $abc$  est parallèle à  $ABC$  (n° 277, 270),

3°. De même pour  $SBC$ ;  $sbc$ .

Réciproquement, si les arêtes homologues de deux tétraèdres sont proportionnelles, ou si les quatre triangles sont respectivement semblables (l'une des conditions emporte l'autre), les angles plans en  $S$  et  $S'$  étant égaux, les angles dièdres le sont aussi (n° 281); donc les tétraèdres sont semblables.

295. Deux polyèdres sont dits semblables, lorsqu'en menant de deux angles solides homologues des diagonales à tous les autres angles, les corps sont décomposés en tétraèdres semblables et disposés dans le même ordre.

Toute pyramide  $SAC$  (fig. 151) coupée par un plan  $ac$  parallèle à sa base, donne une autre pyramide  $Sac$  semblable à  $SAC$ , leurs arêtes sont proportionnelles, les angles dièdres et polyèdres respectifs sont égaux. En effet, les tétraèdres  $SABE$   $sabe$  semblables, donnent les triangles  $SEB$ ,  $seb$  semblables, et l'angle dièdre  $ASEB = aSeb$ , mais comme l'angle dièdre  $ASED = aSed$ , en retranchant, on trouve que l'angle dièdre  $BESD = beSd$ . Donc les tétraèdres  $SBED$ ,  $sbed$  sont semblables, etc. (n° 277, 281).

Réciproquement, les pyramides  $S'A'B'C'$ ....,  $SABC$ ...., formées de faces semblables et disposées dans le même ordre sont semblables; car les angles trièdres qui composent les bases étant formés d'angles plans égaux, sont égaux; donc les angles dièdres homologues le sont aussi (n° 281). D'ailleurs les angles plans égaux en  $S$  et  $S'$  permettent de faire coïncider  $S'A'D'$  en  $Sad$ . Enfin, les arêtes étant proportionnelles par supposition, les plans  $AD$ ,  $ad$  sont parallèles.

296. Soient la pyramide  $SAC$  (fig. 151) et le corps  $S'A'C'$  formé de tétraèdres  $S'A'B'E'$ ,  $S'E'B'D'$ ,  $S'B'C'D'$  semblables à  $SABE$ ,  $SEBD$ ...; le polyèdre  $S'A'C'$  sera une pyramide semblable à  $SAC$ ; car, puisque les angles  $AEB$ ,  $BED$ ,  $AED$  sont dans un même plan et égaux à  $A'E'B'$ ,  $B'E'D'$ ,  $A'E'D'$ ,

on a

$$AED = AEB + BED,$$

d'où

$$A'E'D' = A'E'B' + B'E'D';$$

ce qui prouve que ces derniers angles sont aussi dans le même



plan, puisque, s'ils formaient un angle trièdre, on aurait (n° 279)  $\angle A'E'D' < \angle A'E'B' + \angle B'E'D'$ . On voit que ce plan passe aussi par  $B'C'D'$ .

Il suit de là que, 1°. deux polyèdres semblables sont décomposés en pyramides semblables par les plans qui passent suivant les diagonales menées de deux angles polyèdres homologues à tous les autres.

2°. Si d'un point intérieur quelconque, on mène des lignes à tous les angles, et qu'on les prolonge proportionnellement à leur longueur, les plans menés par les extrémités de ces lignes seront parallèles aux faces du polyèdre proposé, et en formeront un autre qui lui sera semblable. On trouve ici l'analogie du théorème 244.

297. Deux polyèdres semblables ont leurs faces semblables, leurs arêtes homologues proportionnelles, leurs angles dièdres égaux, ainsi que leurs angles polyèdres. Pour s'en convaincre, il suffit de mener, de deux angles homologues (fig. 172), les diagonales qui décomposent les corps en pyramides semblables; les angles polyèdres et dièdres de ces pyramides seront égaux, leurs faces seront semblables: or les faces des polyèdres servent de bases à ces pyramides, dont les angles dièdres et polyèdres constituent, par leur système, ceux des corps proposés.

Réciproquement, si deux polyèdres ont les faces semblables et disposées dans le même ordre, et les angles dièdres égaux, ils sont semblables; car les angles polyèdres sont égaux, comme décomposables en angles trièdres égaux (n° 281). Faisons donc coïncider l'un de ces angles polyèdres avec son homologue, les autres faces seront respectivement parallèles. De plus, la similitude des faces donne les lignes homologues proportionnelles; leurs aires sont donc entre elles comme les carrés de ces lignes; ce qui prouve que les diagonales de l'un des corps sont le prolongement de celles de l'autre (n° 278): ces corps sont donc formés de pyramides semblables.

298. Des lignes qui joignent quatre angles polyèdres homo-



logues  $ABCD$ ,  $abcd$  (fig. 172) de deux corps semblables étant proportionnelles, forment des tétraèdres semblables (n° 294). Il en résulte que si des angles  $ABC$ ,  $abc$  de triangles homologues, on mène des lignes à tous les angles  $DEF$ ... ,  $def$ ... de deux polyèdres semblables, les tétraèdres ainsi formés seront semblables; ceci est analogue au n° 242, 4°.

Réciproquement, deux polyèdres sont semblables, lorsque leurs angles étant joints aux trois angles homologues  $ABC$ ,  $abc$ , les tétraèdres ainsi formés sont respectivement semblables. En effet, si les tétraèdres  $DABC$ ,  $dabc$  sont semblables, ainsi que  $EABC$ ,  $eabc$  les angles dièdres  $DACB$ ,  $EACB$  seront égaux à  $dacb$ ,  $eaeb$  : ainsi l'angle dièdre  $DACE = dace$ . D'ailleurs les faces  $DAC$ ,  $dac$  de nos tétraèdres sont semblables ainsi que  $EAC$ ,  $eac$  : donc les tétraèdres  $EACD$ ,  $eacd$  sont semblables, et on a  $\frac{DE}{de} = \frac{AC}{ac}$  (n° 294).

Soient  $F$ ,  $f$ ,  $I$ ,  $i$  des angles homologues; on aura de même  $\frac{FE}{fe} = \frac{AC}{ac}$  et  $\frac{DF}{df} = \frac{AC}{ac}$  : ainsi, les corps ont leurs lignes homologues proportionnelles, et les triangles  $DFE$ ,  $dfe$  homologues sont semblables : de plus, leurs angles dièdres sont égaux, puisque  $IDF$  est semblable à  $idf$ ,  $IFE$  à  $ife$ , d'où l'angle  $IFD = ifd$ ,  $IFE = ife$ ,  $DFE = dfe$ . En outre, si les points  $DIFE$  sont dans le même plan, l'équation.....  $IFE = IFD + DFE$  se change en  $ife = ifd + dfe$  : d'où il suit que les points  $e$ ,  $f$ ,  $i$  étant aussi dans un même plan, les faces des polyèdres sont semblables : enfin les angles polyèdres sont égaux, comme composés d'angles trièdres égaux (281, 4°). Ainsi les corps sont semblables (n° 297).

299. Lorsque deux polyèdres sont semblables, les aires de leurs faces sont comme les carrés des lignes homologues de ces polyèdres; mais comme ces lignes sont proportionnelles, on a une suite de rapports égaux, formés par les faces homologues, d'où l'on conclut (comme n° 262, II) que les aires totales des polyèdres semblables sont entre elles comme les carrés de leurs arêtes homologues.

On verra aisément que les surfaces de cônes ou de cylindres semblables, c.-à-d. engendrées par deux triangles ou deux rectangles semblables, sont entre elles comme les carrés de leurs génératrices. En effet les circonfs  $C$  et  $c$  des bases sont proportionnelles aux génératrices  $A$  et  $a$ ; les aires  $S$  et  $s$  le sont à  $C \times A$  et  $c \times a$  (n° 287, 5°, et 290, 1°.),

$$\text{d'où } \frac{S}{s} = \frac{C.A}{c.a}, \quad \frac{C}{c} = \frac{A}{a}; \text{ donc } \frac{S}{s} = \frac{A^2}{a^2}.$$

De même les aires des sphères sont comme les carrés de leurs rayons, puisqu'elles valent quatre grands cercles

300. Lorsque deux polyèdres sont tels, qu'on peut les placer l'un en dessus, l'autre en dessous d'un plan  $MN$  (fig. 173), de sorte que les sommets des angles polyèdres  $A, a, B, b, \dots$  soient, deux à deux, à égale distance de ce plan, et sur une perpend.  $Aa, Bb, \dots$  à ce plan, ces deux polyèdres sont appelés *Symétriques*.  $B$  étant un angle polyèdre du premier corps, en menant  $BQ$  perpend. au plan  $MN$ , et prenant  $QB = Qb$ ,  $b$  sera l'angle homologue du second polyèdre.

Les polyèdres symétriques ont toutes les parties constituantes égales. Pour le prouver, plions le trapèze  $ABPQ$  suivant  $PQ$ , les lignes  $AP, aP$  égales et perpend. sur  $MN$  coïncideront, ainsi que  $BQ$  et  $Bq$ ; d'où  $AB = ab$ : donc les lignes homologues sont égales.  $D, d, C, c$  étant des angles polyèdres symétriques, on aura  $BC = bc$ ,  $AC = ac$ ; ainsi, le triangle  $ABC = abc$ ; les triangles homologues sont donc égaux. De plus, le triangle  $ADC = adc$ ,  $BDC = bdc$ : ainsi l'angle  $DCB = dcB$ ,  $ACD = acd$ ,  $ACB = acb$ . Or,

1°. Si les plans de ces triangles forment en  $C$  et  $c$  des angles trièdres, ils seront égaux: donc les angles dièdres et trièdres homologues sont égaux. Il en est de même des angles polyèdres, puisqu'ils sont formés d'angles trièdres égaux disposés dans le même ordre.

2°. Si les points  $ABCD$  sont dans le même plan, comme l'angle  $DCB = ACD + ACB$ , on a  $dcB = acd + acb$ ; d'où il suit que les points  $abcd$  sont aussi dans le même plan (n° 279).

donc les faces homologues sont égales, comme formées de triangles égaux semblablement placés.

301. Tout parallélépipède  $ACc$  (fig. 174) est formé de deux prismes triangulaires symétriques  $ABd$ ,  $BCd$ ; les angles dièdres opposés sont égaux, et les angles trièdres opposés sont symétriques. En effet, les deux corps  $Aabd$ ,  $Ccbd$  sont visiblement des prismes (n° 282); la base  $BDC$  ou  $bdc$  de l'un sera égale à  $ABD$ . Rapprochons ces prismes triangulaires, en faisant coïncider  $bdc$  avec  $ABD$ , savoir  $bc$  avec  $AD$ , et  $dc$  avec  $AB$ ;  $Ccbd$  prendra la situation  $AEHI$ . Or, les perpend.  $aF$ ,  $Cf$  sur les bases sont égales (n° 268), 2° on a de plus  $Aa = Cc$  et l'angle  $AaF = cCf$ ; ainsi, le triangle  $AaF = cCf$ , d'où  $AF = cf$ . Par une raison semblable,  $fb = DF$ ; ainsi les triangles égaux  $ADF$ ,  $bcf$  coïncident, et le point  $f$  tombant en  $F$ ,  $fC$  se porte en  $FE$  sur le prolongement  $FE$  de  $aF$ . Donc le sommet  $E$  ou  $C$  est symétrique de  $a$ : on verra de même que  $I$ , ou  $B$ , l'est de  $d$ ; et  $H$  ou  $D$ , l'est de  $b$ .

### III. DES VOLUMES.

302. Former un prisme droit équivalent à un prisme oblique  $AD$  (fig. 176), la génératrice conservant la même longueur  $AC$ . Prolongeons les arêtes  $CA$ ,  $DB$ , menons-leur un plan quelconque  $MN$  perp.; enfin prenons  $Pp = BD$ , menons le plan  $op$  parallèle à  $MN$ , on aura ainsi le prisme droit  $Op$ . Appliquons les prismes tronqués  $BAOF$ ,  $DCop$ , de manière à coucher la base  $op$  sur  $OP$  qui lui est égale: les génératrices étant perpend. aux bases, et de plus égales (puisque  $DB = Pp$  donne  $BP = pD$ , et ainsi des autres), les prismes coïncideront, ou  $oD = OB$ . Retranchant la partie commune  $Ap$ , il reste le prisme oblique  $AD$  équivalent au prisme droit  $Op$ .

303. On peut toujours disposer deux prismes symétriques,  $AD$ ,  $ad$  (fig. 176) relativement à un plan  $MN$ , en sorte que ce plan soit perpend. aux génératrices. Prolongeons l'arête  $DB$

en  $Pd$ ; puis, à partir du point  $P$  de rencontre avec un plan quelconque  $MN$  perpend., prenons  $Pb = PB$ ,  $Pd = PD$ , on  $BD = bd$ . En raisonnant de même pour chaque arête, on formera le prisme  $ad$  symétrique à  $AD$ .

Les prismes symétriques  $AD$ ,  $ad$  sont équivalens. Car prenons  $Pp = Pp' = BD$ , et menons les plans  $op$ ,  $o'p'$  parallèles à  $MN$ ; les prismes  $OPop$ ,  $OPo'p'$  sont droits et équivalens aux proposés (n° 302). De plus, ils sont égaux entre eux, puisqu'en les appliquant, de sorte que la base  $o'p'$  de l'un tombe sur celle  $OP$  de l'autre qui lui est égale, il y aura coïncidence.

304. Deux parallélépipèdes de même hauteur et de même base sont équivalens. Pour le démontrer, rapprochons ces corps de manière à faire coïncider leurs bases inférieures égales; les supérieures seront situées dans le même plan: il se présentera deux cas.

1°. Si les faces latérales  $FG$ ,  $EK$  (fig. 175) sont dans un même plan, les triangles égaux  $EGH$ ,  $FIK$  servent de bases à deux prismes superposables  $EHM$ ,  $FIN$ . Donc, en retranchant tour à tour ces prismes du corps entier  $EN$ , il restera les parallélépipèdes équivalens  $EFIM$ ,  $EHNL$ .

2°. Si les faces ont une disposition quelconque, les bases supérieures  $AC$ ,  $ac$  (fig. 178) seront des parallélogrammes égaux à ceux des bases inférieures  $MN$ , en sorte que les lignes  $AB$ ,  $DC$ ,  $ab$ ,  $dc$  seront égales et parallèles; de même pour  $AD$ ,  $BC$ ,  $ad$ ,  $bc$ . Prolongeons ces lignes, nous aurons le parallélogramme  $A'C'$  égal à  $AC$  et à  $ac$ . Or, concevons le parallélépipède qui aurait pour base supérieure  $A'C'$ , et la même base inférieure  $MN$  que les proposés; ce corps sera équivalent à chacun de ceux-ci, puisqu'il sera, relativement à eux, dans l'état examiné ci-dessus. Les proposés sont donc équivalens.

305. Il est facile de changer un parallélépipède donné en un autre rectangulaire équivalent: de chaque angle de la base inférieure  $ABCD$  (fig. 177), élevons des perpendiculaires à son plan: on aura un parallélépipède droit  $ABEI$  équivalent au proposé, qu'il était inutile de tracer dans la fig. Puis, menant



$AF$ ,  $BG$ , perpend. sur  $AB$  dans la base  $AC$ , on formera sur  $AG$  le parallélépipède rectangle  $ABHK$  équivalent à  $ABEI$ , puisqu'il a même base  $AM$  et même hauteur  $AF$ .

306 Deux parallélépipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs. Si ces hauteurs ont une commune mesure, on coupera les corps en tranches égales, et l'on raisonnera comme pour les rectangles (n° 250, 1°, fig. 126). On démontrera de même le théorème pour le cas où les hauteurs sont incommensurables.

Les parallélépipèdes rectangles  $P$  et  $p$  de même hauteur, sont entre eux comme leurs bases. En effet, plaçons ces corps de manière à faire coïncider l'un de leurs angles polyèdres et leur arête égale. Les bases seront disposées comme  $AC$  (fig. 179) pour  $P$ , et  $AK$  pour  $p$ ; or, prolongeons  $IK$  en  $H$ ; le parallélépipède  $Q$  construit sur la base  $AH$  et de même hauteur, peut être regardé comme ayant  $AI$  pour hauteur, et la face  $AB$  pour base: comparé à  $P$ , il donne donc  $\frac{P}{Q} = \frac{AD}{AI}$ . Mais si l'on prend la face  $AIGF$  pour base des parallélépipèdes  $Q$  et  $p$ , leurs hauteurs seront  $AE$  et  $AL$ , d'où  $\frac{Q}{p} = \frac{AE}{AL}$ . En multipliant ces proportions, il vient  $\frac{P}{p} = \frac{AD \times AE}{AI \times AL} = \frac{\text{base } AC}{\text{base } AK}$ .

Enfin, les parallélépipèdes rectangles  $P$  et  $p$  sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs. Car si les bases sont  $AC$  et  $AK$ , et les hauteurs  $AG$  et  $AO$ , en prolongeant les faces de celui qui a une hauteur moindre, tel que  $p$ , jusqu'à la base supérieure de l'autre, on formera un parallélépipède  $ALFKG = R$ , qui aura la même hauteur  $H$  que l'un  $P$ , et même base  $AK$  que l'autre  $p$ , on aura donc d'une part  $\frac{R}{P} = \frac{AG}{AO}$ , et  $\frac{P}{R} = \frac{AC}{AK}$  de l'autre; d'où  $\frac{P}{p} = \frac{AC \times AG}{AK \times AO}$ .

En désignant par  $H$ ,  $I$ ,  $K$  les arêtes qui forment un angle trièdre  $A$  de  $P$ , et par  $h$ ,  $i$ ,  $k$  celles de  $p$ , on a  $\frac{P}{p} = \frac{H.I.K}{h.i.k}$ .



On voit donc que pour mesurer le volume d'un parallélép. rect.  $P$ , c.-à-d. pour trouver son rapport avec un autre  $p$  pris pour unité (n° 36, 71), on cherchera les rapports  $\frac{H}{h}$ ,  $\frac{I}{i}$ ,  $\frac{K}{k}$  entre les arêtes respectives qui forment un angle trièdre, et l'on multipliera ces trois nombres. Représentons par  $l$  le produit de ces trois rapports;  $l$  est un nombre abstrait, et le parallélépipède qu'il s'agit de mesurer a pour volume  $l$  fois celui du parallélépipède pris pour unité.

*Le volume d'un parallélépipède est le produit de sa base par sa hauteur, quand on prend, pour unité de volume, le cube qui a pour côté l'unité linéaire.* car  $h$ ,  $i$  et  $k$  seront  $= 1$ , et l'on aura  $H.I.K$  pour le volume de  $P$ ;  $H$ ,  $I$  et  $K$  sont des nombres abstraits, qui marquent combien les arêtes de notre parallélépipède  $P$  contiennent de fois l'unité linéaire; soit  $l$  leur produit  $H.I.K$ , l'équ.  $P = H.I.K$  revient à  $P = l$  fois le cube pris pour unité de volume.

Lorsque  $H = I = K$ , on a  $P = H^3$ ; de là la dénomination de *Cube* donnée aux troisièmes puissances.

307. Donc, le volume d'un prisme est le produit de sa base par la hauteur : car, 1°. s'il s'agit d'un parallélépipède quelconque, il est équivalent à celui qui est rectangle de même hauteur et de base équivalente (n° 304).

2°. Si le prisme est triangulaire, comme  $ABDabd$  (fig. 174), en formant le parallélépipède  $Ac$ , le volume de notre prisme est égal à son symétrique  $BDCbdc$  (n° 303) : donc, chacun de ces prismes a pour volume le produit de sa hauteur par la moitié de la base  $AC$ , ou plutôt par sa base  $ABD$ .

3°. Enfin, si l'on fait passer des plans par la génératrice  $Aa$  (fig. 157) du prisme  $Ad$  et par toutes les autres, il sera décomposé en prismes triangulaires de même hauteur; la somme de leurs volumes sera donc le produit de cette hauteur par la somme des bases, ou par  $ABCDE$ .

On voit aussi que les volumes des prismes de même base sont comme les hauteurs, ou de même hauteur, sont comme leurs bases.

308. Le volume  $V$  d'un cylindre est le produit de sa hauteur  $H$  par l'aire  $B$  de sa base. En effet, désignons par  $\beta$  l'excès de la base du prisme circonscrit sur celle du cylindre, et par  $\alpha$  l'excès du volume de ce prisme sur celui  $V$  du cylindre :  $B + \beta$  sera la base du prisme,  $V + \alpha$  son volume; d'où  $V + \alpha = (B + \beta) H$ ; donc  $V = BH$ , puisque le volume du cylindre est la limite de celui du prisme (n° 113).

309. Les pyramides de même hauteur et dont les bases sont équivalentes, sont égales en volume. Pour le prouver, coupons un tétraèdre par des plans parallèles à sa base et équidistans. Soit  $ACcbbA$  (fig. 180) l'une des tranches : menons par les points  $A, C, a, c$  des parallèles à l'arête  $Bb$ ; nous formerons deux prismes, l'un  $BDFcbb$  intérieur, l'autre  $BACcbb$  extérieur au tronc : la différence de ces prismes est le prisme  $DCca$ , qui a même hauteur, et dont la base  $CFDA$  est la différence entre les bases  $ABC, abc$ .

En opérant de même pour chaque tranche, on aura une série de prismes d'égale hauteur, tels que  $De$ . Or, il est visible qu'en partant de la base du tétraèdre, chaque prisme intérieur  $DFbb$  est égal au prisme extérieur de la tranche suivante; ainsi, en prenant la différence entre tous les prismes intérieurs et tous les extérieurs, il ne reste que les prismes  $DCca$ , depuis la 1<sup>re</sup> tranche  $MN$  : cette différence est donc un prisme de même hauteur que les tranches, et qui a pour base celle  $BMN$  du tétraèdre. Plus les tranches sont nombreuses, et plus la hauteur devient petite; on peut donc rendre aussi petite qu'on voudra la différence entre les prismes intérieurs et extérieurs, et, à plus forte raison, entre les prismes intérieurs et le tétraèdre.

Il est évident que ce raisonnement peut se faire également pour toute pyramide à base quelconque.

Cela posé, soient maintenant deux pyramides  $P$  et  $p$  de même hauteur, dont les bases équivalentes reposent sur le même plan : coupons-les par une série de plans parallèles à ces bases et équidistans, puis formons pour chacune les prismes intérieurs. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les excès des pyramides sur la somme des prismes intérieurs, dont les volumes sont  $P - \alpha$  et  $p - \beta$ . Or, chaque

plan parallèle aux bases des pyramides donne des sections équivalentes, puisque ces sections sont entre elles comme les bases (n° 278) : donc, les prismes intérieurs sont égaux deux à deux, d'où  $P - a = p - \beta$ , et (n° 113)  $P = p$ .

Le même théorème a lieu pour deux troncs formés dans ces pyramides par deux plans parallèles.

310. Un tétraèdre  $DABC$  (fig. 183) est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur : car, sur les trois arêtes formons le prisme  $AE$  ; en ôtant le tétraèdre  $DABC$ , il reste la pyramide quadrangulaire  $DACEF$ . Le plan  $CDF$  en forme deux tétraèdres : l'un  $FDEC$ , qui est égal au proposé, comme ayant même hauteur et la base  $FDE = ABC$  ; l'autre  $DACF = DFCE$ , par la même raison, attendu que le triangle  $AFC = EFC$ . Nos trois tétraèdres étant équivalents, chacun est le tiers du prisme.

Donc, le volume de toute pyramide est le produit du tiers de sa base par sa hauteur, puisqu'elle est décomposable en tétraèdres.

Et comme le cône est la limite des pyramides circonscrites, le volume du cône est le tiers de sa base multipliée par sa hauteur, ou le tiers du cylindre de même base et de même hauteur.

On aura le volume d'un polyèdre quelconque en le décomposant en pyramides.

311. Le volume du tronc de prisme triang.  $ABEF$  (fig. 184) est le produit de la base par le tiers des trois hauteurs des angles trièdres  $F, D, E$  de la base supérieure. En effet, faisons les mêmes sections sur ce tronc  $ABEF$  qu'au n° 310 ; le plan  $ADC$  donne le tétraèdre  $DABC$  ; le plan  $DCF$  coupe la pyramide quadrangulaire  $DACEF$  en deux tétraèdres  $DFCA, DFCE$ . Or, on peut, sans changer les bases  $AFC, EFC$ , mettre les sommets de ceux-ci en  $B$ , puisque  $DB$  est parallèle au plan  $ACEF$  (n° 269). Donc on aura les tétraèdres  $BCAF, BCEF$  ; ce dernier peut même prendre  $CEA$  pour base, puisque les triangles  $CEF$  et  $CEA$  sont équivalents. Le tronc de prisme est donc formé des trois tétraèdres  $DABC, FABC, EABC$ , qui ont même base inférieure  $ABC$ , et leurs sommets aux trois angles

de  $FDE$  de la base supérieure; donc, etc. . . Ce théorème permet de trouver le volume du prisme tronqué à base quelconque.

Le tronc de pyramide quelconque à bases parallèles est composé de trois pyramides de même hauteur que le tronc, dont deux ont pour bases la base inférieure du tronc, la base supérieure et une base proportionnelle entre ces deux aires. Soient une pyramide et un tétraèdre de même hauteur, de bases équivalentes, coupés par le même plan; leurs volumes sont égaux. Un plan parallèle aux bases forme deux troncs, et coupe le tétraèdre et la pyramide suivant un triangle et un polygone qui sont équivalents, et ils sont proportionnels aux bases (278): donc la pyramide et le tétraèdre retranchés étant égaux, les troncs le seront. Il reste à démontrer le théorème pour le tronc de tétraèdre (fig. 185).

Un plan  $ADC$  donne les deux corps  $DABC$  et  $DACEF$ : le plan  $DFC$  forme les tétraèdres  $DFEC$  et  $DFAC$ ; or, menant un plan parallèle à  $AF$ , ce dernier pourra avoir son sommet en  $G$ , au-dessus de  $D$ , et deviendra  $FAGC$ . Ces trois tétraèdres ont même hauteur que le tronc; leurs bases sont  $ABC$ ,  $DFE$ ,  $AGC$ . Cela donne (n° 256. 2°.)  $\frac{ABC}{AGC} = \frac{AB}{AG} \cdot \frac{AGC}{FDE} = \frac{AC}{FE}$ : or les seconds membres sont égaux à cause des triangles semblables  $ABC$ ; donc  $\frac{ABC}{AGC} = \frac{AGC}{FDE}$ . Donc, etc.

Soient  $A$  et  $B$  les bases d'un tronc de pyramide,  $H$  sa hauteur; on a pour le volume  $\frac{1}{3} H(A + B + \sqrt{AB})$ .

Il est visible que ce théorème a également lieu pour le tronc de cône. Soient  $R$  et  $r$  les rayons des bases,  $A = \pi R^2$ ,  $B = \pi r^2$ ,  $H$  la hauteur du tronc de  $\frac{1}{3} \pi H(R^2 + r^2 + Rr)$ .

Tout triangle  $ABC$  (fig. 186, 187, 188 et 189), qui est tourné autour d'une ligne quelconque  $CI$  située dans son plan et qui passe par un de ses sommets  $C$ , engendre un volume égal au tiers du produit de la perpend.  $CD = p$  abaissée de ce sommet sur la base  $AB$ , multiplié par la surface engendrée par celle-ci.



1<sup>er</sup> cas. Le triangle  $CAB$  tourne autour de l'un de ses côtés  $CB$  (fig. 188 et 189). On a vol.  $CAB = \text{cône } CAP + \text{cône } BAP$  (v. n° 310), ou  $= \frac{1}{3}$  cercle  $AP \times CB = \frac{1}{3} \pi AP^2 \times CB$  : or  $AP \times CB = 2$  fois aire  $ABC = AB \times CD$ , donc . . . . . vol.  $CAB = \frac{1}{3} \pi p. AP \times AB$ ; et comme la surface du cône engendré par  $AB$  est  $= \frac{1}{3}$  circ.  $AP \times AB = \pi AP \times AB$ , on a vol.  $CAB = \frac{1}{3} p \times \text{surf. } AB$ . Cette démonstration convient aux trois cas où l'angle  $A$  est aigu, droit ou obtus.

2<sup>e</sup> cas. Le triangle  $CAB$  tourne autour d'une ligne extérieure  $CI$  (fig. 186); vol.  $CAB = \text{vol } CAI - \text{vol. } BCI = \frac{1}{3} p (\text{surf. } AI - \text{surf. } BI) = \frac{1}{3} p. \text{surf. } AB$ .

3<sup>e</sup> cas. La base  $AB$  est parallèle à l'axe  $CI$  de rotation (fig. 187): vol.  $CAB = \text{cylind. } ABEF + \text{cône } CAE - \text{cône } CBF$  ou  $= \text{cercle } CD (AB + \frac{1}{3} CE - \frac{1}{3} CF) = \dots \dots \dots \frac{1}{3} \pi CD^2 (3EF + CE - CF) = \frac{1}{3} \pi CD^2 \times 2EF$  : or la surface engendrée par  $AB$  est celle d'un cylindre, et  $= \text{circ. } CD \times EF = 2\pi CD \times EF$ ; donc vol.  $CAB = \frac{1}{3} CD \times \text{surf. } AB$ .

Ce théorème sert à trouver les volumes de la sphère, du secteur et du segment sphériques; car si l'on circonscrit à l'arc de cercle  $ADP$  (fig. 169) une portion de polygone à côtés égaux et qu'on fasse tourner la fig. autour du diamètre  $AO$ , la révolution complète de tous les triangles  $CAB$ ,  $CBD$ ,  $CDI$ . . . . . engendrera un volume  $= \frac{1}{3} p (\text{surf. } AB + \text{surf. } BD + \dots)$ . Ainsi ce volume est le produit de la surface engendrée par tous les côtés du polygone, multipliée par le tiers du rayon. Donc

1<sup>o</sup>. Si le polygone est circonscrit au demi-cercle  $ADB$  (fig. 169) de rayon  $R$ , désignons par  $\alpha$  l'excès de l'aire  $P$  de la sphère sur celle qu'engendre le polygone, par  $\beta$  l'excès du volume  $V$  de la sphère sur celui que forme le polygone; on a . . . . .  $V + \beta = \frac{1}{3} R (P + \alpha)$ ; d'où l'on tire (n° 113)  $V = \frac{1}{3} R \times P$ . Le volume de la sphère est le produit de sa surface multipliée par le tiers de rayon, ou celui de l'aire d'un des grands cercles par les  $\frac{1}{3}$  du rayon (n° 293, 2<sup>o</sup>.), ou enfin

Volume  $V$  de la sphère  $= \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{6} \pi D^3 = 0,5236 D^3$  .  
 $D$  étant le diamètre  $2R$ .



2°. Le rayon  $R$  de la sphère qui a  $V$  pour volume est

$$R = \sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)} = \sqrt[3]{kV}, \quad \log k = 1.3779114$$

3°. Pour le secteur sphérique DAC, le même raisonnement prouve que le volume est égal à la surface de la calotte multipliée par le tiers du rayon, ou (n° 293, 1<sup>re</sup>), la flèche  $Al$  étant  $h$ ,

$$\text{Volume du secteur sphérique} = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

4°. Si l'on retranche le cône DGC du secteur, le reste est le segment sphérique ADIG; or le volume du cône DGC est  $= \frac{1}{3} CI \times \text{cercle } DI = \frac{1}{3} CI \times \pi DI^2$ ;  $CI = R - h$ , .....  $DI^2 = DC^2 - CI^2 = 2Rh - h^2$ ; donc

$$\text{Volume du segment sphérique} = \frac{2}{3} \pi h^2 (3R - h).$$

5°. Le cylindre DCFE (fig. 170) et le cône HIK circonscrits à la sphère AB ont pour volumes, savoir, 1°. le cylindre  $= \pi R^2 \times 2R$  ou  $2\pi R^3$ ; 2°. le cône ( $V$ . n° 293)  $3\pi R^2 \times \frac{1}{3} HB$ , et comme  $HB^2 = HI^2 - IB^2 = \frac{4}{3} HI^2$ , on trouve  $HB = 3R$ , et cône  $= 3\pi R^3$ . Comparant les quantités  $\frac{4}{3} \pi R^3$ ,  $2\pi R^3$  et  $3\pi R^3$ , on voit qu'elles sont entre elles comme 4 : 6 : 9; ce sont les rapports des volumes de la sphère, du cylindre et du cône circonscrits; le cylindre est moyen proportionnel entre les deux autres; la sphère est les deux tiers du cylindre circonscrit.

314. Les volumes de deux pyramides sont entre eux comme les produits des hauteurs par les aires des bases (n° 310). Mais si ces pyramides SAC, Sac (fig. 151) sont semblables, on a

$$\frac{ABC....}{abc.....} = \frac{SH^3}{Sh^3} \text{ (n° 278); multipliant de part et d'autre par}$$

$$\frac{SH}{Sh}, \text{ il vient } \frac{SABC....}{Sabc.....} = \frac{SH^3}{Sh^3}.$$

315. Les volumes des polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs lignes homologues. En effet, comme deux polyèdres semblables  $P, p$ , sont décomposables (n° 295) en pyramides semblables  $S, s, S', s', \dots$ , en désignant par  $A, a, A', a'$  des lignes homologues de ces pyramides, on a

$\frac{S}{s} = \frac{A^2}{a^2}$ ,  $\frac{S'}{s'} = \frac{A'^2}{a'^2}$ , ... D'ailleurs tous ces rapports sont égaux, puisqu'en vertu de la similitude supposée, on a  $\frac{A}{a} = \frac{A'}{a'} = \dots$

Avec  $\frac{S}{s} = \frac{S'}{s'} = \frac{S''}{s''} = \dots = \frac{A^2}{a^2}$ ; d'où (n° 11, 3°.)

$$\frac{S + S' + S'' + \dots}{s + s' + s'' + \dots} = \frac{P}{p} = \frac{A^2}{a^2}.$$

Il sera aisé de voir que les volumes des sphères sont entre eux comme les cubes de leurs rayons; que ceux des cylindres droits et des cônes droits semblables (c.-à-d. engendrés par des rectangles ou des triangles rectangles semblables) sont entre eux comme les cubes des longueurs de leurs génératrices, ou de leurs hauteurs, ou enfin des rayons de leurs bases.

Les polyèdres symétriques ont leurs volumes égaux, puisqu'il est évident qu'on peut les décomposer en tétraèdres symétriques, et que ceux-ci ont des bases et des hauteurs égales.

---

# LIVRE QUATRIÈME.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

---

### I. APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

---

#### *Quelques Problèmes sur les lignes.*

316. TANT que l'Algèbre et la Géométrie ont été séparées, leurs progrès ont été lents et leurs usages bornés; mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prêté des forces mutuelles, et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. C'est à Viète et à Descartes qu'on doit l'application de l'Algèbre à la Géométrie, application qui est devenue la clé des plus grandes découvertes dans toutes les branches des Mathématiques. (LAGRANGE, *Écol. Norm.*, t. IV, p. 401.)

C'est donc en introduisant dans les formules algébriques les grandeurs qui composent les parties d'une figure, que nous transporterons dans la Géométrie toutes les ressources de l'Algèbre, et nous parviendrons sans peine à des résultats qu'il serait difficile d'obtenir par la Géométrie seule. Celle-ci a l'avantage de ne jamais faire perdre de vue l'objet principal, et d'éclairer la route entière qui conduit des premiers axiomes à leurs dernières conséquences (*voy. n° 252*); mais l'Algèbre a bien plus de ressources.

Ces réflexions conduisent à préférer dans la Géométrie élémentaire les méthodes directes, celles qui ne reposent sur aucun principe étranger, et permettent, pour ainsi dire, d'isoler chaque théorème, en le présentant comme une vérité aussi

claire que l'axiome d'où il est déduit. Mais, lorsque les questions deviennent plus compliquées, cette méthode, qu'on nomme *Synthèse*, perd la clarté, qui est son plus précieux avantage. *L'Analyse* reprend toute sa supériorité, et, par sa seconde influence, généralise les résultats, simplifie les recherches, et lorsqu'elle est employée avec adresse, donne à ses artifices une élégance et même une clarté à laquelle le mécanisme du calcul semblait s'opposer. Les problèmes suivans serviront de preuve à ces assertions.

317. *Mesurer la distance d'un point inaccessible D à un autre point A* (fig. 181). On prendra sur l'alignement  $AD$  une partie quelconque  $AC$ , et formant un triangle arbitraire  $ABC$ , on en mesurera les côtés  $AB=c$ ,  $AC=b$ ,  $BC=a$  (\*), puis marquant sur  $BC$  un point  $E$  quelconque, on dirigera vers  $D$  le rayon visuel  $FD$ ; soient  $AD=x$ ,  $EC=g$ ,  $FA=d$ . La parallèle  $EG$  à  $AB$  donne

$$1^{\circ}. \quad \frac{BC}{EC} = \frac{CA}{CG} = \frac{AB}{EG}, \text{ ou } \frac{a}{g} = \frac{b}{CG} = \frac{c}{EG},$$

$$\text{donc} \quad CG = \frac{bg}{a}, \quad EG = \frac{cg}{a}.$$

$$2^{\circ}. \quad \frac{DA}{FA} = \frac{DG}{EG}, \text{ ou } \frac{x}{d} = \frac{DG}{EG}.$$

Or, on a  $DG = DA - GA = DA - (CA - CG)$ ,  
ou  $DG = x - b + \frac{bg}{a}$ ; en divisant cette valeur par celle de  $EG$ ,

$$\text{on trouve} \quad \frac{x}{d} = \frac{ax - ab + bg}{cg};$$

$$\text{d'où} \quad x = bd \left( \frac{g-a}{cg-ad} \right).$$

S'il arrive que  $BF=AF$ , ce qu'on est maître de supposer, comme  $c=2d$ , la solution se réduit à  $x = b \cdot \frac{g-a}{2g-a}$ .

(\*) Dorénavant nous désignerons les angles des triangles par  $A, B, C$ , et par  $a, b, c, \dots$ , les côtés qui sont respectivement opposés.

Il ne s'agira plus que de mettre pour  $a, b, c, d$ , et  $g$  leurs valeurs numériques, ou le nombre de fois que ces lignes contiennent l'unité, pour trouver  $x$  exprimé en nombres.

318. Quelle est la relation qui lie les côtés  $a, b$  et  $c$  d'un triangle  $BAC$  (fig. 117) inscrit à un cercle de rayon  $R$ ? Menons le diamètre  $BD$ , et les lignes  $AD, DC$ ; le quadrilatère  $ABDC$  donne (n° 241, II)  $2Rb = c \times CD + a \times AD$ . Des triangles rectangles  $BCD, BAD$ , nous tirons  $CD = \sqrt{4R^2 - a^2}$ ,  $AD = \sqrt{4R^2 - c^2}$ ; donc

$$2Rb = c\sqrt{4R^2 - a^2} + a\sqrt{4R^2 - c^2};$$

équation cherchée, qui donne l'une des quantités  $a, b, c$  et  $R$ , connaissant les trois autres.

I. Étant données les cordes de deux arcs  $AB, BC$ , on a donc  $b$ , ou la corde  $AC$  d'un arc  $ABC$  égal à leur somme.

Si les arcs  $AB$  et  $BC$  sont égaux, on a  $a = c$ , d'où

$$Rb = a\sqrt{4R^2 - a^2},$$

équ. qui donne la corde  $b$  d'un arc, connaissant celle  $a$  d'un arc moitié moindre.

II. Trouver le rayon  $R$  du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  (fig. 117). Élevons notre équ. au carré, l'un des radicaux disparaîtra; transposons ensuite les termes rationnels, et carrons de nouveau pour chasser l'autre radical, nous trouvons

$$R = \frac{abc}{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}.$$

Cette formule ne se prête pas au calcul des log: mais le radical affecte la différence de deux carrés, qui =  $(2ac + a^2 + c^2 - b^2) \times (2ac - a^2 - c^2 + b^2)$ , ou  $[(a+c)^2 - b^2] \times [b^2 - (a-c)^2]$ ; chaque facteur souffre la même décomposition, et l'on a

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}},$$

ou 
$$R = \frac{\frac{1}{2}abc}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

en faisant, pour abréger, le périmètre  $2p = a + b + c$ .



III. Trouver l'aire  $z$  d'un triangle, connaissant les trois côtés  $a, b, c$  (n° 222, fig. 182). Le segment  $AD = x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$ ,

or, le triangle  $ABD$  donne  $BD = \sqrt{c^2 - x^2}$ ;  $z = \frac{1}{2} b \times BD$  devient donc  $z = \frac{1}{2} \sqrt{[4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2]}$ ,

ou  $z = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$ .

On a donc, pour le rayon du cercle circonscrit,  $4Rx = abc$ .

IV. Trouver le rayon  $r$  du cercle inscrit au triangle. Les aires (fig. 68) des triangles  $AOB, AOC, BOC$  étant  $\frac{1}{2}cr, \frac{1}{2}br, \frac{1}{2}ar$ , la somme, est  $z = pr$ , d'où (voy. n° 364, IX)

$$r = \frac{z}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

V. Évaluer l'aire d'un quadrilatère  $ABCD$  (fig. 77): menons la diagonale  $AC = b$ , et prenons-la pour base des deux triangles  $ABC, ADC$ ;  $h$  et  $h'$  étant les hauteurs, l'aire demandée est  $\frac{1}{2} b (h + h')$ .

On peut encore opérer comme il suit: Soit  $ABCD$  (fig. 191); abaissez les perp.  $DE = h, CF = h'$  sur la base  $AB = a$ , faites  $AE = b, BF = b'$ , d'où (n° 259) l'aire  $CFED = \dots \dots \dots \frac{1}{2} (h + h') \times (a - b - b')$ . De plus  $ADE = \frac{1}{2} bh, CBF = \frac{1}{2} b'h'$ : vous trouvez enfin, pour la somme de ces aires,

$$ABCD = \frac{1}{2} (a - b) h' + \frac{1}{2} (a - b') h.$$

Cette équ., facile à appliquer, ne convient plus dès que l'une des perpend. tombe hors du quadrilatère. Ainsi (fig. 192), il faudrait changer  $b$  en  $-b$  et  $b'$  en  $-b'$ . (Voy. n° 339 et 364, VI.)

VI. Mener  $EF$  perpend. à la base  $AC$  du triangle  $ABC$  (fig. 193), telle que les triangles  $AEF, ABC$  soient dans le rapport donné de  $m$  à  $n$ . Soient  $b$  et  $x$  les bases  $AC, AE$ ;  $h$  et  $y$  les hauteurs  $BD, EF$ ; les aires sont  $\frac{1}{2} bh, \frac{1}{2} xy$ , d'où  $\frac{xy}{bh} = \frac{m}{n}$ . D'ailleurs

les triangles semblables  $AEF, ABD$  donnent  $\frac{y}{h} = \frac{x}{b}$ , en faisant  $AD = k$ ; donc, éliminant  $y$ ,  $x = \sqrt{\left(\frac{kbm}{n}\right)}$ . Si 'on

avait  $x > k$  ou  $AD$ , le point  $E$  devrait être situé vers  $H$ , au-delà de  $D$ , et la perpend. à  $AC$  séparerait un triangle qui n'est plus contenu dans  $ABC$  : ce cas arrive quand  $bm > kn$ , ou

$$\frac{m}{n} > \frac{k}{b} = \frac{AD}{AC}$$

319. Connaissant le côté  $AB = a$  (fig. 122) d'un polygone régulier inscrit, cherchons celui  $AC = x$  d'un polygone régulier dont le nombre des côtés est double.  $CO$ , perpend. sur  $AB$ , donne (n° 227)  $AC = CI \times 2CO$ . Représentant par  $z$  le rayon  $OI$  du cercle inscrit au polygone donné, on a  $CI = R - z$ , et  $OI = AO - AI$  : donc

$$x^2 = 2R(R - z), \text{ et } z^2 = R^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

En faisant, par ex.,  $a = R$ , on a  $R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$  pour le côté du dodécagone inscrit. De même  $a = R\sqrt{3}$  (n° 238) donne  $x = R$  pour le côté de l'hexagone, etc.

On peut aussi trouver le côté  $EF = y$  d'un polygone régulier circonscrit, connaissant celui  $AB = a$ , qui est inscrit d'un même nombre de côtés. Car les triangles  $AOI$ ,  $EOC$  donnent

$$\frac{OI}{OC} = \frac{AI}{EC}, \text{ ou } \frac{z}{R} = \frac{a}{y} :$$

donc  $y = \frac{aR}{z}$  et  $z^2 = R^2 - \frac{1}{4}a^2$ .

320. C'est ainsi que  $a = R\sqrt{2}$  donne  $z = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$  et  $y = 2R$  pour le côté du carré circonscrit (n° 239);  $a = R\sqrt{3}$  donne, pour le côté du triangle équilatéral circonscrit,  $y = 2R\sqrt{3}$ , ou le double du côté du triangle inscrit.

Il est facile de déduire de ces formules le rapport approché  $\pi$  de la circonférence au diamètre, ou la demi-circonférence  $\pi$  du cercle, dont le rayon est l'unité (n° 248). Pour cela posons  $R = 1$ , nos équ. deviendront

$$x = \sqrt{2 - 2z}, \quad z = \sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}, \quad y = \frac{a}{z}.$$

Faisant  $a = 1$ , on a, pour le côté du dodécagone inscrit,  $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,517638$ . Si de nouveau on fait  $a = 0,517638$ ,

on trouvera  $x = 0,26105238 \dots$  pour le côté du polygone régulier inscrit de 24 côtés; et ainsi de suite.

Quatre opérations semblables donneront, par exemple, 0,065438166 pour le côté du polygone régulier de 96 côtés; en mettant cette valeur pour  $a$  dans  $x$  et  $y$ , on a le côté du polygone régulier circonscrit semblable; et multipliant par 48, on a, pour les demi-périmètres de ces polygones 3,1410 et 3,1427. . . . . Comme la demi-circonf.  $\pi$  est comprise entre ces longueurs, on aura donc  $\pi = 3,14 \dots$ , en ne prenant que les décimales communes.

Pour obtenir une plus grande approximation, comme la circonférence approche d'autant plus des périmètres des polygones, que l'on multiplie davantage les côtés (n° 246), il faudra recourir à des polygones d'un plus grand nombre de côtés. Soit, en général calculé le côté  $a$  d'un polygone inscrit d'un nombre  $n$  de côtes; on aura, pour les demi-périmètres de ce polygone et de celui qui est circonscrit semblable,

$$\frac{1}{2}an \text{ et } \frac{\frac{1}{2}an}{V[(1 + \frac{1}{2}a)(1 - \frac{1}{2}a)]} :$$

NOMBRES DES CÔTÉS.	DEMI-PÉRIMÈTRES DES POLYGONES	
	INSCRITS	CIRCONSCRITS
96.....	3,1410319..	3,1427146
192.....	3,1414524.....	3,1418730
384.....	3,1415576.....	3,1416630
768.....	3,1415839..	3,1416101
1536.....	3,1415904.....	3,1415970
3072.....	3,1415921.....	3,1415937
6144.....	3,1415925.....	3,1415929
12288.....	3,1415926.....	3,1415927

on en déduit enfin le nombre  $\pi$  donné p. 289.

### *Constructions géométriques.*

321. L'art de résoudre les problèmes de Géométrie consiste, comme on a pu le remarquer (n° 212, 229. . .), à les supposer résolus, à rapprocher les propriétés de la figure de celles qu'on

connait et qui sont analogues ; à trouver ainsi la loi à laquelle les parties du système sont soumises , et à en conclure les inconnues. Ces procédés exigent beaucoup d'exercice et d'adresse , et l'on ne peut donner de règles générales pour ces combinaisons. L'emploi de l'Algèbre , lorsque le choix des inconnues est fait avec adresse , conduit souvent à des solutions plus élégantes ; on sait mieux reconnaître leur nombre , et l'on juge facilement si le problème est possible ou non , déterminé ou indéterminé.

Concevons qu'après avoir résolu un problème de Géométrie , on ait construit la figure qui en règle les parties , qu'on ait désigné par des lettres les longueurs des diverses lignes qui la composent , et qu'en faisant usage des principes connus , on les ait liées par des équ. ; le calcul conduira bientôt à la valeur des inconnues. Cela posé , si toutes les lignes de la figure sont exprimées par des nombres , l'Arithmétique donnera numériquement ces dernières. Mais il est remarquable qu'on peut assigner ces longueurs cherchées , même sans le secours des nombres , à l'aide de procédés géométriques , qui auront d'autant plus d'élégance , qu'ils rendront la figure moins confuse. C'est ce qu'on appelle *construire* la valeur de l'inconnue.

322. Remarquons , avant tout , que le calcul dont il vient d'être question ne peut avoir pour élémens que des rapports de lignes ; en sorte que la ligne  $A$  ne peut y être introduite qu'en ayant égard à son rapport avec une autre ligne  $B$  , qu'on peut prendre pour unité ( n° 175 ). Alors  $\frac{A}{B}$  représente un nombre abstrait , auquel on peut substituer celui de deux autres grandeurs quelconques  $a$  et  $b$  , pourvu qu'on ait  $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ .

Il n'entre donc , dans les calculs , que des expressions telles que  $\frac{a}{b}$  ,  $\frac{c}{d}$  , . . . Or , il suit des règles mêmes du calcul , que toutes combinaisons de ces élémens par voie de multiplication , division , réduction au même dénominateur , etc. , doit conduire



à un résultat *homogène*, c.-à-d., dont les termes renferment tous le même nombre de facteurs. Ainsi, les lettres  $a, b, c, \dots$  qui entrent dans une formule peuvent y désigner des lignes au lieu de nombres, et les termes doivent être homogènes : s'il n'en est pas ainsi, quelque'une de ces lignes, telles que  $r$ , a dû être prise pour l'unité, qui n'est d'ailleurs qu'une longueur arbitraire et connue (n° 36). Dans ce cas, on peut rétablir le facteur  $r$  partout où il a dû disparaître, lorsqu'on a posé  $r = 1$ , c.-à-d., introduire  $r$  et des puissances convenables de  $r$  dans les divers termes, afin qu'ils redeviennent homogènes. Pour que les quantités

$$\frac{2a^4c + ab^3 - d}{b^4 + a^3 - c}, \quad \frac{a-b}{1+ab}, \quad \sqrt{\left(\frac{1 \pm a}{2}\right)},$$

representent des lignes, elles doivent revenir à

$$\frac{2a^4c + ab^3r - dr^4}{b^4 + a^3r - cr^3}, \quad \frac{(a-b)r^2}{r^2 + ab}, \quad \sqrt{\left(\frac{r^2 \pm ar}{2}\right)}.$$

En effet, par ex.,  $x = \sqrt{\left(\frac{1 \pm a}{2}\right)}$ , en faisant évanouir le ra-

dical, devient  $2x^2 = 1 \pm a$ , qui, en resutant des puissances convenables de  $r$ , devient  $2x^2 = r^2 \pm ar$ . Mise sous cette forme, on peut prendre dans l'expression pour unité tout autre signe que  $r$ , et même une longueur qui n'y entre pas.

Lorsqu'une formule sera *homogène*, nous en évaluerons le degré par le nombre des facteurs de l'un de ses termes, si elle est entière ; on retranchera le degré du dénominateur de celui du numérateur, si elle est fractionnaire ; enfin, on divisera le degré de la fraction par l'ordre du radical qui l'affecte, si elle est irrationnelle. Concluons de là qu'en général, pour qu'une fraction représente une ligne, c.-à-d. soit *linéaire*, il faut que chaque terme du numérateur ait un facteur de plus que dans le dénominateur ; et s'il entre un radical, il doit affecter une quantité de même degré que lui : le radical carré précédera une fraction du second degré, etc. ; les formules de première dimension, c.-à-d. du 1<sup>er</sup> degré, sont constructibles par une



ligne; celle de *seconde dimension* par une aire; enfin celles de *troisième dimension* représentent un volume: et si elles ne sont pas homogènes, on les rend telles en distribuant des puissances convenables de la ligne  $r$  qui y a été prise pour unité.

323. Toute fraction monome linéaire ne peut être que de la forme  $x = \frac{ab}{c}$ ,  $x = \frac{abc}{de}$ ,  $x = \frac{abcd}{efg}$ , . . . .; celle-ci, par ex., équivalant à  $\frac{a}{e} \times \frac{b}{f} \times \frac{c}{g} \times d$ ; de sorte qu'on voit que la ligne  $d$  doit être prise autant de fois qu'il y a d'unités dans le produit des rapports abstraits  $\frac{a}{e}$ ,  $\frac{b}{f}$ ,  $\frac{c}{g}$ .

1°. La construction de  $x = \frac{ab}{c}$  n'offre pas de difficulté;  $x$  est une quatrième proportionnelle à  $c$ ,  $a$  et  $b$ . On sait la trouver (n° 217, fig. 82); on pourrait même faire usage des théorèmes (n° 225 et 228).

2°. Pour  $x = \frac{abc}{de}$ , on cherchera une ligne  $k = \frac{ab}{d}$ , et l'on aura  $x = \frac{ke}{e}$ ; ainsi deux 4<sup>es</sup> proportionnelles donneront  $x$ .

3°. De même  $x = \frac{abcd}{efg}$  se construit en faisant  $k = \frac{ab}{e}$ ,  $l = \frac{cd}{f}$ , et l'on a  $x = \frac{kl}{g}$ . Il faut trois constructions.

Et ainsi de suite.

324. Pour la fraction polynome  $x = \frac{abc + def - ghi}{lm}$ , dont le dénominateur est monome, on écrit  $x = \frac{abc}{lm} + \frac{def}{lm} - \frac{ghi}{lm}$ ; on construit chaque fraction à part, et l'on a trois lignes à ajouter ou à soustraire.

Cependant si l'on a  $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$ , il sera plus court de faire

$x = \frac{(a+b)(a-b)}{c}$ , c.-à-d. de chercher une 4<sup>e</sup> proportionnelle aux lignes  $c$ ,  $a+b$  et  $a-b$ .

325. On rend le dénominateur monome, lorsqu'il ne l'est pas, en l'égalant à un seul terme de même dimension, et dont on prend à volonté tous les facteurs, excepté l'un  $y$  qui y est inconnu, et qu'on détermine ainsi qu'il vient d'être dit. Par

ex., pour  $x = \frac{abc + def}{db + cd}$ , on fera  $ab + cd = ay$ ;

d'où  $x = \frac{abc}{ay} + \frac{def}{ay} = \frac{bc}{y} + \frac{def}{ay}$ , et  $y = b + \frac{cd}{a}$ .

Cette équ. donne  $y$ ; la 1<sup>re</sup> fait ensuite connaître  $x$ .

Pour  $x = \frac{abc^3 + q^3h - m^3p}{q^3i - klq + cmd}$ , on fera le dénominateur

$q^3i - klq + cmd = q^3y$ ; d'où l'on tire  $y = i - \frac{kl}{q} + \frac{cmd}{q^3}$ ;  
une fois  $y$  connu, on a

$$x = \frac{abc^3}{q^3y} + \frac{qh}{y} - \frac{m^3p}{q^3y}.$$

Le choix des facteurs de l'inconnue  $y$  se fait quelquefois de manière à rendre les constructions plus simples; un peu d'adresse et d'exercice facilitent l'application du principe général:

ainsi  $x = \frac{abc^3 - a^3b^3}{abc + c^3}$  devient  $x = \frac{m(c-m)}{c+m}$ , en faisant  $m = \frac{ab}{c}$ .

326. Les *Constructions radicales* se ramènent à la forme

$$\sqrt{ab} \text{ ou } \sqrt{a^2 \pm b^2} :$$

$\sqrt{ab}$  est une moyenne proportionnelle entre  $a$  et  $b$ ; on la construit comme il a été dit (n° 226, fig. 95); on pourrait aussi la trouver à l'aide des théorèmes (n° 227, 228)

Quant à  $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ , c'est un côté d'un triangle rectangle dont  $a$  et  $b$  sont les autres côtés. Pour  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , on prendra (fig. 92)  $AB = a$ ,  $AC = b$  sur deux lignes indéfinies  $AB$ ,  $BC$  à angle droit; l'hypoténuse  $BC$  est  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . De même,

Pour  $\sqrt{a^2 - b^2}$ , on tracera, comme ci-dessus, les lignes  $AB$  et  $AC$ ; on prendra  $AB = b$ ; puis du centre  $B$  avec le rayon  $BC = a$ , on marquera le point  $C$ ,  $AC$  sera  $\sqrt{a^2 - b^2}$ . Ou autrement, sur la ligne  $BC = a$  comme diamètre, on décrira le demi-cercle  $ABC$ ; puis du centre  $B$  avec le rayon  $AB = b$ , on marquera le point  $A$ ;  $AC$  sera  $\sqrt{a^2 - b^2}$ .

327. Pour construire toute quantité affectée d'un radical carré, comme elle doit avoir deux dimensions, on l'égalera à un produit  $ay$ ;  $a$  étant une quantité qu'on choisira à volonté; et  $y$  une inconnue; on aura alors  $x = \sqrt{ay}$ . La valeur de  $y$  se déduira aisément; elle sera une fraction qu'on construira par les principes ci-dessus.

Soit, par ex.,  $x = \sqrt{\left(\frac{ab^2 + cd^2}{b + c}\right)}$ ; on fera  $\frac{ab^2 + cd^2}{b + c} = ay$ ,

Poù  $y = \frac{b^2}{b + c} + \frac{cd^2}{a(b + c)}$ ; on construira  $y$  par une 3<sup>e</sup> et deux 4<sup>es</sup> proportionnelles: enfin on aura  $x = \sqrt{ay}$ .

Au reste, le procédé général se simplifie souvent avec un peu d'adresse; ainsi, pour  $\sqrt{ac + bd}$ , on fera  $bd = ay$ ; d'où  $y = \frac{bd}{a}$  et  $x = \sqrt{a(c + y)}$ . De même  $x = \sqrt{ab + bc}$  devient  $x = \sqrt{(a + c)b}$ . Voy. aussi (n° 329, V) la construction de  $\sqrt{\left(\frac{nk^2}{m}\right)}$ , etc.

328. Quoiqu'on puisse construire par cette voie  $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$ , cependant la construction du triangle rectangle donne une solution plus simple: c'est pourquoi il arrive souvent qu'on ramène à cette forme les quantités radicales. Ainsi, . . . .  
 $x = \sqrt{a^2 \pm bc}$  devient  $x = \sqrt{a^2 \pm y^2}$ , en faisant  $y^2 = bc$ ;  
 Poù  $y = \sqrt{bc}$ .

De même  $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \dots}$  se construit ainsi. On fait  $y = \sqrt{a^2 + b^2}$ ; sur les côtés  $AB$ ,  $BC$  de l'angle droit  $B$  (Fig. 194), on prend  $AB = a$ ,  $BC = b$ , l'hypoténuse  $AC$  est  $y$ . On a  $x = \sqrt{y^2 + c^2 + d^2 + \dots}$ ; on fait  $y' = \sqrt{y^2 + c^2}$ ; ainsi, sur  $DC$  perpend. à  $AC$ , on prend  $CD = c$ , et  $AD$  est  $y'$ ;

d'où  $x = \sqrt{y^2 + d^2 + \dots}$ , et ainsi de suite. La dernière hypoténuse  $AP$  est  $x$ . (Voy. pour la construction de  $\sqrt{n}$  et  $\sqrt{\frac{m}{n}}$  n° 339, IX et V.)

Pour  $x = \sqrt{ac - fg + mq + rd}$ , on fera indifféremment ou  $ac - fg + mq + rd = ay$ ,

d'où  $y = c - \frac{fg}{a} + \frac{mq}{a} + \frac{rd}{a}$ , et  $x = \sqrt{ay}$ ;

ou bien  $ac = y^2$ ,  $fg = x^2$ ,  $mq = r^2$ ,  $rd = u^2$ ,

d'où  $x = \sqrt{y^2 + r^2 + u^2 - x^2}$ ; et la construction précédente, convenablement modifiée donnera  $x$ .

Enfin si l'on a  $x = \sqrt{a^2 - f^2 \frac{c^2 + d^2}{ab + cd}}$ , on fera....

$y^2 = f^2 \frac{c^2 + d^2}{ab + cd}$ , d'où  $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ : il ne restera plus qu'à obtenir  $y$ . On fera  $c^2 + d^2 = x^2$  et  $ab + cd = r^2$ ;  $s$  et  $t$  se trouveront aisément, et l'on aura  $y = \frac{fx}{t}$ .

339. Appliquons ces principes à quelques exemples.

I. Partager une longueur  $AC$  (fig. 195) en deux parties  $CB$ ,  $AB$ , qui soient entre elles dans le rapport donné de  $m$  à  $n$ . Soient  $AC = a$ ,  $CB = x$ ; on a  $AB = a - x$ , et, d'après la condition prescrite,  $\frac{x}{a - x} = \frac{m}{n}$ ; d'où  $x = \frac{am}{m + n}$ . Sur une ligne quelconque  $EC$ , on prendra  $CD = m$ ,  $ED = n$ , si  $m$  et  $n$  sont des lignes; si ce sont des nombres, on portera une ouverture de compas arbitraire  $m$  fois de  $C$  en  $D$ , et  $n$  fois de  $D$  en  $E$ . On mènera  $AE$  et sa parallèle  $BD$ ;  $B$  sera le point cherché.

II. Étant données deux parallèles  $BC$ ,  $DE$  (fig. 196), et un point  $A$ , mener par ce point une oblique  $AI$ , telle, que la partie  $IK$  comprise entre les parallèles soit de longueur donnée  $= c$ . Menons  $AG$  perpend. sur  $DE$ , et faisons  $AG = a$ ,  $FG = b$ . L'inconnue  $GI = x$ ; on a  $\frac{AI}{AG} = \frac{IK}{FG}$ , ou  $\frac{AI}{a} = \frac{c}{b}$ ; par

$AF = a^2 + x^2$ ; donc  $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{c^2 - b^2}$ . On voit d'abord que le problème est impossible quand  $b$  est  $> c$ , ou  $FG > IK$ . Pour construire cette valeur, du centre  $F$ , on décrira l'arc  $HH'$  avec le rayon  $c$ ;  $GH$  sera  $\sqrt{c^2 - b^2}$ ;  $AI$  parallèle à  $FH$  sera la ligne cherchée, puisqu'on voit que  $IG$  est 4<sup>e</sup> proportionnelle à  $b$ ,  $a$  et  $GH$ .

Il y a une seconde solution en  $AF$ ; c'est ce qu'indique le double signe de la valeur de  $x$  (voy. n° 338).

III. Etant donnés deux points  $A$  et  $B$  (fig. 197), et une droite  $DD'$ , décrire un cercle qui passe par ces deux points et soit tangent à la droite. Il suffit de trouver le point  $D$  du contact. Soit donc prolongée la ligne  $AB$  en  $C$ , et fait  $CD = x$ ,  $CI = a$ ,  $CB = b$ ,  $I$  étant le milieu de  $AB$ . La tangente  $CD$  donne (n° 228)  $x^2 = CA \times CB = (a - b)(a + b)$ ; d'où  $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Par l'hypoténuse  $CI$  on tracera le triangle rectangle  $IEC$ , dont  $a$  et  $x$  sont les côtés de l'angle droit, en décrivant le demi-cercle  $CEI$ , prenant  $EI = AI$ ;  $CE$  sera  $x = CD$ . Il y a une 2<sup>e</sup> solution en  $D'$ , à cause de la valeur négative de  $x$  (n° 338).

IV. Deux parallèles  $AE$ ,  $BF$  (fig. 198) et leur perpend.  $AB$  étant données, mener une secante  $EF$ , telle que  $AC$ , moitié de  $AB$ , soit moyenne proportionnelle entre les segmens  $AE$ ,  $BF$ . Soient  $AE = x$ ,  $BF = y$ ,  $AC = a$ : on a  $a^2 = xy$ : le problème est donc indéterminé (n° 117), et le nombre des solutions infini. Parmi les diverses manières de les obtenir, la suivante est assez élégante.

Soit  $CD = r$ ,  $D$  étant le point de rencontre de la ligne cherchée  $EF$ , avec  $CD$  perpendiculaire sur  $AB$  en son milieu  $C$ ;  $EF$  perpend. à  $CD$  donne les deux triangles égaux  $EDI$ ,  $IDF$ ; ainsi  $y = r + IE$ ,  $x = r - IE$ , d'où  $x + y = 2r$ . Éliminant  $y$  de  $a^2 = xy$ , on a  $x^2 - 2rx = -a^2$ ;  $r$  est ici arbitraire, et l'on a  $x = r \pm \sqrt{r^2 - a^2}$ . On devra donc prendre le point  $D$ , tel que  $r$  soit  $> a$ , ou  $CD > AC$ : le cercle décrit du centre  $D$  avec le rayon  $r$  donne  $EI = \sqrt{r^2 - a^2}$ , donc les points  $E$  et  $F$  d'intersection satisfont à la condition, ainsi



que  $E'$  et  $F'$ . Chaque centre  $D$  donne ainsi deux solutions  $EF, E'F'$ .

V. Par le point  $A$  (fig. 204), mener une corde  $ABD$  des deux cercles, de telle sorte que les segments  $BA, AD$  aient entre eux un rapport donné  $= \frac{k}{n}$ .

Menons le diamètre  $HAG$ ; soit  $CH = r, CA = b, AD = x$ ; on a  $HA \times AG = BA \times AD$ , d'où  $r^2 - b^2 = x \times BA$ ; mais

par condition,  $BA = \frac{mx}{n}$ ; donc  $\frac{mx^2}{n} = r^2 - b^2$ . Faisons

$r^2 - b^2 = k^2$ , nous aurons  $x = \sqrt{\frac{nk^2}{m}}$ , quantité facile à construire.

On pourrait lui donner la forme  $x = \frac{k}{m} \sqrt{mn}$ , et il

faudrait trouver une moyenne et une 4<sup>e</sup> proportionnelle, mais on doit préférer le procédé suivant. Remplaçons le rapport  $\frac{k}{n}$

par celui des deux carrés : sur une ligne indéfinie (fig. 199) prenons  $DF$  et  $FE$ , tels qu'on ait  $\frac{FE}{DF} = \frac{n}{m}$ ; décrivons le

demi-cercle  $DAE$ , puis menons  $AF$  perpend. sur  $DE$ , et les cordes  $AD, AE$ ; nous aurons  $\frac{AE^2}{AD^2} = \frac{FE}{DF} = \frac{n}{m}$  (n° 227);

ainsi  $x = \frac{k \times AE}{AD}$ ; prenons donc  $AB = k$  sur  $AD$ , prolongeons

si il est nécessaire;  $BC$  parallèle à  $DE$ , donnera  $AC =$

(n° 216).

VI. Un polygone étant donné, en construire un semblable dont les aires étant dans le rapport connu de  $m$  à  $n$ . Nommons l'un des côtés du polygone donné,  $x$  son homologue inconnu; les aires étant  $:: m : n$  d'une part, et aussi  $:: A^2 : x^2$  d'

l'autre (n° 262); on a  $\frac{A^2}{x^2} = \frac{m}{n}$ , d'où  $x = A \sqrt{\frac{n}{m}}$ . On vient

de construire cette expression (fig. 199); ainsi  $x$  est une longueur connue. Il ne reste plus qu'à former, sur le côté  $x$  homologue à  $A$ , une figure semblable à la proposée (n° 242). Le

même construction s'applique aussi aux cercles (n° 263, 3°.);  $m$  et  $n$  sont ici des lignes ou des nombres donnés.

Pour trouver le rapport de deux figures données semblables,  $ABC \dots, abc \dots$  (fig. 118), on prend sur les côtés d'un angle droit  $DAE$  (fig. 199) des parties  $AB, AC$  égales à deux lignes homologues des figures proposées : la droite  $BC$  est coupée par sa perpend.  $AG$  en deux segments  $BG, CG$ , qui ont le même rapport que ces figures.

VII. Cherchons une figure  $X$  semblable à une autre  $P$  et égale à une troisième  $Q$ .  $P$  et  $Q$  sont donnés : prenons un côté  $A$  de  $P$ , et soit  $x$  son homologue inconnu, on a  $\frac{P}{X} = \frac{A^2}{x^2}$ , d'où

$\frac{P}{Q} = \frac{A^2}{x^2}$ , puisque  $X = Q$ . Soient  $M$  et  $N$  les côtés de deux carrés équivalens à  $P$  et  $Q$  (n° 257), ou deux carrés  $M^2$  et  $N^2$  qui aient même rapport que ceux-ci (fig. 199); il en résultera  $\frac{M}{N} = \frac{A}{x}$ ; ainsi  $x$  est 4° proportionnelle à  $M, N$  et  $A$ .

VIII. Trouver deux lignes  $x$  et  $y$ , qui aient même rapport que deux parallélogrammes donnés. Les bases étant  $B, b$ , les hauteurs  $H, h$ , on doit avoir  $\frac{x}{y} = \frac{BH}{bh}$ . Si l'on donne  $y$ , une

construction facile (n° 323) fera connaître  $x$ . Mais si ces deux lignes sont inconnues, l'une est arbitraire; et l'on peut prendre

$y = b$ , d'où  $x = \frac{BH}{h}$ ;  $x$  est alors une 4° proportionnelle à  $h, H$  et  $B$ .

Ce problème revient à construire un rectangle  $hx$ , dont on a la hauteur  $h$ , et dont l'aire équivaut à celle d'un rectangle donné  $BH$ .

IX. Pour construire  $\sqrt{n}$ , on peut prendre une moyenne proportionnelle (n° 226) entre  $n$  et 1. On remarque (n° 238, 239) que si l'on décrit le cercle qui a l'unité pour rayon, en y inscrivant un carré et un triangle équilatéral, leur côtés sont  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{3}$ . Quant à  $\sqrt{5}, \sqrt{6} \dots$ , la construction (n° 328) s'applique à cette recherche; car, sur l'angle droit  $CBA$  (fig. 194),

prenons  $AB = a$ ,  $CB = 1$ , on aura  $AC = \sqrt{5}$ . De même  $CD = 1$ , donne  $AD = \sqrt{6}$ , etc.

330. L'équation du second degré  $x^2 + px = q$  suppose une ligne  $r$  prise pour une unité (n° 322); il faudrait donc remplacer par  $qr$ , ou plutôt par  $m^2$ , en faisant  $m^2 = qr$ . Les racines de  $x^2 + px = m^2$  sont  $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(m^2 + \frac{1}{4}p^2)}$ ; on les construira aisément d'après les procédés généraux que nous avons indiqués; mais il est plus élégant d'opérer comme il suit.

1°. Si l'on a  $x^2 - px = -m^2$ , comme  $m^2 = x(p - x)$ ,  $m$  est moyen proportionnel entre  $x$  et  $p - x$ . Si donc on élève (fig. 200)  $AD = m$  perpend. sur  $AB = p$ , puis si l'on décrit la demi-circonférence  $AEB$  sur le diamètre  $AB$ ,  $DE'$  parallèle à  $AB$  donne les points  $E, E'$ , pour lesquels la perpend.  $EE'$  ou  $E'F'$  est moyenne proportionnelle entre les segments du diamètre. Les deux racines sont donc  $x = AF$  et  $x = AF'$ .

2°. Si l'on a  $x^2 - px = m^2$ , comme  $m$  est moyenne proportionnelle entre  $x$  et  $x - p$ , avec le rayon  $AD = \frac{1}{2}p$  (fig. 103), on décrira le cercle  $AEF$ , puis prenant sur la tangente une longueur  $AC = m$ , la sécante  $CEF$  passant par le centre, donne  $x = CE$  et  $-CF$ , puisque  $m^2 = CE \times CF$ .

3°. Si l'on a  $x^2 + px = \pm m^2$ , on fera la même construction que dans les cas précédens; seulement les racines sont changées de signe, puisqu'il suffit de changer  $x$  en  $-x$ , pour retomber sur les équ. déjà traitées.

X. Soit proposé, par ex., de mener par le point  $A$  la corde  $BD$  (fig. 204), dont la longueur soit donnée  $= c$ . Conservant la notation du problème V, nous avons encore  $r^2 = b^2$ , ou  $k^2 = x \times BA$ , par condition;  $BA = c - x$ ; donc  $k^2 = (c - x)x$ .

XI. Couper une droite en moyenne et extrême raison; il faut trouver sur la ligne  $AC = a$  (fig. 103) un point  $B$  tel que le segment  $BC = x$ , soit moyen proportionnel entre la ligne  $AC$ , et le petit segment  $AB = a - x$ , d'où  $x^2 = a(a - x)$ , et

$$x = -\frac{1}{3}a \pm \sqrt{(a^2 + \frac{1}{3}a^3)}.$$

Le radical est l'hypoténuse  $CD$  du triangle rectangle  $ADC$ ,

le côté  $AD = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}AC$ ; ce triangle est facile à construire; on a donc  $x = -\frac{1}{2}a + CD$ . Du centre  $D$ , avec le rayon  $AD$ , on décrit le cercle  $EAF$ ;  $CE$  est  $= x$ ; on porte  $CE$  de  $C$  en  $F$ , et le problème est résolu, comme on l'a fait p. 275. La 2<sup>e</sup> racine, elle ne convient pas à la question; pour représenter (n° 107), il faut changer  $x$  en  $-x$  dans l'équ. ci-dessus, qui devient  $x' = a(a+x)$ ; et donne  $x = \frac{1}{2}a + CD$ . On portera  $CF$  de  $C$  en  $D$ , et ce point  $D$  donnera  $DC$  proportionnel en  $DA$  et  $CA$ . Les deux solutions conviennent à cette question : *Trouver sur la droite indéfinie  $AC$  un point  $B$  ou  $D$ , tel que sa distance au point  $C$  soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point  $A$  et la longueur  $AC$ .*

Pour construire les formules de deux dimensions, on revient à deux facteurs  $BH$  (comme n° 327); l'un est la base, l'autre la hauteur du rectangle, dont l'aire a pour valeur l'expression proposée. Ainsi, pour  $x = \sqrt{cd(a^2 - b^2)}$ , on a  $a^2 - b^2 = B^2$ ,  $cd = H^2$ ,  $B$  et  $H$  seront des lignes faciles à construire, et l'on aura  $x = BH$ , rectangle connu.

Si l'on veut que l'aire cherchée soit un parallélogramme ou un triangle, etc., comme la base et la hauteur ne suffisent pas pour déterminer la figure, le problème admet une infinité de solutions, et n'est déterminé que si l'on donne une autre condition, telle qu'un angle, ou le rapport des côtés, etc.

Pour former un triangle équivalent à un cercle dont le rayon est  $a\sqrt{\frac{m}{n}}$ , on prendra le diamètre  $2R$  pour base, et la hauteur sera une ligne  $h$  égale à la demi-circonférence, ou  $h = \frac{1}{2}\pi a\sqrt{\frac{m}{n}}$ . Ces valeurs se construisent par la fig. 199. On peut ensuite à tracer un triangle dont on prend un angle quelconque.

Toute formule à trois dimensions se réduit à un produit de trois facteurs,  $x = ABC$ , qui sont les dimensions d'un parallélépipède rectangle, dont le volume est  $x$ . On peut aussi représenter cette expression par un cube, ce qui constitue la



*Cubature des corps, ou par des tétraèdres, des cylindres, et*

*Sur les Signes des quantités dans l'Algèbre appliquée  
à la Géométrie.*

333. Lorsque deux figures ne diffèrent l'une de l'autre que par la grandeur de leurs parties, qui y sont d'ailleurs disposées dans le même ordre, on dit que ces figures sont *Directes*. Si les quantités  $a, b, c, d, \dots, x$ , qui composent la 1<sup>re</sup>, sont liées par une équ.  $X = 0$ , elle a également lieu pour la 2<sup>e</sup>. Mais si les deux figures diffèrent en outre par la disposition de quelques-unes de leurs parties, de sorte, par ex., qu'on ait  $x = a -$  dans la 1<sup>re</sup> et  $x = b - a$  dans la 2<sup>e</sup>, on dit alors qu'elles sont *Indirectes* (\*). L'équ.  $X = 0$ , qui a eu lieu pour l'une, peut avoir besoin de quelques modifications pour devenir applicable à l'autre; c'est ce qu'il s'agit d'examiner.

En nommant  $x$  le segment  $CD$  (fig. 190 et 193) forme par la perpend.  $BD$  sur la base  $AC$  du triangle  $ABC$ , et  $a, b, c$  les côtés opposés aux angles  $A, B, C$ , on a (page 268)

$$BD^2 = c^2 - AD^2 = a^2 - x^2, \quad c^2 = a^2 + AD^2 - x^2 \dots \quad (1)$$

Mettant pour  $AD$  sa valeur  $AC - CD = b - x$  (fig. 193), ou  $AC + CD = b + x$  (fig. 190), on a

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx, \quad \text{ou } c^2 = a^2 + b^2 + 2bx \dots \quad (2)$$

Les figures 193 et 190 sont indirectes, puisque  $x = b - AD$  dans l'une, et  $x = AD - b$  dans l'autre : chacune des formules (1) n'est directement applicable qu'à l'une des fig. Mais la formule (2) appartenant à l'une et à l'autre, la substitution de la valeur de  $AD$  y a seule introduit des différences qui, ne provenant que du signe de  $x$ , montrent que l'une de ces équ. (2) doit se déduire de l'autre en changeant  $x$  en  $-x$ .

334. En général, si, entre les quantités  $a, b, c, \dots, x$  qui composent deux figures indirectes, on a les équ.  $X = 0$  pour

(\*) Carnot, qui est l'auteur de cette théorie, qu'il a développée dans sa *Géométrie de position*, nomme *corrélatives directes* les figures directes, et *corrélatives inverses* les figures indirectes. Consultez cet excellent ouvrage.



l'une, et  $X' = 0$  pour l'autre, il faut qu'il y ait au moins une ligne, telle que  $a$ , qui soit la somme dans la 1<sup>re</sup> fig., et la différence dans la 2<sup>e</sup> de deux autres  $b$  et  $x$ ; de sorte que  $a = b - x$  pour l'une, et  $a = b + x$  pour l'autre. Or, on peut toujours concevoir une troisième équ.  $Y = 0$ , vraie pour l'une et l'autre, et telle qu'on en deduisse  $X = 0$ , ou  $X' = 0$ , suivant qu'on y mettra  $b + x$ , ou  $b - x$  pour  $a$ .

Or, ces valeurs de  $a$  ne différant que par le signe de  $x$ ,  $X$  et  $X'$  doivent se déduire l'une de l'autre en changeant  $x$  en  $-x$ . S'il y avait plusieurs quantités indirectes, il faudrait en dire autant de chacune d'elles. Indiquons les moyens de reconnaître ces quantités. Si l'on fait varier la position des points de la 2<sup>e</sup> fig. pour la rendre directe avec la 1<sup>re</sup>, en comparant les deux valeurs  $x = b - a$  et  $a - b$ , on voit que  $a$  a dû devenir  $> b$ , de  $< b$  qu'il était; et comme la variation s'est faite en suivant la loi de continuité, il faut qu'on ait eu  $a = b$ ; ainsi  $x$  a dû devenir nul.

Par ex., si  $C$  (fig. 193) se meut vers  $D$  et dépasse ce point, afin que la fig. soit rendue directe avec 190  $CD$ , ou  $x$ , a été nul lorsque  $C$  a passé sur  $D$ .

$x$  peut être  $= \frac{K}{a - b}$  pour l'une des fig., et  $= \frac{K}{b - a}$  pour

l'autre; alors  $x$  aurait passé par l'infini. C'est donc le propre des quantités indirectes de ne pouvoir être rendues directes par le mouvement continu des parties de l'une, sans se trouver dans l'intervalle devenir zéro ou infini.

Lors donc qu'on a une équ.  $X = 0$ , entre les lignes  $a, b, c, \dots x$  d'une figure, pour obtenir celle  $X' = 0$ , qui convient à une figure indirecte, il faut simplement changer le signe des quantités indirectes: on reconnaît celles-ci en faisant mouvoir les lignes de l'une des figures pour la rendre directe avec l'autre; on distingue alors quelles sont celles des lignes  $a, b, c, \dots x$  qui passent par zéro ou par l'infini; ces dernières peuvent seules être indirectes.

Mais ce caractère peut s'offrir sans que, pour cela, les lignes qui le présentent soient indirectes; il faut en outre que les re-

lutions qu'on tire des deux figures, à l'aide des théorèmes connus, servent, par leur comparaison, à distinguer les quantités indirectes, pour leur attribuer ensuite des signes contraires. C'est ainsi qu'après avoir reconnu que  $CD = x$  devient  $x=0$  (fig. 193), quand  $C$  coïncide avec  $D$ , on doit ensuite tirer les valeurs de  $CD$ , qui sont  $AC - AD$  (fig. 193), et  $AD - AC$  (fig. 190); ce qui montre que  $x$  a un signe différent.

335 Appliquons cette théorie. Dans le triangle  $ABC$  (fig. 201), menons, par un point donné  $D$ , une droite  $DF$ , et cherchons le rapport  $\alpha$  des deux triangles  $ABC$ ,  $AEF$ . Faisons  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ; menons  $DI$  parallèle à  $AC$ , et soient  $AI = d$ ,  $DI = f$ ,  $AF = x$ . Le rapport  $\alpha$  est =  $\frac{AE \times AB}{AC \times AF}$  (n° 264). Or, les triangles semblables  $AEF$ ,  $DIF$  donnent

$$AE = \frac{fx}{x+d}, \text{ d'où}$$

$$abc(x+d) = fx^2 \dots (A).$$

Cette équ. suppose que le point  $D$  est dans l'angle  $IAC$ , mais si ce point est en  $D'$  dans l'intérieur du triangle, on aura une figure indirecte à la première. Faisons mouvoir  $D$  vers  $D'$ ,  $DI$  deviendra  $D'I'$ , sans que  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ni  $f$  aient passé par 0 ou 00;  $AI$  devenant  $AI'$ , a pu seul être indirect, et l'est en effet, puisque  $AI = IB - AB$  et  $AI' = AB - IB$ . Notre équ. n'est donc applicable à ce cas qu'après avoir changé  $d$  en  $-d$ , savoir  $abc(x-d) = fx^2$ .

Et si  $D'$  se transporte en  $D''$ ,  $D'I'$  passera par zéro pour être  $D''I''$ ; on s'assure ensuite que  $D'I'$  est indirecte, et que  $f$  doit être changé de signe, tandis que  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  restent comme ils étaient, d'où  $abc(d-x) = fx^2$ . Ce cas, compare au 1<sup>er</sup>, a comporté deux indirectes  $d$  et  $f$ ;  $IF$  l'est pareillement; mais cette ligne n'étant pas exprimée par l'une des lettres du calcul, il n'a pas été nécessaire d'y avoir égard.

Enfin, si la droite  $DF$  doit couper l'angle  $F'AF'$  (fig. 201 bis), il est aisé de voir, en faisant tourner  $DF$  pour devenir  $DE'$ , que  $AF$  deviendra  $AF'$  en passant par zéro, et qu'il faut chan-

ger  $x$  en  $-x$  dans l'équ. (A), ce qui la change en la précédente.

Il est d'ailleurs facile de traiter directement chaque cas, et d'arriver aux équ. correspondantes : la théorie que nous exposons est précisément destinée à éviter de recommencer ainsi les calculs, et à prouver que l'une des équ. renferme toutes les autres, et qu'on peut en déduire celles-ci par de simples changemens de signes. Conformément à l'esprit de l'Algèbre, une même équ. renfermera donc tous les cas, il ne faut que savoir interpréter cette langue pour en conclure toutes les circonstances que peut offrir la question.

336. Comme toute équ. doit donner la valeur de l'une des lettres qui y entrent, il se peut que précisément cette lettre soit celle qui a dû subir le changement de signe pour pouvoir s'appliquer à la figure proposée ; alors on en tire une valeur négative, telle que  $x = -k$ , dont il est aisé de comprendre le sens. En effet, pour obtenir l'équ.  $X = 0$ , on a dû supposer le problème résolu, et construire une figure d'après l'état hypothétique des données et de l'inconnue. La solution négative qu'on obtient annonce que la figure supposée ne peut s'accorder avec la question, et qu'en formant cette figure, et la prenant pour base des raisonnemens, on a introduit des conditions contradictoires. Si l'on change  $x$  en  $-x$ , l'équ.  $X' = 0$  n'appartiendra plus qu'à une figure indirecte, c'est à celle-ci, et non à la figure supposée, que convient la solution  $x = k$ . On devra donc faire mouvoir les points de cette dernière, jusqu'à ce que  $X' = 0$  convienne, en faisant, bien entendu, passer par 0 ou  $\infty$  quelques lettres. Alors c'est à la figure ainsi modifiée que convient la solution  $x = k$ .

— Appliquons ces considérations à divers exemples. —

1. Étant donné un point  $D$  (fig. 201) hors du triangle  $ABC$ , mener la droite  $DF$  telle, que les deux triangles  $AEF$ ,  $ABC$  soient dans un rapport donné  $\alpha$ .  $D$  étant supposé dans l'angle  $IAC$ , on a trouvé l'équ. (A), page 354, d'où l'on tire deux solutions, l'une positive, qui det rmine le point  $F$ ; l'autre négative, et quise rapporte à la fig. 201 bis, où  $DF'$  coupe l'au-

gle  $F'AE'$ ; cela suit de ce qui a été dit pour les cas où  $x$  est changé en  $-x$  (\*).

Par le point  $D$ , mener  $DF$  qui sépare, dans l'angle indéfini  $CAB$ , un triangle  $AEF$  égal à un carré donné  $q$ . Fermons, par une droite quelconque  $BC$ , le triangle  $ABC$ , dont nous serons l'aire  $= r$ , carré connu (n° 256); on suppose  $r >$  ou  $= q$ . Par condition,  $q$  et  $r$  sont données. Voilà donc notre rapport connu  $a = \frac{q^2}{r}$ , et nous retombons sur le 1<sup>er</sup> problème (\*\*).

II. Étant donnée une corde  $AD$  (fig. 202), du point  $O$ , extrémité du diamètre  $CB$  qui lui est perpend., mener une droite  $OE$  telle, que la partie  $FE$ , comprise entre la corde et l'arc, soit de longueur donnée  $m$ . Soient  $AB = a$ ,  $BO = b$ ,  $FE = m$  et  $OF = x$ ; nous aurons  $OF \times FE = AF \times FD$  ou  $mx = (a + BF)(a - BF)$ ; or,  $BF^2 = x^2 - b^2$ ; donc...  $mx = a^2 + b^2 - x^2$ , d'où

$$x = -\frac{1}{2} m \pm \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{1}{4} m^2}.$$

L'une de ces solutions est positive; elle n'offre aucune difficulté, et se construit aisément: pour interpréter l'autre, changeant  $x$  en  $-x$ , nous aurons  $mx = x^2 - a^2 - b^2 = BF'^2 - a^2$ ;

(\*) Voici divers problèmes de même nature. Séparer d'un triangle donné  $ABC$ , un triangle  $AEF$ , qui soit à  $ABC$  dans le rapport connu de  $m$  à  $n$ .

1<sup>o</sup>. Par une ligne menée du sommet  $B$ , ou d'un point  $F$  de la base. fig. 134 (voy. n° 256 et page 301);

2<sup>o</sup>. Par une parallèle à la base (voy. page 349);

3<sup>o</sup>. Par une ligne  $EF$  perpendiculaire à la base  $AC$ , fig. 193, page 338.

(\*\*) Si, par le point donné, on mène une droite qui coupe un polygone quelconque, et en sépare une portion égale à un carré  $c^2$ , en prolongeant les deux côtes occupés par cette droite jusqu'à leur rencontre, l'aire extérieure au polygone, et comprise dans cet angle, étant désignée par  $A$ , celle qui est séparée de ce même angle est  $c^2 + A$ . Si donc on veut séparer d'un polygone donné une aire  $c^2$  connue, il suffira de prolonger deux côtes quelconques, et de séparer de l'angle qu'ils forment, l'aire  $c^2 + A$ . On aura soin de comparer ainsi tous les côtes, deux à deux, pour obtenir toutes les solutions, en négligeant celles où la sécante se trouve ne couper l'un des côtes qu'à son prolongement. On pourrait encore, au lieu de donner  $c^2$ , prescrire que la partie séparée du polygone fût à son aire dans le rapport donné de  $m$  à  $n$ .



ce qui suppose  $BF > a$  ou  $BD$ . Faisons donc tourner  $OF$  jusqu'en  $OF'$ ; on voit qu'alors  $a$ ,  $b$ ,  $x$  sont demeurés directs; mais lorsque  $OF$  passe en  $D$ ,  $FE$  et  $FD$  sont rendus nuls; de plus  $FD = BD - BF$  et  $F'D = BF' - BD$ : donc  $F'D$  est indirect à  $FD$ . Il en est de même de  $F'E' = m$ ; car on a (n° 221)  $FE = \frac{AF \times FD}{FO}$ , où  $FD$  est indirecte. Donc la solution qui convient à  $F'O$  se trouve en changeant ici  $m$  en  $-m$ , ou, ce qui revient au même,  $x$  en  $-x$ .

La question admet donc deux solutions à droite de  $OB$  (et par conséquent deux à gauche); l'une est donnée par la racine positive, l'autre par la racine négative (\*). Du reste il pourrait arriver que la question proposée n'admit pas les solutions indirectes; c'est ce qui a lieu lorsque le problème exige que  $FE$  soit pris dans le cercle, et non au-dehors: alors les solutions négatives deviennent insignifiantes; on en a vu des exemples n° 330.

III. Quel est le segment sphérique  $GADI$  (fig. 167) dont le volume est égal à celui du cône  $CDIG$ ? On a vu, p. 333, que le secteur  $DAG = \frac{1}{2} \pi r^2 h$ , en faisant la flèche  $AI = h$ , d'ailleurs le cône  $CDGI = \frac{1}{3} CI \times \text{cercle } DI = \frac{1}{3} (r - h) \pi k^2$ , en faisant la demi-corde  $DI = k$ . La condition imposée revient à dire que le cône est la moitié du secteur, d'où  $(r - h)k^2 = r^2 h$ ; mais  $DI$  est moyen proportionnel entre les segments du diamètre, ou  $k^2 = h(2r - h)$ ; ainsi  $(2r - h)(r - h) = r^2$ , ou  $h^2 - 3rh + r^2 = 0$ , et  $h = \frac{1}{2} r(3 \pm \sqrt{5})$ . De ces deux solutions, celle qui répond à  $+\sqrt{5}$  est insignifiante, puisqu'il faut visiblement que  $h$  soit  $< 2r$ .

337. Il est un genre de problèmes qui se rapportent à cette théorie, et qui méritent de nous arrêter.

---

(\*) Cet exemple prouve que le nombre des solutions d'une question n'est pas toujours donné par le degré de l'inconnue, pour n'en omettre aucune, il faut faire varier la figure, la comparer avec toutes ses indirectes, en laissant toujours les données fixes.



Supposons qu'il faille déterminer, d'après des conditions données, un point  $B$  (fig. 203) sur une ligne fixe  $CB$  : on prend un point arbitraire  $A$ , qu'on nomme *Origine*, et l'on cherche la distance  $AB = x$  entre ces deux points. Il peut arriver alors que l'équ.  $X = 0$ , qui renferme les conditions du problème, admette une solution négative  $x = -a$  ; il s'agit d'expliquer ce résultat.

On a vu que  $x = a$  répond au problème proposé, en y supposant cependant que  $x$  devienne indirecte : or, si le point  $B$  se meut vers  $C$  pour se placer en  $B'$ ,  $AB$  sera nul lorsque  $B$  tombera sur  $A$  ; ensuite  $AB$  deviendra indirecte, car  $AB = CB - CA$ , et  $AB' = CA - CB'$ . Si donc rien n'indique, dans le problème, que le point cherché soit situé à droite de l'origine  $A$ , il est clair que la distance  $x = a$ , portée de  $A$  en  $B'$ , c.-à-d. à gauche, y satisfait. On voit même que la solution négative  $x = -a$  indique, dans  $X = 0$ , une absurdité, qui provient de ce que, pour obtenir cette équ., on a supposé le point cherché placé en  $B$ , à droite de l'origine, position contradictoire à celle que la question comporte, puisqu'on a donné à la figure hypothétique, d'après laquelle on a obtenu l'équ.  $X = 0$ , une forme indirecte de celle qu'elle devait affecter réellement. Cette erreur est rectifiée en plaçant  $B$  à gauche de  $A$ , en  $B'$ .

338. On doit conclure de là que toutes les fois que le but d'un problème est de trouver, sur une ligne fixe, la distance d'un point inconnu à l'origine, il faut supprimer le signe des solutions négatives que donne le calcul, et en porter les valeurs en sens opposé à celui où on les avait placées pour obtenir l'équation.

C'est ce qu'on a pu remarquer dans le problème (n° 329, II), où l'on a porté aussi l'inconnue  $GI$  (fig. 196) de  $G$  en  $I$ . De même pour le problème III, on a pris  $CD' = CD$  (fig. 197), et  $D'$  a été un nouveau point de contact du cercle cherché avec la droite  $DB'$ , etc.

Resolvons encore ce problème.

Sur une ligne  $AC$  (fig. 203), quel est le point  $B'$  dont les

distances aux points fixes  $A$  et  $C$  forment un produit donné  $= m^2$ . Soit  $AC = a$ ,  $CB' = x$ ; on a  $AB' = a - x$ , d'où

$$x(a - x) = m^2, \text{ et } x = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} a\right)^2 - m^2}.$$

Il sera facile de construire cette solution qui est double (n° 330). Si  $m > \frac{1}{2} a$ ,  $x$  devient imaginaire; mais il ne faut pas en conclure qu'il y ait absurdité dans la question; car l'erreur peut provenir de ce qu'on a attribué au point cherché  $B'$  une position qui ne lui convenait pas. Plaçons-le donc en  $B$ , hors de l'espace  $AC$ , alors  $CB = x$  donne  $AB = x - a$ , puis

$$x(x - a) = m^2, \text{ et } x = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} a\right)^2 + m^2}.$$

Il en résulte que, 1°. si la question exige que le point demande soit situé hors de  $AC$ , elle n'est jamais absurde, et ses deux solutions sont l'une en  $B$ , l'autre en  $E$ ; celle-là provient de la racine positive, et celle-ci de la négative, ou  $EC = AB$ .

2°. Si la question exige que le point soit situé entre  $A$  et  $C$ , elle est absurde, à moins que  $m$  ne soit  $< \frac{1}{2} AC$ , c.-à-d. que le plus grand rectangle qu'on puisse faire avec les deux parties de  $AC$  est le carré de sa moitié (n° 97, III.). On remarquera surtout que l'absurdité indiquée par le symbole imaginaire résulte précisément d'une erreur de position du point  $B$ , analogue à celle qui conduit ordinairement aux solutions négatives; ce qui jette un grand jour sur la théorie que nous avons développée.

3°. Enfin, si la question laisse la liberté de placer le point cherché entre  $A$  et  $C$ , ou en dehors, elle admet 2 ou 4 solutions, suivant que  $\frac{1}{2} a$  est  $<$  ou  $> m$ . Dans ce dernier cas, le nombre des solutions n'est point donné par le secours de l'Algèbre seule, ou plutôt l'Algèbre donne en effet tout ce qu'elle doit donner, puisqu'elle ne rend que ce qu'on lui a confié. Le problème II, p. 356, est dans le même cas.

339. Dans tout problème de Géométrie, il y a comme on voit, deux choses à remarquer.

1°. Toute équ. n'est vraie que pour la fig. d'où on l'a tirée, et qui doit y demeurer annexée; si l'on veut l'appliquer à une

autre fig. indirecte à la 1<sup>re</sup>, on devra y changer les signes de certaines lettres désignant les données.

2<sup>o</sup> Quand l'inconnue  $x$  est négative, l'équ. d'où elle est déduite est défectueuse en tant qu'on l'applique à la fig. directe; il faut y changer la distribution des parties, pour l'amener à donner une valeur de  $x$  positive. Par ex., si la longueur  $x$  est comptée sur une ligne fixe, elle devra être portée en sens contraire à celui qu'on a supposé.

340. Pour déterminer la situation d'un point  $M$  sur un plan (fig. 210), on a coutume d'employer le procédé suivant. On trace deux droites quelconques  $Ax$ ,  $Ay$ , et par le point  $M$  on mène les parallèles  $MQ$ ,  $MP$  à ces lignes. Soient . . . . .  $MQ = x = AP$ , qu'on nomme l'abscisse;  $MP = y = AQ$ , qui est l'ordonnée du point  $M$ . Si ces longueurs sont données, le lieu du point  $M$  sera connu, puisqu'en prenant  $AP = x$ ,  $AQ = y$ , chacune des lignes  $PM$ ,  $QM$ , parallèles à  $Ay$ ,  $Ax$ , devra contenir ce point, il sera donc à leur intersection. Si  $y = 0$ , le point est situé sur  $Ax$ ; il est sur  $Ay$  lorsque  $x = 0$ ; enfin, pour le point  $A$ ,  $x$  et  $y$  sont nuls;  $Ax$  et  $Ay$  sont appelés les axes,  $A$  est l'origine, l' $x$  et l' $y$  sont des coordonnées de  $M$ .

Il est vrai que rien ne disant à priori, si le point est placé dans l'angle  $yAx$ , plutôt que dans ceux  $yAx'$ ,  $y'Ax$ , ou  $y'Ax'$ , la longueur  $x$  aurait pu être portée en  $AP'$ , et de même  $y$  en  $AQ'$ , de sorte que les quatre points  $M, N, M', N'$ , satisfaisant aux conditions données, il y aurait indécision entre eux; mais il suit de ce qu'on a dit ci-dessus, que, 1<sup>o</sup>. si le point est inconnu, le calcul le déterminera en donnant ses coordonnées  $x$  et  $y$ , et selon les signes, on assignera sa position. Nous supposerons dorenavant que les  $x$  positives sont comptées de  $A$  vers la droite; et les  $y$  positives de  $A$  vers la partie supérieure. Ainsi, pour les points situés dans

L'angle  $yAx$ , tel que  $M$ ,  $x$  et  $y$  sont positifs

L'angle  $yAx'$ , tel que  $N$ ,  $x$  est négatif et  $y$  positif

L'angle  $y'Ax$ , tel que  $M'$ ,  $x$  est positif et  $y$  négatif

L'angle  $y'Ay'$ , tel que  $N'$ ,  $x$  et  $y$  sont négatifs.

2<sup>o</sup>. Si le point est donné, l'équ. tirée de sa situation supposée

n'aura besoin d'être modifiée, quant à certains signes, qu'autant qu'on serait varier la position de ce point; et pour éviter la nécessité de conserver la fig. annexée à l'équ. qui en est résultée, on suppose ordinairement au point quelconque donné la situation  $M$  dans l'angle  $yAx$ , afin que cette fig. s'offre d'elle-même; on distingue aisément ensuite, quand on veut appliquer la formule à un ex., proposé, s'il y a lieu de changer les signes des coordonnées  $x$  et  $y$  de quelque point donné.

L'angle  $xAy$  des coordonnées est le plus souvent *droit*; alors les lignes  $x$  et  $y$  étant perpendiculaires aux axes, sont les distances du point  $M$  à ces droites, ce qui simplifie le discours et facilite les constructions.

## II. TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

### *Des Sinus, Cosinus, Tangentes, etc.*

341. Jusqu'ici nous avons plutôt évalué les inconnues en lignes qu'en nombres; cependant on sent que l'exactitude des solutions graphiques dépendant de la perfection des instrumens et de l'adresse avec laquelle on les emploie, pour obtenir des approximations aussi grandes qu'on veut, on doit préférer l'usage des nombres. Comme on décompose toutes les figures rectilignes en triangles, les opérations *géodésiques* les plus compliquées se réduisent, en dernière analyse, à des résolutions de triangles, c'est-à-dire à la recherche de la valeur *numérique* des diverses parties qui les composent. La *Trigonométrie* est la doctrine qui enseigne ces sortes de calculs.

Il est nécessaire de trouver des équ. qui lient les angles d'un triangle à ses côtés, afin que plusieurs de ces parties étant données, on puisse trouver les autres. L'introduction des angles dans le calcul exige quelques précautions, parce qu'ils ne peuvent être rapportés à la même unité que les lignes. On a remarqué que l'angle  $BCA$  (fig. 206) serait déterminé, si la position d'un point quelconque du côté  $AC$  l'étant par rapport



au côté  $AC$ . Décrivons du sommet  $C$ , avec un rayon quelconque  $CK$ , l'arc  $KG$ ; l'abscisse  $CL$  et l'ordonnée  $LK$  rectangulaires déterminent le point  $K$ , et par conséquent l'angle  $C$ ; même une de ces longueurs suffit, parce que le rayon est connu.

L'abscisse (fig. 205)  $CD$  d'un point quelconque  $B$  de la circonférence s'appelle le *Cosinus* de l'arc  $AB$ ; l'ordonnée  $BD$  est le *Sinus*; on définit ainsi ces lignes : le *sinus* d'un arc est la perpendiculaire abaissée de l'une des extrémités de l'arc sur le rayon qui passe par l'autre extrémité; le *cosinus* est la distance du pied du sinus au centre.

342. Si l'on eût élevé  $HG$  (fig. 206) perpendiculaire sur  $CA$ , et par conséquent tangente en  $G$ , l'une des longueurs  $GB$  et  $CH$  aurait aussi déterminé l'angle  $C$  et l'arc  $KG$  : on nomme  $HG$  la *Tangente* et  $CH$  la *Sécante* de cet arc, ce ne sont plus, comme en Géométrie, des lignes indéfinies. La *tangente*  $AT$  d'un arc  $AB$  (fig. 205) est la partie qu'interceptent, sur la tangente menée à l'une des extrémités de cet arc, les deux rayons qui le terminent; la *sécante*  $CT$  est le rayon prolongé jusqu'à la tangente.

Lorsque l'arc  $EB$ , complément de  $AB$ , est déterminé,  $AB$  l'est également; on peut donc fixer la grandeur d'un arc  $AB$ , en donnant le sinus  $GB$ , la tangente  $EM$ , ou la sécante  $CM$  du complément  $BE$ ; c'est ce qu'on nomme le *Cosinus*, la *Cotangente* et la *Cosécante* de l'arc  $AB$ , ou le sinus, la tangente et la sécante du complément de cet arc.

343. Le rayon étant donné, la grandeur d'un angle ou d'un arc dépend de celle de son sinus, ou son cosinus, ou sa tangente, ou sa sécante, ou sa cotangente, ou sa cosécante, qu'on désigne par *Sin*, *Cos*, *Tang*, *Séc*, *Cot*, *Coséc*. Nous pourrions donc, dans les calculs, introduire les arcs et les angles, en nous servant de la même unité que pour les lignes droites, but que nous nous étions proposé. Mais, avant de faire usage de ces considérations, comparons ces *lignes trigonométriques* entre elles, et cherchons les équ. qui les lient, puisqu'il est évident qu'une seule étant connue, les autres en dépendent.



Le triangle rectangle  $BCD$  (fig. 205) donne  $CD^2 + BD^2 = CB^2$ :  
 $CD$  est le cosinus,  $DB$  le sinus de l'arc  $AB = a$ ,  $CB$  est le  
 rayon  $R$ ; donc

$$\sin^2 a + \cos^2 a = R^2 \dots (1)$$

Le triangle rectangle  $CAT$  donne  $CT^2 = CA^2 + AT^2$

$$\sec^2 a = \tan^2 a + R^2 \dots (2).$$

Les triangles semblables  $CBD$ ,  $CTA$  donnent

$$\frac{CD}{BD} = \frac{CA}{AT} \text{ et } \frac{CD}{CA} = \frac{CB}{CT},$$

ou 
$$\tan a = \frac{R \sin a}{\cos a} \dots (3),$$

$$\sec a = \frac{R}{\cos a} \dots (4).$$

Cette dernière formule prouve que le rayon est moyen proportionnel entre le cosinus et la sécante : du reste, les équ (1), (2) et (3), suffisant pour exprimer que les triangles  $CBD$ ,  $CTA$  sont rectangles et semblables, la 4<sup>e</sup> est une conséquence des trois autres. Ainsi, on ne doit pas regarder ces quatre relations comme distinctes; elles n'équivalent qu'à trois. On peut même s'en convaincre directement en déduisant l'une quelconque des autres par l'élimination.

344. Ces formules doivent aussi avoir lieu entre le sinus, le cosinus, la tangente et la sécante de l'arc  $EB$  complément de  $AB$ . On peut donc y changer le sinus en cosinus, la tangente en cotangente, etc., mais les triangles semblables  $CBD$  (ou  $CBG$ ), et  $CME$ , donnent directement ces nouvelles relations;

on a 
$$\frac{CG}{CE} = \frac{GB}{EM}, \quad \frac{CG}{CB} = \frac{CE}{CM}; \text{ d'où}$$

$$\cot a = \frac{R \cos a}{\sin a} \dots (5); \quad \text{et} \quad \operatorname{cosec} a = \frac{R}{\sin a} \dots (6).$$

En multipliant les formules 3 et 5, ou comparant les deux triangles  $CTA$  et  $CME$ , on trouve que le rayon est moyen proportionnel entre la tangente et la cotangente, ou

$$\tan a \times \cot a = R^2 \dots (7).$$

Enfin, le triangle rectangle  $CME$  donne  
 $CM^2 = CE^2 + EM^2$ , ou  $\operatorname{cosec}^2 a = R^2 + \cot^2 a \dots (8)$ .

345. Ces 8 équ., qui n'en forment que 5 distinctes, servent à trouver les quantités  $\sin a$ ,  $\cos a$ ,  $\tan a$ ,  $\cot a$ ,  $\sec a$ ,  $\operatorname{cosec} a$ , lorsque l'une est connue. Il suffit d'un calcul simple pour éliminer. Par ex., (1) donne le sinus quand le cosinus est connu, et réciproquement; car

$$\sin a = \sqrt{R^2 - \cos^2 a}, \text{ et } \cos a = \sqrt{R^2 - \sin^2 a}.$$

De même, (2) donne la tangente quand on la sécante, etc. . . .

346. Parmi ces combinaisons, nous distinguerons la suivante à cause de son utilité. Cherchons le cosinus, étant donnée la tangente. De (4), on tire  $\cos a = \frac{R^2}{\sec a}$ ; et comme (2) donne—

$\sec a = \sqrt{R^2 + \tan^2 a}$ , on en conclut

$$\cos a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + \tan^2 a}} \dots (9);$$

enfin, (3) donnant  $R \sin a = \cos a \times \tan a$ , on a

$$\sin a = \frac{R \tan a}{\sqrt{R^2 + \tan^2 a}} \dots (10).$$

On appelle  $AD$  le *sinus-verse* de l'arc  $AB$ ; d'où

$$\text{sin-verse } a = R - \cos a.$$

347. Par  $\sin a$ ,  $\cos a \dots$ , il faut entendre le sinus, cosinus... d'un arc dont la longueur est  $a$ , le rayon étant fixé  $= R$ ; or, cette longueur dépend du rapport de l'arc  $a$ , avec le quadrans, et sa détermination semble exiger un calcul, mais lorsqu'on emploie les arcs pour mesurer des angles, le rayon est tout-à-fait arbitraire; les arcs semblables étant proportionnels aux rayons (n° 182, 3°.), ce n'est plus la longueur absolue de l'arc qui entre dans les calculs, mais son rapport avec le rayon. Les sinus croissent aussi proportionnellement aux rayons,

l'angle demeurant le même (fig. 206), puisqu'on a  $\frac{KI}{CK} = \frac{BA}{CB}$ .

Le rapport du sinus au rayon s'appelle le *Sinus naturel*; il a pour

valeur le sinus de l'arc semblable pris dans le cercle dont le rayon est  $un$ , puisque  $\sin a$  et  $\frac{\sin a}{R}$  sont alors équivalens.

Concluons de là que, 1°. lorsque le rayon sera ainsi arbitraire, ce qui arrive la plupart du temps, nous ferons  $R=1$ , pour simplifier les formules; d'où

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \quad \tan^2 a + 1 = \sec^2 a, \quad \tan a \cdot \cot a = 1,$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}, \quad \sec a = \frac{1}{\cos a}, \quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a}, \text{ etc.}$$

2°. Mais la supposition  $R=1$  rendant les calculs propres aux cas seulement où le rayon est arbitraire, si l'on veut rétablir les formules dans l'état plus général où le rayon  $R$  est dé-

terminé, on y remplacera  $\sin a$ ,  $\cos a$ , ..., par  $\frac{\sin a}{R}$ ,  $\frac{\cos a}{R}$ , ... ,

ou plutôt on distribuera des puissances convenables de  $R$ , de manière à produire l'homogénéité (n° 322)

3°. Lorsqu'on connaîtra la valeur numérique  $\sin a$  du sinus d'un arc  $a$ , pris pour un rayon  $R$ , on aura celle du sinus de l'arc  $a$  semblable, dans le cercle dont le rayon est  $R'$ , en multipliant par le rapport du deuxième rayon  $R'$  au premier  $R$ , car

$$\frac{\sin a}{R} = \frac{\sin a'}{R'} \text{ donne } \sin a' = \frac{R'}{R} \times \sin a.$$

4°. Dans la mesure des angles, on n'emploie pas la longueur absolue des arcs, mais leur rapport au quadrans; ainsi, par  $\sin a$ , on entend le sinus d'un arc dont  $a$  est le nombre de degrés. (Voyez n° 183)

348 L'arc de cercle (de rayon  $R$ ) dont la longueur est  $a$ , ayant pour graduation ( $a^\circ$ ), exprimée en degrés et fractions décimales, ou ( $a'$ ) en minutes, ou ( $a''$ ) en secondes, cherchons des relations entre ces quantités. Le rayon étant 1, la longueur de la demi-circonf. est (page 278)

$$\pi = 3,14159\ 26536, \quad L\pi = 0,49714\ 98727;$$

$\pi$  est la longueur de  $180^\circ$  ou de  $10800'$ , ou de  $648000''$ , on a  $180^\circ : \pi :: (a^\circ) : a$ , d'où  $\pi(a^\circ) = 180 \cdot a$ ; de même  $\pi(a') = 10800 \cdot a$ ,

$a(a'') = 648000 a$ ; donc en divisant par  $a$ , et posant

$$\mu = 57^{\circ}, 29578, \mu' = 3437', 746, \mu'' = 206264'', 8,$$

on a  $R(a'') = \mu a, R(a') = \mu' a, R(a) = \mu'' a$ .

Ces équ. donnent la longueur  $a$  d'un arc de rayon  $R$ , dès qu'on connaît la graduation, et réciproquement.

Si l'on fait  $a = R$ , on a  $a(a'') = \mu$ ;  $\mu$  est donc le nombre de degrés de l'arc égal au rayon;  $\mu', \mu''$  sont les nombres de minutes ou de secondes de cet arc. Courbons le rayon sur la circonférence, il y occupera une longueur de  $(a'')$  degrés, ou de  $(a')$  minutes, ou de  $(a'')$  secondes. Prenons ensuite un arc d'un degré, ou  $(a'') = 1$ , le rayon  $R$  étant 1; nous avons

$$\mu = \frac{1}{\text{arc } 1''}, \text{ de même } \mu' = \frac{1}{\text{arc } 1'}, \mu'' = \frac{1}{\text{arc } 1''} = \frac{1}{\sin 1''}$$

attendu que les arcs de  $1'$  et de  $1''$  étant très petits, on peut, sans erreur sensible, les remplacer par leurs sinus (n° 362). On conclut de là que lorsqu'il entre, dans une expression analytique, un arc de cercle déterminé par sa longueur  $a$ , le rayon étant un, pour y introduire à la place le nombre de secondes  $(a'')$  de cet arc, il suffit de remplacer  $a$  par  $(a'') \sin 1''$ ; et par  $(a')$  sin 1' si l'on veut exprimer l'arc en minutes. On trouve

$\text{Log } \mu = 1,75812 \ 26324,$	$\text{compl.} = 2,24187 \ 73676,$
$\text{Log } \mu' = 3,53627 \ 38828,$	$\text{compl.} = 4,46372 \ 61172 = L \sin 1',$
$\text{Log } \mu'' = 5,91442 \ 51332,$	$\text{compl.} = 6,08557 \ 48668 = L \sin 1'',$

349. Jusqu'ici notre arc  $AB$  est  $<$  le quadrans (fig. 205); faisons mouvoir le point  $B$  de  $A$  vers  $EH A' K$ . . . pour lui faire décrire le cercle entier, et suivons les variations qu'éprouvent le sinus et le cosinus. En  $A$  le sinus  $= 0$ , le cosinus  $= R$ . À mesure que l'arc  $AB$  croît, le sinus augmente, le cosinus diminue, jusqu'en  $E$ ; le quadrans  $AE$  a  $R$  pour sinus et 0 pour cosinus.

Passé 45 degrés sexagésimaux, un arc, tel que  $53^{\circ}$ , ayant pour complément  $37^{\circ}$ , le sinus de l'un est le cosinus de l'autre: ayant donc une table de sinus et de cosinus, étendue jusqu'à  $45^{\circ}$ , la colonne des cosinus est aussi celle des sinus des arcs complémentaires.

mentaires, qui sont  $> 45^\circ$ ; on a même soin d'y indiquer ces complémens.

Au-delà de  $AE = 90^\circ$ , le sinus décroît, le cosinus augmente : on voit que, pour  $AFH$ , les triangles égaux  $HIC = BDC$  ont  $HI = BD$ ; ainsi, le sinus d'un arc est le même que celui de son supplément. La même chose a lieu pour le cosinus, car  $IC = CD$ ; seulement, lorsque l'arc est  $> 1^\circ$  le cosinus est négatif (n° 340). Pour la demi-circonf.  $AEA'$ , le sinus  $= 0$ , le cosinus  $= -R$ .

Nous voyons donc que passé  $90^\circ$ , les sinus et cosinus se reproduisent; pour  $137^\circ$  le sinus est le même que celui de  $43^\circ$ , qui en est le supplément : on peut même préférer le cosinus de  $47^\circ$  qui lui équivaut;  $\sin 137^\circ = \sin 43^\circ = \cos 47^\circ$ . On voit qu'il suffit d'être aux dixaines et de changer le sinus en cosinus, lorsque l'arc passe  $90^\circ$ . Cette remarque est surtout utile lorsque l'arc est accompagné de minutes et de secondes; de même

$$\cos 137^\circ 17' 32'' = -\sin 47^\circ 17' 32''.$$

Quant aux autres lignes trigonométriques, on pourrait suivre de même sur la figure leurs variations et leurs signes, mais il est préférable de recourir aux formules 3, 4, 5, 6, puisque l'on vient de reconnaître les signes du sinus et du cosinus. On verra donc que

$\sin 0 = 0$ ,  $\cos 0 = R$ , donnent  $\tan 0 = 0$ ,  $\sec 0 = R$ ,  $\cot 0 = \infty$ ,  
 $\sin 1^\circ = R$ ,  $\cos 1^\circ = 0$ . . . .  $\tan 1^\circ = \infty = \sec 1^\circ$ ,  $\cot 1^\circ = 0$ .

Dans le premier quadrans  $\tan a$ ,  $\sec a$  croissent avec  $a$ ,  $\cot a$  décroît;  $\sin a$  est positif dans le second quadrans,  $\tan a$ ,  $\sec a$  décroissent,  $\cot a$  croît avec l'arc  $a$ ;  $\tan a$  et  $\cot a$  sont négatifs. On voit, comme ci-dessus, que  $\tan 137^\circ = -\cot 47^\circ$ ,  $\cot 137^\circ = -\tan 47^\circ$ .

Dans les deux autres quadrans, le sinus et le cosinus reprenant les mêmes valeurs, on voit que tout arc plus grand que le quadrans, a pour sinus, cosinus, tangente, la même valeur, en étant  $180^\circ$  autant de fois qu'il est possible; seulement il faut avoir égard aux signes; ceux du sinus et du cosinus sont connus et servent à déterminer les autres. Ainsi  $\sin 257^\circ = -\sin 77^\circ$ ,  $\tan 643^\circ = \tan 103^\circ = -\cot 13^\circ$ .



Ces diverses propositions s'expriment ainsi : pour l'arc

- 1 quad +  $\alpha$  ... le  $\sin = \cos \alpha$ , le  $\cos = -\sin \alpha$ , la tang =  $-\cot \alpha$ .  
 2 quad +  $\alpha$  ... le  $\sin = -\sin \alpha$ , le  $\cos = -\cos \alpha$ , la tang = tang  $\alpha$ .  
 3 quad +  $\alpha$  ... le  $\sin = \cos \alpha$ , le  $\cos = \sin \alpha$ , la tang =  $-\cot \alpha$ .

Si l'arc passe 4 quadrans, ou  $360^\circ$ , il faut d'abord en retrancher toutes les circonférences. On voit maintenant pourquoi les tables de sinus, cos. . . , ne s'étendent pas au-delà du quadrans, ni même du demi quadrans.

350. Lorsque l'arc est déterminé, son sinus, sa tangente, son cosinus. . . le sont; mais l'inverse n'est point vrai; ainsi le sinus  $BD$  (fig. 205) appartient non-seulement à l'arc  $AB$ , mais aussi à son supplément  $AH$ , et à ces arcs  $AB$  et  $AH$ , augmentés d'un nombre quelconque de circonférences. Tous ces arcs nous donnent que deux angles supplémentaires l'un de l'autre. On fera le même raisonnement pour les cos. . . On doit donc s'attendre à trouver deux angles pour solutions, toutes les fois que le calcul aura déterminé le sin ou le cos. . . ; il reste ensuite à négliger s'il y a lieu, celle qui ne convient pas au problème.

351. En regardant l'arc  $AF$  comme étant de signe contraire à  $AB$ , on voit que (page 360)

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \text{tang}(-\alpha) = -\text{tang} \alpha.$$

### Formules générales

352. La résolution des triangles est renfermée dans un nombre convenable d'équ. entre les côtes et les angles.

En prolongeant  $BD$  (fig. 205), on a  $BD = BF$ ; ainsi le sinus d'un arc est la moitié de la corde d'un arc double.

Si  $BF$  est égal au rayon, il sera le côté de l'hexagone régulier inscrit (238),  $BAF$  sera le sixième de la circonf., et  $BA$  sera le tiers de  $AE$ . Le sinus du tiers du quadrans est donc la moitié du rayon. Les formules (1), (3), (5), donnent

$$\sin \frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{2} R, \cos \frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{2} R \sqrt{3}, \text{tang} \frac{1}{2}^\circ = \frac{R}{\sqrt{3}}, \cot \frac{1}{2}^\circ = R \sqrt{3}.$$

on connaît aussi  $\sin \frac{1}{2}^\circ$ , puisque  $\cos \frac{1}{2}^\circ = \sin \frac{1}{2}^\circ$  : d'où

$$\sin \frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{2} R \sqrt{3}, \cos \frac{1}{2}^\circ = \frac{1}{2} R, \text{tang} \frac{1}{2}^\circ = R \sqrt{3}, \cot \frac{1}{2}^\circ = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

353. Lorsque l'arc  $AB$  (fig. 205) est de  $45^\circ$ , ou la moitié de  $AE$ , le triangle  $CTA$  est isoscèle, ainsi on a  $AT = AC$ , ou la tangente de  $45^\circ$  est égale au rayon. Donc

$$\text{tang } 45^\circ = R = \cot 45^\circ, \cos 45^\circ = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \sin 45^\circ, \\ \text{tang } 135^\circ = -R = \cot 135^\circ, \sin 135^\circ = \frac{R}{R\sqrt{2}} = -\cos 135^\circ.$$

354. Soit  $CAB$  (fig. 206) un triangle rectangle en  $A$ ; si d'un angle aigu  $C$ , avec le rayon  $CK = 1$ , on décrit l'arc  $KG$ , et si l'on mène le sinus  $KI$  et la tangente  $HG$ ,  $CI$  sera le cosinus de  $C$ , or les triangles semblables  $CKI$ ,  $CHG$ ,  $CAB$  donnent

$$\frac{CK}{CI} = \frac{CB}{CA}, \quad \frac{CK}{KI} = \frac{CB}{AB} \text{ et } \frac{CG}{GH} = \frac{CA}{AB},$$

d'où  $CA = CB \times \cos C, \quad AB = CB \times \sin C,$   
et  $AB = CA \times \text{tang } C.$

Celle-ci est le quotient de la 2<sup>e</sup> divisée par la 1<sup>re</sup>.

Donc, 1<sup>o</sup>. Un côté de l'angle droit est le produit de l'hypoténuse par le cosinus de l'angle aigu compris... (A).

2<sup>o</sup>. Un côté de l'angle droit est le produit de l'autre côté par la tangente de l'angle aigu adjacent à celui-ci.... (B).

Nous représenterons les angles par  $A$ ,  $B$  et  $C$ , et les côtés qui leur sont respectivement opposés par  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Ainsi,  $a$  étant l'hypoténuse,  $A = 90^\circ$ , on a

$$b = a \cos C, \quad c = a \cos B = a \sin C \dots\dots (A),$$

$$c = b \text{ tang } C \dots\dots\dots (B).$$

355. Si de l'angle  $B$  (fig. 193) du triangle quelconque  $ABC$ , on abaisse la perpendiculaire  $BD$ , l'angle  $B$  sera coupé en deux angles, qui seront les complémens respectifs de  $A$  et  $C$ . Nos théorèmes ci-dessus donnent  $BD = AB \cdot \sin A, BD = BC \cdot \sin C$ ; d'où  $c \sin A = a \sin C$ , donc

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \dots (C),$$

puisqu'on peut abaisser la perpendiculaire de l'angle  $C$  ou  $A$ . Ainsi, tout triangle a les sinus de ses angles proportionnels aux côtés opposés.

En désignant par  $x$  le segment  $DA$  (222), on a  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$ , mais le triangle rectangle  $BD.A$  donne  $DA = BA \times \cos A$ , ou  $x = c \cos A$ ; donc

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \dots (D).$$

Si la perpendiculaire  $BD$  (fig. 190) tombe hors du triangle, il faut  $+ 2bx$  au lieu de  $- 2bx$ . Mais comme alors l'angle  $BCA$  est obtus, le cosinus devenant négatif, le signe de  $- 2bc \cos A$  redevient positif, et se rétablit de lui-même; donc notre formule s'applique à tous les cas (339).

Les équ.  $A$  et  $B$  servent à résoudre les triangles rectangles;  $C$  et  $D$  servent pour les triangles obliquangles (Voy. n° 363).

356. Soient deux arcs (fig. 207)  $AB = \alpha$ ,  $BD = \beta$ ; cherchons les sinus et cosinus de leur somme  $AD$ , et de leur différence  $AK$ , connaissant les sinus et cosinus de  $\alpha$  et  $\beta$ . Menons la corde  $DK$  au milieu  $I$  de laquelle le rayon  $CB$  est perpendiculaire; puis les parallèles  $EI$ ,  $KH$  à  $AC$ , et les perpendiculaires  $DP$ ,  $IG$  et  $KO$ ;  $DP$  est le sinus de  $AD = (\alpha + \beta)$ ,  $KO$  est celui de  $AK = \alpha - \beta$ ; les cosinus sont  $CP$  et  $CO$ : ces quatre quantités sont les inconnues du problème.

On voit que  $DE = EH$ ;  $DE$  et  $IG$  ont donc pour somme  $IG + DE$ , ou  $\dots \dots \dots DP = \sin(\alpha + \beta)$ , et pour différence  $IG - DE = HP$ , ou  $KO = \sin(\alpha - \beta)$ , de même  $EI$  étant la moitié de  $HK$ , on a  $PG = GO = EI$ , ainsi  $CG$  et  $EI$  ont pour somme  $\dots \dots \dots CO = \cos(\alpha - \beta)$ , et pour différence.  $\dots \dots \dots CP = \cos(\alpha + \beta)$ ,

$$\text{donc } \sin(\alpha \pm \beta) = IG \pm DE, \cos(\alpha \pm \beta) = CG \mp EI.$$

Il ne reste plus pour obtenir  $IG$ ,  $DE$ ,  $CG$ ,  $EI$  qu'à appliquer l'équ.  $A$  aux triangles rectangles  $CIG$ ,  $DEI$ , ou l'angle  $EDI = \alpha$ . Il vient  $IG = CI \times \sin \alpha$ ,  $DE = DI \cos \alpha$ , or  $DI = \sin \beta$  et  $CI = \cos \beta$ ; ainsi, on a

$$IG = CI \times \sin \alpha = \sin \alpha \cos \beta,$$

$$DE = DI \times \cos \alpha = \sin \beta \cos \alpha;$$

$$\text{on a de même } CG = CI \times \cos \alpha = \cos \alpha \cos \beta,$$

$$EI = DI \times \sin \alpha = \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha, \dots (E), \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \dots (F). \end{aligned}$$

Ces quatre formules sont d'un usage très fréquent. Si le rayon, au lieu d'être  $= 1$ , était  $R$ , on mettrait simplement  $R$  pour diviseur des seconds membres (347, 2°).

357. Faisons  $\alpha = \beta$  dans ces formules ; en prenant le signe supérieur, on trouve

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= 2\sin \alpha \cos \alpha, \dots (G), \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \dots (H) \\ &= 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha, \end{aligned}$$

à cause de  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ . Telles sont les valeurs du sinus et du cosinus du double de l'arc  $\alpha$  (\*).

358. Si l'on regarde dans ces équations  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$  comme inconnus, et  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$  comme donnés, il faudra éliminer entre elles. Mais comme le calcul serait compliqué, on préfère employer, au lieu de la 1<sup>re</sup>,  $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$  ; alors en ajoutant  $H$ , ou en soustrayant, on obtient de suite

$$2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha, \quad 2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha.$$

Si donc on change ici  $2\alpha$  en  $\alpha$ , ce qui est permis, on a

$$\cos^2 \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos \alpha}{2}\right)}, \quad \sin^2 \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos \alpha}{2}\right)}, \dots (I),$$

équ. qui donnent les  $\sin$  et  $\cos$ . de la moitié d'un arc. La formule de la page 364 devient ainsi propre au calcul des log.

$$\sin \text{ verse } \alpha = 2\sin^2 \frac{1}{2}\alpha = 1 - \cos \alpha.$$

359. Divisons l'une par l'autre les formules  $E$  et  $F$ , il vient

(\*) Pour avoir les sinus et cosinus de  $3\alpha$ , on fait  $\beta = 2\alpha$ , ce qui donne  $\sin 3\alpha = \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha$ ,  $\cos 3\alpha = \dots$  ; mais il faut mettre pour  $\sin 2\alpha$  et  $\cos 2\alpha$  leurs valeurs, et il vient

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha, \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.$$

Il est aisé de voir qu'en résolvant ces équ. par rapport à  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$ , on aurait les sinus et cosinus du tiers ; on obtiendrait de même ceux de  $\frac{1}{4}\alpha$  et  $\frac{1}{5}\alpha$ , etc.

(Voy ci-après, n° 358.)

$$\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta}$$

Or, si l'on divise les deux termes du 2<sup>e</sup> membre par  $\cos \alpha \cos \beta$ , en remarquant que  $\text{tang } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , on obtient (\*)

$$\text{tang } (\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tang } \alpha \pm \text{tang } \beta}{1 \mp \text{tang } \alpha \text{ tang } \beta} \dots (K),$$

qui donne la tangente de la somme et de la différence de deux arcs. Si  $\alpha = \beta$ , on a celle du double,

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{2\text{tang } \alpha}{1 - \text{tang}^2 \alpha} \dots (L).$$

En divisant l'une par l'autre les équ. (I), il vient

$$\text{tang}^2 \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\left( \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \dots (M).$$

360. Ajoutons et soustrayons les équ. E; il vient (\*\*)

$$(*) \text{ On a de même } \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}, \quad (1)$$

Si l'on fait  $\alpha = 45^\circ$ , comme  $\text{tang } 45^\circ = 1$ , il vient

$$\text{tang } (45^\circ \pm \beta) = \frac{1 \pm \text{tang } \beta}{1 \mp \text{tang } \beta} \quad (2)$$

De même les formules E et F donnent

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cot \beta + \cot \alpha}{\cot \beta - \cot \alpha} = \frac{\text{tang } \alpha + \text{tang } \beta}{\text{tang } \alpha - \text{tang } \beta}; \quad (3)$$

$$\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \mp \beta)} = \frac{\cot \beta \pm \cot \alpha}{\pm 1 + \cot \alpha \cot \beta} = \frac{\text{tang } \alpha \pm \text{tang } \beta}{1 \pm \text{tang } \alpha \text{ tang } \beta}; \quad (4)$$

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\cot \beta - \text{tang } \alpha}{\cot \beta + \text{tang } \alpha} = \frac{1 - \text{tang } \alpha \text{ tang } \beta}{1 + \text{tang } \alpha \text{ tang } \beta}; \quad (5)$$

(\*\*) Le même calcul sur les équ. E et F, combinées deux à deux, donne diverses autres formules qui servent à remplacer des sommes et différences de sin et cos par des produits et des quotiens, pour pouvoir faciliter le calcul logarithmique (Voy. *Introd. d'Euler à l'Anal. des inf.*),



$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

Divisons ces formules l'une par l'autre, et faisons, pour abréger,  $\alpha + \beta = C$ , et  $\alpha - \beta = B$ ; d'où l'on tire (p. 151)

$$\alpha = \frac{1}{2}(C+B), \quad \beta = \frac{1}{2}(C-B).$$

Donc 
$$\frac{\sin C + \sin B}{\sin C - \sin B} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\tan \frac{1}{2}(C+B)}{\tan \frac{1}{2}(C-B)}.$$

La somme des sinus de deux arcs est à leur différence comme la tangente de la demi-somme de ces arcs est à la tangente de leur demi-différence.

On a vu (n° 355, fig. 182),  $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$ , d'où l'on tire (n° 73, 2°.)

$$\frac{\sin C + \sin B}{\sin C - \sin B} = \frac{c+b}{c-b};$$

d'une autre part  $A+B+C=180^\circ$  donne  $\frac{1}{2}(C+B)=90^\circ - \frac{1}{2}A$ , puis  $\tan \frac{1}{2}(C+B) = \cot \frac{1}{2}A$ : donc enfin

$$\frac{c+b}{c-b} = \frac{\cot \frac{1}{2}A}{\tan \frac{1}{2}(C-B)} \dots\dots (N).$$

$$\sin A \pm \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A \pm B) \cdot \cos \frac{1}{2}(A \mp B), \quad (6)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos \frac{1}{2}(A-B), \quad (7)$$

$$\cos B - \cos A = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cdot \sin \frac{1}{2}(A-B), \quad (8)$$

Faisant  $A=90^\circ$  dans la 1<sup>re</sup>, et  $B=0$  dans les deux autres,

$$1 + \sin B = 2 \sin \left(45^\circ + \frac{1}{2}B\right) \cos \left(45^\circ - \frac{1}{2}B\right) = 2 \sin^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2}B\right);$$

$$1 - \sin B = 2 \cos^2 \left(45^\circ + \frac{1}{2}B\right) = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{1}{2}B\right), \quad (9)$$

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2}A; \quad 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{1}{2}A. \quad (10)$$

Faisant dans (N),  $\alpha = 90^\circ + a$ , on a  $\tan \left(45^\circ + \frac{1}{2}a\right) = \frac{1 + \sin a}{\cos a}$ . (11)

Multipliant entre elles les équ. (6), ou (7) et (8), et réduisant

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A = \sin(A+B) \times \sin(A-B),$$

$$\cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B) \times \cos(A-B) \quad (12)$$

*Formation des Tables de sinus, cosinus....*

361. Jusqu'ici ces formules sont stériles pour nous ; et afin de les faire servir à résoudre des triangles, il faut d'abord connaître les sinus des angles donnés, pour en introduire les valeurs dans nos équ., ou bien, si elles sont destinées à faire connaître des angles, il faut assigner l'arc, le sinus étant donné. Il est donc nécessaire de former une table de sinus, cosinus... qui donne ces lignes, lorsqu'on connaît ces arcs, et réciproquement.

Concevons donc qu'ayant divisé le quadrans en degrés, minutes..., et le rayon en un nombre arbitraire de parties égales, on soit parvenu à trouver combien chaque sin., cos... contient de ces parties ou unités, et qu'on ait inscrit ces nombres pres de chaque arc, on aura formé une table contenant, dans une 1<sup>re</sup> colonne, les graduations des arcs; dans une 2<sup>e</sup> les sinus, dans une 3<sup>e</sup> les cos... Il suit des équ. 1, 3, 5 que,

Effectuant diverses divisions, on obtient

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \frac{1}{2}(A+B), \quad \frac{\sin A - \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot \frac{1}{2}(A+B), \quad (14)$$

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot \frac{1}{2}(A-B), \quad \frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \frac{1}{2}(A-B), \quad (15)$$

$$\frac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B} = -\cot \frac{1}{2}(A+B) \times \cot \frac{1}{2}(A-B) \quad (16)$$

$$\frac{1 + \sin B}{1 - \sin B} = \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{1}{2}B \right), \quad \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} = \cot^2 \frac{1}{2}A, \quad (17)$$

$$\frac{1 + \sin B}{1 + \cos A} = \frac{\sin^2 \left( 45^\circ + \frac{1}{2}B \right)}{\cos^2 \frac{1}{2}A}, \quad \frac{1 - \sin B}{1 - \cos B} = \frac{\sin^2 \left( 45^\circ - \frac{1}{2}B \right)}{\sin^2 \frac{1}{2}B},$$

$$\tan A \pm \tan B = \frac{\sin A}{\cos A} \pm \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \cos B \pm \sin B \cos A}{\cos A \cos B},$$

$$\tan A \pm \tan B = \frac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cos B}, \quad \cot A \pm \cot B = \frac{\sin(B \pm A)}{\sin A \sin B}$$

$$\tan A \pm \cot B = \frac{\pm \cos(A \mp B)}{\cos A \sin B}, \quad \cot A \pm \tan B = \frac{\cos(A \mp B)}{\sin A \cos B}$$

quand on a les sinus, un calcul très simple donne les cos., tang ... ; ainsi, la recherche des sinus doit d'abord nous occuper, et l'on a vu (349) qu'il n'est nécessaire d'en pousser le calcul que jusqu'à  $45^\circ$ , parce qu'au-delà de cet arc les valeurs se reproduisent. Ainsi, il s'agit de calculer les sinus et cosinus de tous les arcs  $< 45^\circ$ , le quadrans étant partagé en degrés, minutes....

La 1<sup>re</sup> équ. du n° 360, et celle qu'on obtient de même en ajoutant les équ.  $F$ , deviennent, en posant  $\alpha = mx$ ,  $\beta = x$ ,

$$\sin(m+1)x = 2\cos x \cdot \sin mx - \sin(m-1)x,$$

$$\cos(m+1)x = 2\cos x \cdot \cos mx - \cos(m-1)x.$$

Si les arcs procèdent dans l'ordre  $x, 2x, 3x, \dots, (m-1)x, mx, (m+1)x, \dots$ ,  $x$  est le plus petit arc de la table, et il suit de nos équ. que si  $z$  et  $y$  sont les sin. ou cos. de deux arcs successifs  $(m-1)x$  et  $mx$ , et  $p = \cos x$ , le sin. ou cos. de l'arc suivant  $(m+1)x$ , est  $= 2py - z$ . Donc, chacun des termes de la série des sinus et de celle des cosinus dépend des deux termes qui le précèdent, et s'obtient en multipliant ceux-ci par  $2p$  et  $-1$ , et ajoutant.

362. Prenons l'arc  $AC = CB = AL$  (fig. 122), et menons la corde  $AB$  et les tangentes  $LE, CE$ ; nous avons (170)

$$\text{corde } AB < \text{arc } AB, \quad LEC > \text{arc } LAC;$$

$$\text{d'où } AI \text{ ou sin } AC < \text{arc } AC, \quad EC \text{ ou tang } AC > \text{arc } AC.$$

L'arc  $< 90^\circ$  a sa longueur comprise entre celles de son sin. et de sa tang.; et comme l'éq. 3, page 363, donne  $\frac{\sin x}{\tan x} = \frac{\cos x}{R}$ , dont le 2<sup>e</sup> membre approche sans cesse de 1, à mesure que  $x$  décroît, le 1<sup>er</sup> a aussi 1 pour limite, c.-à-d. que le sinus, l'arc et la tangente tendent sans cesse vers l'égalité, l'arc restant intermédiaire.

Ce principe sert à calculer le sinus du plus petit arc de la table

car de  $\tan \frac{1}{2} x$  ou  $\frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x} > \frac{1}{2} x$ , on tire  $\sin \frac{1}{2} x > \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x$

multipliant par  $2 \cos \frac{1}{2} x$ , on a  $2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x > x \cos \frac{1}{2} x$ , ou  $\sin x > x(1 - \sin^2 \frac{1}{2} x)$ , et à plus forte raison  $\sin x > x - \frac{1}{6} x^3$ , puisque  $\sin \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} x$ : on voit donc qu'en résultat  $\sin x$  est intermédiaire à  $x$  et  $x - \frac{1}{6} x^3$ , savoir

$$\sin x > x - \frac{1}{6} x^3, \text{ et } < x.$$

Qu'on parte de  $\pi = 3,1415926536$  et  $\log. \pi = 0,49714987$  pour calculer  $x$ , qui est une fraction déterminée de la demi-circ.  $\pi$ , et par suite  $x - \frac{1}{6} x^3$ ; comme  $\sin x$  est compris entre ces deux limites, les décimales communes seront une valeur approchée de  $\sin x$ , le rayon étant 1; et si  $x$  est pris assez petit, comme  $\sin x$  et  $x$  diffèrent de moins en moins, l'approximation pourra être étendue à tel ordre qu'on voudra, sin  $x = a$ . D'ailleurs, on a

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{(1+a)(1-a)} = p;$$

donc le facteur  $2p$  est connu, et partant, de  $\sin 0 = 0$ ,  $\sin x = a$  d'une part, de  $\cos 0 = 1$ ,  $\cos x = p$  de l'autre, par la loi  $2py = z$ , on calculera de proche en proche les sin et cos de arcs  $2x$ ,  $3x$ ,  $4x$ ...

Par ex., si  $x = 30'$ , le  $180^\circ$  du quadrans est  $x = 0,008726646$ ;  $\frac{1}{6} x^3 = 0,000000166$ ,  $x - \frac{1}{6} x^3 = 0,00872648$ ; ainsi  $\sin 30' = 0,008726$ . Si la table doit procéder de minute en minute, avec 6 décimales, tous les sinus d'arcs  $< 30'$  sont censés égaux à l'arc  $\sin 1', 2', 3' \dots$  sont  $\frac{1}{60}, \frac{2}{60}, \frac{3}{60} \dots$  de  $0,008726$ . D'où l'on voit qu'il faudra d'abord faire croître les arcs de  $30'$  en  $30'$ , sans les rapprocher ensuite, ce qui sera très facile: on trouve.

$p = \cos 30' = \sqrt{1 - 0,008726^2} = 0,991274$ , ou  $0,999962 = 1 - 0,000038$ . Le facteur  $2p$  est  $2 - 0,000076$ ; ainsi il est aisé de calculer les autres nombres de la table.

En général, pour qu'on soit en droit de prendre  $x = \sin x$ , il faut que  $\frac{1}{6} x^3$  n'ait pas de chiffre significatif dans les décimales qu'on doit conserver. En veut-on 8, par ex.? il faudra que le

8 1<sup>re</sup> chiffres de  $\frac{1}{4}x^3$  soient des zéro ; et sans calculer  $x^3$ , on voit qu'on devra descendre à l'arc de 10'.

Du reste, il faut prendre plus de décimales qu'on n'en veut conserver, afin d'éviter que les erreurs s'accroissent et que les derniers chiffres soient défectueux. On a soin de vérifier, d'espace en espace, les résultats obtenus, soit par les formules des  $\sin(\alpha \pm \beta)$  et  $\sin 2\alpha$ , soit en calculant d'avance, par le même procédé, les sinus de degré en degré, ou autrement. Nous donnerons des moyens plus rapides d'arriver aux valeurs des  $\sin$ ,  $\cos$ . . . ; mais celui-ci suffit à notre objet.

Au lieu de composer la table avec les valeurs ainsi obtenues, on préfère, pour la commodité des calculs, y inscrire leurs  $\log$ . Comme les sinus sont plus petits que le rayon, il convient de partager le rayon en assez d'unités pour que le sinus du plus petit arc de la table soit  $> 1$ , afin d'éviter les  $\log$  négatifs (n° 91). Dans les tables de Callet, les arcs procèdent de 10" en 10", et le rayon a 10 pour  $\log$  (ou  $R = 10$  milliards).

Lorsqu'on veut procéder au calcul d'une formule où le rayon est pris  $= 1$ , il faut donc restituer les puissances de  $R$ , que la supposition de  $R = 1$  a fait disparaître (p. 364), ensuite on recourt aux tables dans lesquelles  $\log R = 10$ . On peut aussi laisser  $R = 1$  dans la formule, et retrancher 10 de tous les  $\log$ . des  $\sin$ ,  $\cos$ . . ., ce qui introduit des caractéristiques négatives. Par exemple,  $\log \sin 10^\circ = \bar{1},2396$ . . . au lieu de 9,2396. . . ;  $\log \tan 1^\circ = \bar{2},2419$ . . . au lieu de 8,2419. . . Ces parties négatives ne sont pas un inconvénient, et on s'habitue aisément à les employer. (Voy. p. 121.)

### Résolution des Triangles.

363. I. TRIANGLES RECTANGLES. Les deux equ.  $A$ ,  $B$ , résolvent tous les triangles rectangles, car elles comprennent les côtés  $b$ ,  $c$ , l'hypoténuse  $a$  et l'angle  $C$  (fig. 206) : de ces 4 quantités, deux étant données, on peut trouver les deux autres. En éliminant  $C$ , on obtient même l'equ.  $a^2 = b^2 + c^2$ , si souvent



employée. Faisons le rayon  $= R$  dans les équ.  $A$  (on a  $\log R = 10$ ),

$$Rb = a \cos C \dots (1),$$

$$Rc = b \tan C \dots (2),$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \dots (3).$$

On ne peut rencontrer que les deux cas suivans (\*):

1°. *Étant donné un angle aigu C et un côté, les deux autres angles sont connus, puisque  $A = 90^\circ$ ,  $B = 90^\circ - C$ , les deux côtés inconnus s'obtiennent ainsi :*

Connaissant l'hypoténuse  $a$ , l'équ. (1) donne le côté  $b$ .

Si l'on connaît le côté  $b$ , (2) donne  $c$ , (1) l'hypoténuse  $a$ .

Soient, par ex.,  $C = 33^\circ 30'$ ,  $b = 45^m, 54$ , les équ. (1) et (2) prescrivent le calcul suivant :

$\log b =$	1,6583930	1,6583930	
$\log R =$	10,0000000	$\log \tan C =$	9,8207829
$-\log \cos C =$	9,9211066	$-\log R =$	10,0000000
$\log a =$	1,7372864	$\log c =$	1,4791759

Donc  $a = 54^m, 612$  et  $c = 30^m, 142$ .

Cette opération peut servir à trouver la hauteur  $AB = c$ , d'un édifice (fig. 208), dont le pied  $A$  est accessible.

Le calcul se vérifie en changeant d'inconnues. (Voy. p. 154).

2°. *Étant donné deux côtés :*

Si l'on connaît  $b$  et  $c$ , l'équ. (2) donne l'angle  $C$ ; l'hypoténuse  $a$  résulte ensuite de l'équ. (1). On peut aussi tirer  $a$  de l'équ. (3), mais elle ne se prête pas au calcul logarithmique.

Si l'on a l'hypoténuse  $a$  et le côté  $b$ , l'équ. (1) donne l'angle  $C$ ; le côté  $c$  résulte de l'équ. (3), ou de

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

---

(\*) Pour résoudre un triangle proposé, placez au sommet les lettres  $B, A, C$ , en les distribuant aux angles qui s'accordent avec les lettres dont on se sert dans le texte pour désigner les parties connues ou inconnues, et recourant au cas dont il est question.  $a, b, c$ , sont les côtés respectivement opposés aux angles  $A, C, B$ ; et si le triangle est rectangle,  $A$  marque l'angle droit. L'équ. dont il s'agit s'applique ensuite directement.

II. TRIANGLES OBLIQUANGLES. Il y a 4 cas à traiter.

1°. Étant donnés un côté  $a$  et deux angles  $B, C$ , le 3<sup>e</sup> angle  $A$  est connu, et l'on emploie l'équ. C, n° 355

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A} \dots (4).$$

Soient, par ex.,  $a = 28^{\text{m}}, 852$ ,  $A = 37^{\circ} 29'$ ,  $C = 72^{\circ} 9'$ ; d'où l'on conclut  $B = 70^{\circ} 22'$ : on a

log $a = 1,4601759$	.....	1,4601759
log sin $B = 9,9739873$	log sin $C = 9,9785741$	
-log sin $A = 9,7842824$	.....	- 9,7842824
log $b = 1,6498808$	log $c = 1,6544676$	

Donc  $b = 44^{\text{m}}, 656$  et  $c = 45^{\text{m}}, 130$ . Ce calcul sert à mesurer la distance  $AC$ , de  $C$  à un point  $A$  inaccessible, mais visible (fig. 208); il donne aussi la hauteur  $AB'$  et la distance  $AC$  d'un édifice dont le pied est inaccessible et invisible; car, mesurant une base horizontale  $BC$  et les angles  $B'CB$ ,  $B'BC$ , qu'elle fait avec les lignes dirigées vers le sommet  $B'$ , on connaîtra  $B'C$  et l'angle  $ACB'$ , qu'on peut mesurer sans voir le pied  $A$ , attendu que la droite  $AC$  est horizontale. On obtiendra donc  $AB'$  et  $AC$ .

Comme il faut être exercé aux applications des formules de la résolution des triangles, nous donnerons ici les valeurs des côtés et des angles de triangles, auxquels on pourra appliquer ces équations. On prend pour données les parties élémentaires qu'on veut; les autres seront les inconnues que le calcul doit faire trouver. En variant les éléments donnés, on se proposera divers problèmes qui seront résolus par les formules qu'on a exposées, et ce seront autant d'exercices utiles de ces sortes de calculs.

*Triangle rectangle d'épreuve*

$a = 56^{\text{m}}, 925$	$b = 45^{\text{m}}, 540$	$c = 34^{\text{m}}, 154$
log $a = 1,7553030$	log $b = 1,6583930$	log $c = 1,5334543$
$A = 90^{\circ}$	$B = 51^{\circ} 7' 48'', 4$	$C = 36^{\circ} 52' 11'', 6$
log sin $B = 9,9030900$	cos $B = 9,7781512$	tang $B = 0,1249389$

*Triangle obliquangle d'épreuve.*

Côtés	Logarithmes	$\log p$	$\log (p-a)$	$\log (p-b)$	$\log (p-c)$
$a = 57^{\circ}, 770.$	$\log = 1.7617024,$	$\log p = 2.0357459$	$\log (p-a) = 1.7069406$	$\log (p-b) = 1.5681252$	$\log (p-c) = 1.3173947$
$b = 71^{\circ}, 577.$	$\log = 1.8547735,$				
$c = 87^{\circ}, 811.$	$\log = 1.9435489$				
Angles	Log sin	Log cos	Log tang		
$A = 40^{\circ} 56' 00'', 00$	$9.8163609$	$9.8782186$	$9.9381423$		
$B = 54^{\circ}, 16', 8, 48$	$9.9094319$	$9.7663981$	$0.1130338$		
$C = 84^{\circ}, 47', 51, 52$	$9.9982073$	$8.9574805$	$11.0407268$		

2°. *Etant donnés deux côtés  $c$ ,  $a$ , et un angle  $A$  opposé à l'un d'eux, l'équ. (4) donne  $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$ . Or, la valeur de  $\sin C$  répond à deux angles  $C$  supplémentaires, et l'on a deux solutions (les triangles  $ABC$ , fig. 193 et 190).*

Il est vrai qu'une seule est souvent admissible, ainsi qu'on l'a vu (n° 207), mais de lui-même, le calcul conduit à reconnaître ce cas, sans y avoir égard spécialement; on forme la somme  $A + C$ , pour les deux valeurs de  $C$ , que donne le calcul, dans le but d'en tirer l'angle supplémentaire  $B$ . Or,

Si  $A$  est obtus, on ne peut adopter la valeur de  $C > 90^{\circ}$ ; puisque  $A + C$  serait  $> 180^{\circ}$ . Il n'y a donc qu'une solution; encore faudrait-il que  $a$  fût  $> c$ , puisque si l'on avait  $a < c$ , notre équ. donnerait  $\sin A < \sin C$ , d'où l'angle aigu supplément de  $A$  moindre que l'angle aigu  $C$ , savoir,  $180^{\circ} - A < C$ , et par conséquent  $A + C > 180^{\circ}$ . Ainsi l'absurdité serait mise en évidence.

Si  $A$  est aigu, et qu'on ait  $a =$  ou  $> c$ , notre équ. donne  $\sin C =$  ou  $< \sin A$ ; ainsi le calcul conduira à une valeur de l'angle aigu  $C < A$ , donc le supplément  $180^{\circ} - C$  ne saurait convenir ici, puisqu'en ajoutant  $A$ , la somme est  $180^{\circ} + A - C > 180^{\circ}$ . Ainsi le problème a toujours une solution, et une seule.

Enfin, si  $A$  est aigu, et que  $a$  soit  $< c$ , tirons du triangle rectangle  $ABD$  la perpendiculaire  $BD = p = \frac{c \sin A}{R}$ ; d'où

$\sin C = \frac{Rp}{a}$ . Or, si  $a < p$ , on a  $\sin C > R$ , ce qui est absurde.

Si  $a=p$ , on a  $\sin C = R$ ,  $C=90^\circ$ ; le triangle rectangle  $BDA$  convient seul, enfin, quand  $a > p$ , on se trouve dans le seul cas qui admette les deux solutions.

Tout cela s'accorde avec ce qu'on connaît (n° 207, fig. 64).

Voici le tableau des divers cas :

Si  $A \geq 90^\circ$ , une seule solution,  $B$  et  $C$  sont aigus,  $a > c$ ;  
 Si  $A < 90^\circ$ ,  
 avec  $\begin{cases} a < c \sin A, \text{ problème impossible;} \\ a = c \sin A, \text{ un seul triangle rectangle, } B \text{ et } A \text{ sont aigus;} \\ a > c \sin A \text{ et } > c, \text{ un seul triangle, } C \text{ est aigu,} \\ a > c \sin A \text{ et } < c, \text{ deux solutions, } C \text{ a deux valeurs supplémentaires.} \end{cases}$

3°. Étant donnés deux côtés  $b$  et  $c$ , et l'angle compris  $A$ , en faisant  $n = \frac{1}{2}(C-B)$ , la formule  $N$  (n° 360) devient

$$\operatorname{tang} n = \frac{c-b}{c+b} \cot \frac{1}{2} A \dots (5);$$

équ. qui fait connaître l'angle  $n < 90^\circ$ ; or,  $A+B+C=180^\circ$ , donne  $\frac{1}{2}(C+B)=90^\circ-\frac{1}{2}A$ , valeur connue que nous représenterons par  $m$ ; ainsi nous aurons

$$\frac{1}{2}(C+B)=m, \quad \frac{1}{2}(C-B)=n \dots (6);$$

d'où  $C=m+n$ ,  $B=m-n$ . Il ne restera plus qu'à trouver le côté  $a$  par le procédé ci-dessus, 1°.

On peut encore poser  $\operatorname{tang} \phi = \frac{c}{b}$ , équat. qui donnera l'arc auxiliaire  $\phi$ ; or, par l'équ. (2), p. 372

$$\operatorname{tang} (\phi - 45^\circ) = \frac{\operatorname{tang} \phi - 1}{1 + \operatorname{tang} \phi} = \frac{c-b}{c+b}$$

Donc l'éq.  $N$  donne

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(C-B) = \operatorname{tang} (\phi - 45^\circ) \cdot \cot \frac{1}{2} A.$$

Ce mode de solution est utile lorsque les côtés  $b$  et  $c$ , au lieu d'être connus en nombres, sont des expressions monomes composées, ou données par les log. de  $b$  etc

On peut déterminer directement ce côté  $a$  sans chercher préalablement les angles, et le faire servir, au contraire, à trouver ceux-ci. En effet, reprenons la formule  $D$ , ajoutons

et soustrayons  $2bc$ , puis mettons pour  $1 - \cos A$  sa valeur  $2 \sin^2 \frac{1}{2} A$  (n° 358, 1) ; il vient

$$a^2 = (b-c)^2 + 2bc(1 - \cos A) = (b-c)^2 \left[ 1 + \frac{4bc \sin^2 \frac{1}{2} A}{(b-c)^2} \right]$$

Cela posé, on cherchera l'angle  $\phi$  qui a  $\frac{4bc \sin^2 \frac{1}{2} A}{(b-c)^2}$  pour carré de sa tangente, ce qui est toujours possible, puisqu'il y a des tangentes de toutes les grandeurs : la valeur de  $a$  deviendra  $(b-c) \sqrt{1 + \tan^2 \phi}$ , ou  $(b-c) \sec \phi$ , ou enfin, en rendant la formule propre au cas où le rayon est  $R$ ,

$$a = \frac{R(b-c)}{\cos \phi}, \quad \tan \phi = \frac{2 \sin \frac{1}{2} A}{b-c} \sqrt{bc} \dots (7).$$

Le calcul logarithmique pourra aisément s'appliquer : on aura d'abord  $\tan \phi$ , et par suite  $\cos \phi$ , puis  $a$ . Voici un ex. auquel nous appliquerons ces deux procédés. Soient  $c = 87,812$  mètres,  $b = 71,577$  mètres,  $A = 40^\circ 56'$  ; d'où  $c + b = 159,389$  et  $c - b = 16,235$ .

*Premier procédé.*

$\cot \frac{1}{2} A \dots$	10,4280331
$(c-b) \dots$	1,2104523
$(c+b) \dots$	-9,2024585
$\tan n \dots$	9,4360261
$m =$	6.32'
$n =$	15.16
$m+n =$	84.48=C
$m-n =$	54.16=B
$c \dots$	1,9435539
$\sin A \dots$	9,8163609
$\sin C \dots$	-9,9982089
$a \dots$	1,7617059

*Deuxième procédé*

$c \dots$	1,9435539
$b \dots$	1,8517735
$bc \dots$	3,7983274
moitié $\dots$	1,8991637
$2 \dots$	0,3070300
$\sin \frac{1}{2} A \dots$	9,5436189
$(c-b) \dots$	-1,2104523
$\tan \phi \dots$	10,5333903
$\phi =$	73° 40' 43"
$R(c-b) \dots$	11,2104523
$\cos \phi \dots$	-0,4487419
$a \dots$	1,7617074

Donc  $a = 57^m,770$ .

S'il arrive que  $b$  diffère beaucoup de  $c$ , l'arc  $\phi$  est très petit, et  $\cos \phi$  presque  $= 1$  ; le calcul n'a plus alors assez de précision (\*). Mais  $\cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A - 1$  change l'équ. D en

(\*) Il ne faut jamais employer de  $\cos$  ni de  $\cot$  d'arcs très petits, ou voisins de  $180^\circ$  ; non plus que de  $\sin$  et  $\tan$  d'arcs voisins de  $90^\circ$  ou  $270^\circ$ , parce qu'alors ces lignes changent très peu pour de petites variations de l'arc. C'est ce qu'on voit d'après les tables de log. Pour que le calcul fût exact, il faudrait donc que les log fussent approchés à un plus grand nombre de décimales.



$$a^2 = (b+c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{1}{2} A = (b+c)^2 \left( 1 - \frac{4bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2} \right).$$

Cette dernière fraction est  $< 1$ , puisque sans cela  $a$  serait imaginaire; on peut donc en supposer la racine égale au sinus d'un arc  $\phi$ , savoir;

$$\sin \phi = \frac{2 \cos \frac{1}{2} A}{b+c} \sqrt{bc}, \quad a = (b+c) \cos \phi.$$

4°. *Étant donnés trois côtés.* Pour obtenir l'un des angles, tel que  $A$ , il faut encore recourir à l'équ.  $D$ ,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Or, cette expression présente le même inconvénient que dans le cas précédent, parce qu'elle ne se prête pas au calcul logarithmique. Mais si l'on met pour  $\cos A$  cette valeur dans...  $\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{1}{2}(1 - \cos A)$ , on trouve

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}.$$

et comme le numérat. est la différence de deux carrés (n° 97, III.), il vient, en rétablissant le rayon  $R$ ,

$$\sin \frac{1}{2} A = R \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}} \dots (8).$$

Cette équation remplit déjà le but proposé; mais elle devient encore plus simple en représentant le périmètre du triangle par  $2p = a + b + c$ ; car on obtient (p. 327)

$$\sin \frac{1}{2} A = R \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \dots (9).$$

En se servant de l'équ.  $\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{1}{2}(1 + \cos A)$ , on trouve de même

$$\cos \frac{1}{2} A = R \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

On emploie celle de ces deux équ. qu'on veut, à moins que

$\angle A$  ne soit très petit ou voisin de  $90^\circ$ . (Voyez la note précédente.)

$\angle A$  doit être  $< 90^\circ$ , et la question n'a qu'une solution (n° 350). V. page 250.

Soient, par ex.,  $c = 103,357$  mètres,  $b = 106,836$  mètres, et  $a = 142,985$  mètres; d'où  $2p = 353,178$  mètres, et  $p - b = 69,753$  mètres,  $p - c = 73,232$  mètres,  $p - a = 33,606$  mètres. Donc

$p - b \dots 1,8435620$	$p - a \dots 1,5463910$
$p - c \dots 1,8647009$	$p - c \dots 1,8647009$
$b \dots -2,0287176$	$a \dots -2,1552906$
$c \dots -2,0143399$	$c \dots -2,0143399$
<hr/>	<hr/>
$1,6652063$	$1,2214614$
moitié... $1,8326031 = \sin \frac{1}{2} A$	$1,6107307 = \sin \frac{1}{2} B$
$\frac{1}{2} A = 42^\circ 51' 20''$ , $A = 85^\circ 43'$ ,	$\frac{1}{2} B = 40^\circ 5'$ , $B = 80^\circ 10'$

On trouvera de même  $C = 46^\circ 7'$ , et le calcul se vérifie par la condition  $A + B + C = 180^\circ$ .

III. Si le triangle est isoscèle.  $A$  étant l'angle du sommet, la base, on fera  $b = c$  dans l'équ. 8 ou 9, et l'on aura

$$\sin \frac{1}{2} A = \frac{aR}{2b} = \frac{(p-b)R}{b} \dots (10);$$

équ. qui fait connaître l'une des trois quantités  $a$ ,  $b$  et  $A$ .

Observez que si l'on donne un des angles, on connaît les autres par l'équ.  $B = C = 90^\circ - \frac{1}{2} A$ . (Voy. n° 205, 6°.)

### Problèmes de Trigonométrie.

364. La plupart des questions d'arpentage se réduisent à des résolutions de triangles. Nous offrirons ici quelques-uns de ces problèmes, qui sont d'un usage fréquent.

1. Trouver la distance  $AC$  (fig. 209), entre deux points l'un et l'autre inaccessibles. On trouvera une base quelconque  $BD$ , et les angles  $ABC$ ,  $CBD$ ,  $ADC$ ,  $ADB$ , que font avec elle les rayons dirigés de ses extrémités  $B$  et  $D$  vers  $A$  et  $C$ : on résoudra les triangles  $ABD$  et  $CDH$  (p. 379, 1°); ce qui donnera

des distances  $AB$ ,  $BC$ , du point  $B$  aux points inaccessibles  $A$  et  $C$ ; et comme on connaît, dans le triangle  $ACB$ , deux côtés  $AB$ ,  $BC$ , et l'angle compris, on aura enfin  $AC$ .

## II. Réduire un angle, un point ou une distance à l'horizon.

Il est rare que les signaux soient dans un plan horizontal; alors ce ne sont pas les angles, les points et les distances observés, qu'il faut porter dans le tracé du plan, mais bien leurs *Projections horizontales* (n° 272). Ainsi, lorsque le signal, vu de  $B$  et de  $C$  (fig. 208) est le sommet  $B'$  d'un édifice ou d'une montagne; il faut substituer  $A$  à  $B'$ , l'angle  $CAB$  à  $CB'B$ , l'angle  $ACB$  à  $B'CB$ , etc.

Regardons comme connues, par l'observation ou par le calcul, toutes les parties du triangle  $B'CB$ ; comme  $CA$  est horizontal, on pourra mesurer l'angle  $ACB'$  (même lorsque  $A$  ne sera pas visible); puis résolvant le triangle rectangle  $CAB'$ , on aura  $CA$ , et la hauteur  $AB'$ . Celle-ci, et l'hypoténuse  $B'B$ , serviront à trouver  $AB$  dans le triangle rectangle  $BAB'$ . Ainsi on connaîtra les trois côtés du triangle horizontal  $CBA$ , et par suite les angles qui le forment, et la position du point  $A$ .

Soit  $B'C$  (fig. 208) une longueur mesurée sur un terrain en pente, il ne faudra porter dans le plan que la projection  $AC$  sur l'horizon, ou  $a \cos C$ . Le plus souvent  $C$  n'est que d'un petit nombre de degrés, et la réduction  $x = a \cos C$  manque de précision (V. la note du bas de la p. 382.) On préfère calculer l'excès de  $a$  sur  $x$ , ou  $e = a - a \cos C$ ; or (n° 358)  $1 - \cos C = 2 \sin^2 \frac{1}{2} C$ , donc  $e = 2a \sin^2 \frac{1}{2} C = 'aC'$ , en remplaçant le sin par l'arc qui est très petit: introduisant son nombre  $C'$  de minutes, ou  $C = C' \sin 1'$  (n° 348), on trouve  $e = 'aC' \sin^2 1'$ , et la longueur  $a$  réduite à l'horizon est  $x = a - 'aC' \sin^2 1'$ .

## III. Évaluer une hauteur verticale $BD = x$ (fig. 190)?

Si le pied  $D$  de cette verticale est accessible; on mesurera une distance horizontale  $AD$ , ainsi que l'angle  $A$ , et le triangle rectangle  $ABD$  donnera  $x = AD \tan A$ .

Si le pied  $D$  est inaccessible, on mesurera une distance  $AC$  dirigée vers  $D$ , ainsi que les angles  $A$  et  $C$ , et l'on aura.....

$x = AD \operatorname{tang} A$ ,  $x = DC \operatorname{tang} C$ , tirant les valeurs de  $AD$ ,  $DC$  et les retranchant on a

$$AC = \frac{x}{\operatorname{tang} A} - \frac{x}{\operatorname{tang} C}, \quad x = \frac{AC \cdot \sin A \sin C}{\sin (C - A)}.$$

IV. Un triangle  $ABC$  (fig. 209) étant donné, trouver le lieu d'un point  $D$ , en connaissant les angles  $ADC = \beta$  et  $ADB = \gamma$ . Soient  $a, b, c$  les côtés,  $A, B, C$  les angles donnés du triangle  $ABC$ , et les angles inconnus  $ABD = x$ ,  $ACD = y$ . Les triangles  $ACD$  et  $ABD$  donnent (equ. C, n° 355).

$$DA = \frac{b \sin y}{\sin \beta} = \frac{c \sin x}{\sin \gamma}.$$

Soit déterminé un angle  $\phi$ , tel que sa tangente soit  $= \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma}$

on aura  $\operatorname{tang} \phi = \frac{\sin y}{\sin x}$ , d'où l'on tire (n° 73),

$$\frac{1 + \operatorname{tang} \phi}{1 - \operatorname{tang} \phi} = \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y},$$

ou plutôt (n° 359 et 360)  $\operatorname{tang} (45^\circ + \phi) = \frac{\operatorname{tang} (x+y)}{\operatorname{tang} (x-y)}$  Faisons

pour abréger  $m = x+y$ ,  $n = x-y$ ;  $m$  est connu, puisque  $x+y$  est (n° 233)  $360^\circ$  moins  $A + CDB$ ,

$$x+y = 360^\circ - (A + \beta + \gamma) = 2m.$$

On a donc  $\operatorname{tang} \phi = \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma}$ ,  $x = m+n$ ,

$$\operatorname{tang} n = \operatorname{tang} m \cdot \cot (45^\circ + \phi), \quad y = m-n.$$

La 1<sup>re</sup> donne  $\phi$ , la 3<sup>e</sup>  $n$ ; d'où l'on tire  $x, y$  et la position du point  $D$ . On pourra même calculer  $AD, CD$  et  $BD$ . Quand  $\operatorname{tang} n$  est négatif,  $n$  prend un signe contraire dans les valeurs de  $x$  et  $y$ . Si les points  $A, B, C, D$  ne sont pas dans un même plan horizontal, il faut préalablement les y réduire (\*).

(\*) L'equ. que nous venons de traiter a la forme  $A \sin x = B \sin y$ , et on connaît la somme  $y+x=2m$ . Le problème que nous venons de résoudre revient, comme on voit, à trouver deux arcs  $x$  et  $y$ , l'un quand on connaît leur somme et le rapport de leur sinus, le calcul est rendu propre aux usages logarithmiques. Ainsi on sait résoudre l'equ.  $A \sin x = B \sin y = 2B \sin \frac{1}{2}(y+x) \cos \frac{1}{2}(y-x)$

Nous avons résolu ce problème graphiquement (n° 212, VI).

V. Trouver l'aire  $z$  d'un triangle ABC (fig. 182), connaissant

1°. Les trois côtés (voy. p. 338),

2°. Deux côtés et l'angle compris ; dans le triangle BCD, on a  $BD = a \sin C$  ; ainsi,  $z = \frac{1}{2} b \times BD$  devient  $z = \frac{1}{2} ab \sin C$ .

3°. Un côté  $b$  et les angles ; comme  $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$ , en mettant cette valeur dans l'équ. qui précède, il vient  $z = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin A \sin C}{\sin B}$ .

VI. Trouver l'aire d'un quadrilatère ABCD (fig. 209), dont on connaît les diagonales  $AD = D$ ,  $BC = D'$  et l'angle  $AOB = t$ , qu'elles forment entre elles. Cherchons séparément l'aire de chacun des quatre triangles, d'après l'équ. (2°.), nous avons, en ajoutant et designant par  $a, b, c, d$ , les segments  $AO, OD, OB, OC$  des diagonales,  $z = \frac{1}{2} (ac + ad + bd + bc) \sin t$ . Or, ce quadrinome revient à  $(a + b) \cdot (c + d) = D \times D'$  ; donc  $z = \frac{1}{2} DD' \sin t$ .

Concluons de là que les aires de deux quadrilatères sont équivalentes lorsque leurs diagonales sont égales et se coupent sous le même angle. (Voy. p. 338.)

VII. Soient  $A$  le côté d'un polygone régulier (fig. 112),  $n$  le nombre des côtés,  $\alpha$  le nombre de degrés de l'angle central

$AOB = 2 AOC = \frac{360^\circ}{n} = \alpha$  ; le triangle  $AGO$  donne

$$GO = AG \cdot \tan OAG = \frac{1}{2} A \cdot \cot \left( \frac{1}{2} \alpha \right) ;$$

le triangle  $AOB$  est  $= AG \times GO$  : répété  $n$  fois, il produit

$$\text{l'aire du polygone régulier} = \frac{1}{2} n A^2 \cot \left( \frac{1}{2} \alpha \right).$$

Le triangle  $AOB = R \sin AOG \times R \cos AOG = \frac{1}{2} R^2 \sin 2(AOG)$ , ou  $AOB = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$ . En retranchant cette aire de celle du sec-

teur  $AOBg = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$  (n° 261), il reste,  $\alpha$  designant le nombre de degrés de l'angle  $AOB$ ,

$$\text{aire du segment} = \frac{1}{2} R^2 \left( \frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha \right).$$



VIII. Trouver l'aire d'une zone sphérique DEFG (fig. 167)?  
Cette aire = circ.  $CD \times IK$ , (n° 293); or  $R$  étant le rayon  $CD$ ,  
on a  
1°. circ.  $CD = 2\pi R$ , 2°.  $CI = R \sin \alpha$ , 3°.  $CK = R \sin \alpha'$ ,  
 $\alpha$  et  $\alpha'$  étant les latitudes des points  $D$  et  $F$  exprimées en de-  
grés, savoir  $\alpha = OD$ ,  $\alpha' = OF$ : donc  
$$IK = CK - CI = R (\sin \alpha' - \sin \alpha).$$

et d'après les équ. (6) page 373,

$$\text{aire zone sphér.} = \{ \pi R^2 \sin \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) \cos \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha) \}.$$

On prend  $\alpha'$  négatif quand le point  $F$  est situé de l'autre côté  
de l'équateur  $OC$ , c.-à-d. quand l'équateur est compris entre  
les cercles des deux lunes.

IX. Soit  $r$  le rayon  $OF$  (fig. 68) du cercle inscrit au triangle  
 $ABC$ : dans le triangle  $AOF$ , l'angle  $OAF$  est moitié  
de  $A$ ,  $OF = AF \cdot \tan \frac{1}{2}A$ , ou  $r = AF \cdot \tan \frac{1}{2}A$ , pé-  
ri-  
mètre de  $ABC$  (n° 212. I.): c'est une valeur  
simple que celle du n° 315. IV. On y a vu que l'aire =  $\frac{1}{2}p \cdot r$ ,  
est  $\frac{1}{2}p \cdot r$ , ou  $\frac{1}{2}p \cdot AF \cdot \tan \frac{1}{2}A$ . Ces équ. peuvent  
servir au calcul et au côté du triangle.

X. Soit la courbe  $AD = a$  (fig. 38). L'arc  $AD = a$   
étant donné, il le sera  $\sin a$ . Le triangle rectangle  $ADO$   
n° 212. II.  $AO = \frac{a}{\sin a}$ ,  $DO = a \cdot \cos a$ . L'aire du triangle  
est  $\frac{1}{2}AO \cdot DO = \frac{1}{2}a^2 \frac{\cos a}{\sin a}$ . L'aire du secteur est  $\frac{1}{2}a^2$ .  
L'aire de la courbe est  $\frac{1}{2}a^2 (1 - \frac{\cos a}{\sin a})$ .

construction est comprise dans la seule épaisseur des traits. Nous avons publié, sous le titre de *Coniométrie*, une table très exacte des longueurs des cordes.

XI. Pour avoir l'expression du *volume d'un tétraèdre* quelconque, soient  $\phi$  l'angle de deux faces,  $C$  le côté qui les joint,  $H$  et  $h$  les perpendiculaires à cette ligne abaissées des angles opposés, hauteurs de ces faces triangulaires;  $h \sin \phi$  est la hauteur du tétraèdre,  $\frac{1}{2}CH$  est la base; ainsi le volume est  $= \frac{1}{6}CHh \sin \phi$ .

XII. Soit un quadrilatère  $ABCD$  (fig. 191); désignons par  $a, b, c$  et  $d$  les côtés, et par  $(ab), (bc) \dots$ , les angles formés par les côtés  $a$  et  $b, b$  et  $c \dots$ . En projetant  $AD, DC$  et  $BC$  sur  $AB$ , on a  $AE = d \cos (ad), EF = c \cos (ac), FB = b \cos (ab)$ ; et comme  $AB = a = AE + EF + FB$ , on obtient

$$\begin{aligned} a &= b \cos (ab) + c \cos (ac) + d \cos (ad); \\ \text{de même } b &= a \cos (ab) + c \cos (bc) + d \cos (bd), \\ c &= a \cos (ac) + b \cos (bc) + d \cos (cd), \\ d &= a \cos (ad) + b \cos (bd) + c \cos (cd), \end{aligned}$$

en remarquant que les projections, qui sont soustractives, ont pour facteurs des cosinus négatifs. (*Voy.* p. 358 et 367.)

Multiplions ces équ. respectives par  $a, b, c, d$ , puis du 1<sup>er</sup> produit, retranchons la somme des trois autres; il viendra

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2[bc \cos (bc) + bd \cos (bd) + cd \cos (cd)];$$

on aurait aussi

$$c^2 = a^2 + b^2 + d^2 - 2[ab \cos (ab) + ad \cos (ad) + bd \cos (bd)],$$

et ainsi des autres côtés.

Le même calcul s'applique au pentagone, etc. En général, dans tout polygone plan, le carré d'un côté quelconque est égal à la somme des carrés des autres côtés, moins deux fois les produits deux à deux de ceux-ci, par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.

365. Les lignes trigonométriques servent souvent à faire des transformations qui rendent les formules propres aux log ou à résoudre des équ. En voici quelques exemples.

1. Trouver par log. la somme de plusieurs quantités ? so  
 $y = A(a+b)$ . On suppose que  $a$  et  $b$  sont des expressions algè  
 briques assez compliquées pour que l'emploi des log. puisse  
 avoir de l'avantage. Posons

$$\operatorname{tang} z = \frac{b}{a} \dots (1)$$

et éliminons  $a$ ; il vient

$$y = Ab \left( \frac{1}{\operatorname{tang} z} + 1 \right) = Ab \left( \frac{\cos z + \sin z}{\sin z} \right);$$

mais  $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , donne  $\sin 45^\circ \cdot \sqrt{2} = \cos 45^\circ \cdot \sqrt{2} = 1$ ; en  
 multipliant le numérateur par ces 1<sup>er</sup> membres, on a

$$y = \frac{Ab \sqrt{2}}{\sin z} (\sin z \cdot \cos 45^\circ + \cos z \cdot \sin 45^\circ),$$

$$y = Ab \sqrt{2} \cdot \frac{\sin (z + 45^\circ)}{\sin z} \dots (2);$$

l'équ. (1) fait connaître l'arc  $z$ , et (2) donne  $y$ .

Pour  $x = A(a+b+c)$ , on fait ci-dessus  $A=1$ , et on a  
 $y=a+b$ , d'où  $x=A(y+c)$ , expression qu'on traite par la  
 même méthode.

II. Résoudre par log. une équ. du 2<sup>e</sup> degré ?

1<sup>er</sup> cas. Soit  $x^2 + px = q$ ,  $q$  étant positif. On a

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} = -\frac{1}{2}p \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}} \right).$$

Soit posé

$$\operatorname{tang} \phi = \frac{\sqrt{q}}{p} \dots (1);$$

cette équ. fera connaître l'arc  $\phi$ : éliminant  $p$ ,

$$x = -\frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tang} \phi} (1 \pm \sec \phi) = -\sqrt{q} \left( \frac{\cos \phi \pm 1}{\sin \phi} \right)$$

Si l'on prend le signe  $-$ , l'équ.  $M. p. 372$ , donne

$$x = \sqrt{q} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} \phi \dots (2).$$

Pour le signe  $+$ , comme  $\text{tang}^{\frac{1}{2}}\phi = \frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi}$ , on a (\*)

$$x = -\sqrt{q} \cot^{\frac{1}{2}}\phi \dots (3)$$

1<sup>er</sup> cas Soit  $x^2 + px + q = 0$ ,  $q$  étant toujours positif; posons

$$\sin \phi = \frac{2\sqrt{q}}{p} \dots (4),$$

ce qui suppose que  $p > 2\sqrt{q}$ , ou  $p^2 > 4q$ , condition nécessaire pour que les racines soient réelles (n° 139). En changeant  $q$  en  $-q$  dans la 1<sup>re</sup> valeur de  $x$  ci-dessus et éliminant  $p$ , il vient

$$x = -\frac{\sqrt{q}}{\sin \phi} (1 \pm \cos \phi) = -\sqrt{q} \cdot \text{tang}^{\frac{1}{2}} \phi \dots (5)$$

lorsqu'on prend le signe  $-$ ; le  $+$  donne (\*).

$$x = -\sqrt{q} \cot^{\frac{1}{2}} \phi \dots (6).$$

Dans ces deux cas, lorsque  $p$  est négatif, on en porte la valeur avec son signe dans les expressions (1) ou (4), ce qui les rend négatives, puis on obéit à la règle du n° 349; ou bien on prend  $p$  positif et on change de signe les deux racines.

III. Résoudre l'équ.  $n \sin x + c \cos x = b$ ?

Posons  $\text{tang} \phi = \frac{c}{n} \dots (1);$

éliminant  $c$ , il vient

$$b = n (\text{tang} \phi \cos x + \sin x) = n \left( \frac{\sin \phi \cos x + \sin x \cos \phi}{\cos \phi} \right).$$

$$\text{d'où} \quad \sin (\phi + x) = \frac{b \cos \phi}{n} \dots (2);$$

l'équ. (1) fait connaître l'arc  $\phi$ , (2) donne l'arc  $\phi + x$ , et par suite l'inconnue  $x$  (\*\*).

(\*) Chacune des équ. (1) et (4) donne pour  $\phi$  deux valeurs qui, introduites dans l'une des deux formules 3 et 3, ou 5 et 6, suffit pour donner les deux racines.

(\*\*) Soit proposé cette question : construire un triangle  $ABC$  (fig. 195) avec les côtés donnés  $AC = b$ ,  $AB = c$ , faisant un angle inconnu  $A = x$ , qui soit tel que le segment  $CD$  soit égal à la perpend.  $FE$  menée du point donné  $F$ ,  $AF = n$ . On a  $FE = n \sin x = CD$ ,  $AD = c \cos x$ , et l'équ.  $AD + DC = b$  devient celle que nous venons de résoudre.

IV. Résoudre (\*) l'équ.  $\sin(x+k) = m \sin(x+l)$  ?

Posons  $x + \frac{1}{2}(k+l) = y :$

$$\text{d'où } \frac{\sin[y + \frac{1}{2}(k-l)]}{\sin[y - \frac{1}{2}(k-l)]} = m = \frac{\text{tang } y + \text{tang } \frac{1}{2}(k-l)}{\text{tang } y - \text{tang } \frac{1}{2}(k-l)}.$$

d'après l'équ. E. On en tire

$$\text{tang } y = \frac{1+m}{1-m} \text{tang } \frac{1}{2}(l-k).$$

Cette équ. donne  $y$ , et l'on trouve ensuite  $x$ . Si l'on pose

$$m = \text{tang } \phi, \text{ d'où } \frac{1+m}{1-m} = \frac{1+\text{tang } \phi}{1-\text{tang } \phi} = \text{tang } (45^\circ - \phi),$$

on a  $\text{tang } y = \text{tang } (45^\circ - \phi) \cdot \text{tang } \frac{1}{2}(l-k).$

### III. ÉQUATIONS DE LA LIGNE DROITE ET DU CERCLE.

#### *Équation de la Ligne droite.*

366. On nomme équ. d'une ligne BMZ (fig. 211) la relation qui a lieu entre les coordonnées  $x$  et  $y$  de chacun de ses points ; en sorte que si l'on conçoit que l'ordonnée  $PM$  se meut parallèlement en glissant le long de  $Ax$ , et que sa longueur varie en même temps que celle de l'abscisse, de manière que cette équ. entre  $x$  et  $y$  soit toujours satisfaite, l'extrémité  $M$  de l'ordonnée décrira la courbe.

On peut envisager l'équ. de la courbe comme renfermant

(\*) Dans le triangle  $ABC$  (fig. 20), on connaît la base  $AB = c$ , et le rapport  $a : b = m$  des deux autres côtés  $AC, BC$  ; on demande de construire ce triangle sachant que si des angles inconnus  $A, B$ , on retranche les angles donnés  $CAD = k, CBD = l$ , il en résultera un triangle isocèle  $ABD$ . L'inconnue est l'angle  $x = DAB = DBA$  ; la proportionnalité des sinus des angles  $CAB = x + k$ , et  $CBA = x + l$ , aux côtés opposés  $b$  et  $a$ , dont le rapport est connu  $= m$ , donne l'équ. ci-dessus, d'où il s'agit de tirer  $x$ .



deux inconnues  $x$  et  $y$ ; dont l'une est arbitraire. Qu'on prenne pour  $x$  une valeur quelconque  $a$ ; s'il en résulte pour  $y$  le nombre réel  $b$ ; le point dont les coordonnées sont  $a$  et  $b$ , que nous désignerons par le point  $(a, b)$ , sera un de ceux de la courbe. De même si  $x=a'$  donne  $y=b'$ , etc. Notre équ. indéterminée fera ainsi connaître une infinité de points dont le système est la courbe même; et l'on peut employer ce procédé pour en trouver divers points, s'assurer de la figure qu'elle affecte et des particularités que présente son cours. C'est ce qu'on verra souvent, par la suite.

Par ex.,  $y=b$  est visiblement l'équ. d'une droite  $MN$  (fig. 210), parallèle à l'axe  $Ax$ ,  $AQ$  étant  $=b$ ;  $y=0$  est l'équ. de l'axe des  $x$ . De même  $x=a$  est celle de  $PM$ , parallèle à l'axe  $Ay$ ,  $AP$  étant  $=a$ ; et  $x=0$  est l'équ. de cet axe même.

367. Cherchons l'équ. d'une droite quelconque.

1°. Si elle passe par l'origine, telle que  $AN$  (fig. 212); de quel que point  $D$ ,  $N...$ , qu'on abaisse les ordonnées  $DC$ ,  $PN....$ , on aura toujours  $\frac{DC}{AC} = \frac{PN}{AP} = ...$ . Soit donc  $a$  le rapport constant de chaque abscisse à son ordonnée, l'équ. de la droite  $AN$  est

$$y = ax.$$

Lorsque les coordonnées sont rectangulaires, dans l'un quelconque de ces triangles, on a (n° 354),  $PN = AP \tan A$ . On voit que  $a$  désigne la tangente de l'angle que la droite fait avec l'axe des  $x$ . Plus l'angle  $NAP$  croît, plus  $a$  augmente; si la droite, telle que  $AN'$ , fait un angle obtus avec les  $x$  positifs,  $a$  devient négatif, et l'équ. prend la forme  $y = -ax$ ; ici  $a$  est la tangente de l'angle  $N'AE$ . On voit en effet qu'alors les abscisses positives répondent à des ordonnées négatives, et réciproquement.

Mais si l'angle  $yAx$  n'est pas droit, le triangle  $NAP$  donne  $\frac{\sin NAP}{\sin ANP} = \frac{y}{x} = a$ ; donc alors  $a$  est le rapport des sinus des an-

gles que la droite fait avec les  $x$  et les  $y$  : rapport qui doit en affecter du signe  $-$ , quand la droite est située comme  $AV$ .

2° Si la droite, telle que  $BM$ , ne passe pas par l'origine, en faisant  $AB = b =$  l'ordonnée à l'origine, et menant  $AN$  parallèle à  $BM$ , l'ordonnée  $PM$ , ou  $y$ , se compose de  $MN = b$  et de  $PN = ax$ , donc on a

$$y = ax + b;$$

$b$  serait négatif, si la droite était telle que  $B'M$ .

368 Les quantités  $x$  et  $y$ , qui entrent dans l'équ. d'une droite, sont appelées *Variables*;  $a$  et  $b$  sont des *Constantes*; mais on sent que  $a$  et  $b$  pourraient varier eux-mêmes, et c'est ce qui arrive lorsqu'on fait prendre à la droite  $BM$  une autre position.  $y = ax + b$  appartient à toutes les droites, qui se distinguent entre elles par les valeurs de  $a$  et  $b$ .

L'équ. la plus générale du 1<sup>er</sup> degré,  $Ay + Bx + C = 0$ , équivalant à  $y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A}$ , qu'on peut écrire  $y = ax + b$ .

Prenons  $AB = b$  (fig. 212), et menons  $BM$  de sorte que...

$a = \tan BEA$ , ou  $= \frac{\sin NAP}{\sin ANP}$ , selon que les coordonnées sont

ou ne sont pas rectangles; la ligne  $BM$  aura  $y = ax + b$  pour équ.; on voit donc que toute équ. du 1<sup>er</sup> degré appartient à une droite qu'on sait décrire.

On peut aussi la tracer en déterminant deux de ses points.

Puisqu'en  $B$  l'abscisse est nulle, en faisant  $x = 0$ , on doit trouver l'ordonnée à l'origine; de même  $y = 0$  donne le point  $E$  où la ligne coupe l'axe des  $x$ . Ceci est général, quelle que soit la ligne, droite ou courbe. On peut donc se servir de ce théorème pour tracer facilement la droite.  $x = 0$  donne  $y = b = AB$ ,

de même  $y = 0$  donne  $x = -\frac{b}{a} = AE$ . Par les points  $E$  et  $B$  ainsi déterminés, on mènera  $EB$  qui sera la ligne cherchée.

Cependant si la ligne passait par l'origine, on  $y = ax$ , ce procédé ne donnerait que ce seul point, mais on ferait  $x = 1 = CA$ , et on en conclurait  $y = a = CD$ . Il sera bon de s'exercer à

de ces droites qui répondent à des équ. données, telles que  $2y + x = 2$ ,  $y = -3 + x$ ,  $y = -x - 1$ , etc. . . . , afin de reconnaître la disposition d'une droite, d'après l'équ. qui lui appartient.

369. *Trouver l'équ. d'une droite qui passe par deux points donnés.* Soient  $(x', y')$  le 1<sup>er</sup> point, et  $(x'', y'')$  le 2<sup>e</sup> point; l'équ. de la ligne est  $y = ax + b$ ,  $a$  et  $b$  sont inconnus; or, puisque la droite passe par le point  $(x', y')$ , si l'on fait  $x = x'$  on devra trouver  $y = y'$ ; partant

$$y = ax + b \text{ devient } y' = ax' + b;$$

retranchant, pour éliminer  $b$ , on trouve

$$y - y' = a(x - x') \dots (1).$$

C'est l'équ. qui appartient à toutes les droites qui passent par le point  $(x', y')$ , et qui ne sont distinguées entre elles que par la valeur de  $a$ , c.-à-d. par leur direction.

Mais si notre droite passe aussi par le point  $(x'', y'')$ ; on trouve de même  $y'' - y' = a(x'' - x')$ , d'où l'on tire

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \text{ et } y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x').$$

370. *Trouver l'angle que forment deux droites entre elles*, ces droites étant données par leurs équ.  $y = ax + b$ ,  $y = a'x + b'$ . Soient  $BC$  la 1<sup>re</sup> (fig. 213),  $\alpha$  l'angle  $B$  qu'elle fait avec  $Ax$ ;  $DC$  la 2<sup>e</sup>,  $\alpha'$  l'angle qu'elle, ou sa parallèle  $BE$ , fait avec  $Ax$ ,  $EBx = \alpha'$ ; ainsi  $\alpha = \text{tang } a$ ,  $\alpha' = \text{tang } a'$ ; l'angle cherché est  $V = \alpha - \alpha'$ . Or on a (359)

$$\text{tang } V = \frac{\text{tang } \alpha - \text{tang } \alpha'}{1 + \text{tang } \alpha \text{ tang } \alpha'} = \frac{a - a'}{1 + aa'} \dots (2).$$

Si  $a = a'$ , les deux droites sont parallèles, puisque  $V = 0$ , ce qui est d'ailleurs visible. Si  $aa' + 1 = 0$ ,  $\text{tang } V = \infty$ , ainsi l'angle  $V$  est droit: donc la condition, pour que deux droites soient parallèles ou perpendiculaires, est

$$a = a' \dots (3), \text{ ou } aa' + 1 = 0 \dots (4)$$

371. *Par un point donné, mener une droite qui soit parallèle*

ou perpendiculaire à une autre droite, ou qui fasse avec elle un angle connu. Soient  $y = ax + b$  l'équ. de la droite donnée,  $y = a'x + b'$  celle de la droite inconnue; il faut déterminer  $a'$  et  $b'$ . D'abord, puisque celle-ci passe par le point donné  $(x', y')$  on a l'équ.  $y - y' = a' (x - x')$ ; il reste à trouver  $a'$ .

1°. Si la droite est *parallèle* à la 1<sup>re</sup>, on a  $a = a'$ ; l'équ. (1) est celle qu'on demande.

2°. Si elle doit être *perpendiculaire*,  $aa' + 1 = 0$ ; d'où

$$a' = -\frac{1}{a}, y - y' = -\frac{1}{a} (x - x') \dots (5).$$

3°. Si les droites font entre elles un angle  $V$  dont la tang. soit donnée  $= m$ , on fait  $m = \tan V$ , dans l'équ. (2), et l'on a

$$a' = \frac{a - m}{am + 1}, y - y' = \frac{a - m}{am + 1} (x - x') \dots (6).$$

Par ex., si  $m = 1$ , on a l'équ. d'une droite inclinée de  $45^\circ$  sur la proposée,

$$(a + 1)(y - y') = (a - 1)(x - x').$$

372. *Trouver le point de rencontre de deux droites données.* Soient  $y = ax + b$ ,  $y = a'x + b'$  leurs équ. L' $x$  peut bien être le même pour ces lignes dans toute leur étendue; mais l' $y$  diffère. Le point où elles se coupent est le seul pour lequel  $x$  et  $y$  soient les mêmes. Si donc on élimine ces variables, on aura les coordonnées du point de rencontre: ce calcul est facile; il donne

$$x = \frac{b' - b}{a - a'}, y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}.$$

En général, si l'on élimine  $x$  et  $y$  entre les équ. de deux lignes courbes, on obtiendra les coordonnées de leurs points d'intersection; c'est même pour cela qu'en faisant  $y = 0$ , ou  $x = 0$ , on trouve les points où la ligne coupe les axes des  $x$  ou des  $y$ . car ces équ. sont celles de ces axes.

373. *Trouver la distance entre deux points donnés.* Soient  $(x', y')$ ,  $(x'', y'')$  ces deux points situés en  $M$  et  $N$  (fig. 214).

menons  $MR$  parallèle à  $Ax$ , et le triangle rectangle  $NMR$  donnera  $MN^2 = MR^2 + RN^2$  : or, on a

$NR = NQ - MP = y'' - y'$ ,  $MR = AQ - AP = x'' - x'$  ; ainsi la distance cherchée  $MN = \delta$  est

$$\delta = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} \dots (7).$$

La distance  $AM$  du point  $M$  à l'origine est  $\delta = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ .

Si les deux points devaient être situés sur une droite  $BN$  donnée par son équ.  $y = ax + b$ ,  $x', y', x'', y''$  devraient satisfaire à cette équ., d'où  $y' = ax' + b$ ,  $y'' = ax'' + b$ , et par conséquent  $\delta = (x'' - x') \sqrt{1 + a^2}$ .

374. *Trouver la distance d'un point à une ligne donnée.* Soient  $y = ax + b$  l'équ. de la droite  $BC$  (fig. 215),  $M$  ou  $M'$  ( $x', y'$ ) le point. Il faut 1°. abaisser la perpendiculaire  $MM'$  sur  $BC$  ; 2°. chercher le point  $N$  de rencontre de ces lignes ; 3°. mesurer la distance  $MN$  ou  $M'N = \delta$ . Pratiquons ces opérations en analyse. 1°. L'équ. de la droite indéfinie  $MM'$  qui passe par le point ( $x', y'$ ), et qui est perpendiculaire à  $BC$ , est (5), n° 371 ; 2°. on éliminera  $x$  et  $y$  entre les équ. des deux droites, et on aura les coordonnées du point  $N$  d'intersection ; 3°. enfin, on mettra ces valeurs pour  $x'', y''$  dans la formule (7).

Mais puisqu'on cherche  $x - x'$  et  $y - y'$ , le calcul se simplifie en préparant ainsi l'équ.  $y = ax + b$  :

$$y - y' = a(x - x') + b + ax' - y', \quad y - y' = -\frac{1}{a} (x - x') ; \text{ d'où}$$

$$x - x' = \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2}, \quad y - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2} ; \text{ la}$$

somme des carrés de ces quantités est  $\left( \frac{y' - ax' - b}{1 + a^2} \right)^2 (1 + a^2)$ ,

$$\text{done on a} \quad \delta = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}},$$



pour la distance cherchée, ou la longueur  $MA'$  ou  $M'N$  de la perpendiculaire (\*).

375 En général, les problèmes relatifs à la ligne droite sont de deux sortes :

1°. Ou, une droite étant donnée, on cherche celui de ses points  $(x', y')$  qui satisfait à une condition exigée.  $a$  et  $b$  sont connus dans  $y' = ax' + b$ , de plus, la condition à laquelle le point doit satisfaire étant traduite algébriquement, on a une seconde relation entre  $x'$  et  $y'$ . L'élimination fait donc connaître ces coordonnées. On pourrait avoir plusieurs droites et plusieurs conditions données, mais les choses auraient encore lieu d'une manière analogue.

2°. Ou l'on cherche une droite qui satisfasse, par sa position, à de certaines conditions; alors  $a$  et  $b$  sont inconnus dans  $y = ax + b$ , et le problème consiste à les déterminer. Or, les conditions données, traduites en analyse, conduiront à des équ. qui feront connaître  $a$  et  $b$ ; elles ne pourront être qu'un nombre de deux, à moins qu'elles ne comportent elles-mêmes de nouvelles inconnues.

376. Voici plusieurs exemples où ces principes sont appliqués.

1. *Partager en deux parties égales l'angle que forment entre elles deux droites données*  $AB$ ,  $AC$  (fig. 216). Traçons deux axes rectangulaires  $Ax$ ,  $Ay$ , par le point  $A$  de concours des lignes, leurs équ. sont  $y = ax$ ,  $y = bx$ ,  $a$  et  $b$  étant donnés. Soit  $y = kx$  celle de la droite cherchée  $AD$ ; il s'agit de trouver  $k$ .

L'angle  $DAB$  a pour tangente  $\frac{a-k}{1+ak}$  (n° 371); celle de l'angle

(\*)  $\sqrt{1+a^2}$  comporte  $\pm$ ; mais il faut préférer le signe qui rend  $\delta$  positif (n° 108). Or, l'ordonnée du point  $R$  ou  $R'$  de  $BC$ , qui a  $x'$  pour abscisse étant  $y = ax' + b$ , suivant que le point donné sera en  $M$  ou en  $M'$  c.-à-d., ou dessus ou en dessous de la ligne, on aura  $y' >$  ou  $<$   $ax' + b$  donc, dans le 1<sup>er</sup> cas, on prendra  $\delta = \frac{ax' + b - y'}{\sqrt{1+a^2}}$

$DAC$  est  $\frac{k-b}{1+bk}$ , donc  $\frac{a-k}{1+ak} = \frac{k-b}{1+bk}$ , d'où

$$k' - \frac{2(ab-1)}{a+b} k - 1 = 0$$

On tire de là la valeur de  $k$ , et on la substitue dans  $y = kx$ . Comme il y a deux racines réelles,  $k'$  et  $k''$ , le dernier terme  $-1$  est leur produit, ou  $k'k''+1=0$ ; ce qui apprend que les deux lignes  $AD$ ,  $AE$ , ainsi obtenues, sont à angle droit (n° 370).

Si les axes ne passaient pas par l'origine  $A$ , l'équ. cherchée serait  $y-y' = k(x-x')$ ,  $k$  ayant la valeur ci-dessus, et  $x'$ ,  $y'$  étant les coordonnées du point de concours.

Quand l'une des droites  $AC$  est l'axe des  $x$ ,  $b=0$ , et on a simplement  $k' + \frac{2k}{a} = 1$ .

II. Etant données les droites  $AB$ ,  $Ax$  (fig. 217), quel est le point  $D(x', y')$  tel, que,  $CD$  étant parallèle à  $Ax$ , on ait  $AC = CD$ ? Prenons  $A$  pour origine,  $Ax$  pour axe des  $x$ , soient  $AI = m$ ,  $y = ax$  l'équ. de  $AB$ , enfin menons  $AD$ , et supposons que  $y = kx$  en soit l'équ.;  $a$  est donné, et il faut trouver  $m$ ,  $x'$  et  $y'$ , ou, si l'on veut,  $x'$  et  $k$ .

On a  $CD = AE - AI = x' - m$ , et, par condition,

$$AC^2 = m^2 + y'^2 = (x' - m)^2; \text{ donc } y'^2 = x'^2 - 2mx'.$$

Or, le point  $C$  est sur  $AB$ , et  $D$  sur  $AD$ ; donc  $y' = am$  et  $y' = kx'$ . Éliminant  $m$  et  $y'$ , il vient  $ak^2 + 2k = a$ , équ. qui prouve (probl. I) que  $AD$  coupe par moitié l'angle  $BAE$ :  $x'$  ne restant pas dans le calcul, est arbitraire, ainsi, tous les points de  $AD$  satisfont à la question, qui a une infinité de solutions.

III. Trouver les équ. des perpendiculaires  $AF$ ,  $CE$ ,  $BD$  (fig. 218) menées de chaque angle du triangle  $ABC$  sur le côté opposé, la base  $AC = b$  étant prise pour axe des  $x$  et l'origine est en  $A$ ; le sommet  $B(x', y')$  détermine le triangle.

La droite  $AB$  a pour équ.  $y = ax$ ,  $a$  étant  $\frac{y'}{x'}$ , parce qu'elle

passé en  $B$ . Il est aisé d'avoir de même celle de la droite  $BC$ , menée par  $B (x', y')$ , et  $C (b, 0)$ ; on a donc, pour les équ. de  $AB$  et  $BC$ ,

$$y = \frac{y'}{x'} x, \quad y = \frac{y'}{x' - b} (x - b).$$

De plus  $CE$  passe en  $C (b, 0)$ ;  $AF$  par l'origine; leurs équ. sont donc de la forme  $y = A (x - b)$ ,  $y = Bx$ ; la condition d'être perpendiculaires aux précédentes donne (n° 370)

$$\frac{Ay'}{x'} + 1 = 0, \quad \frac{By'}{x' - b} + 1 = 0;$$

donc les équ. des perpendiculaires sont

$$y = -\frac{x'}{y'} (x - b), \quad y = -\frac{x' - b}{y'} x.$$

Pour trouver le point  $O$  où elles se coupent, il faut éliminer  $x$  et  $y$ ; on trouve  $x = x' =$  l'abscisse  $AD$  du sommet; ainsi ce point  $O$  est sur l'ordonnée  $BD$ . Donc *les perpendiculaires abaissées des trois angles d'un triangle sur les côtés opposés se coupent en un même point*. En décrivant sur  $AC$  la demi-circonf.  $A E F C$ , et par les points  $F, E$  d'intersection, menant  $AF$  et  $CE$ ; puis enfin, par le point  $O$  de concours, traçant  $BD$ , on aura les trois perpendiculaires.

IV. *Trouver un cercle tangent aux trois côtés d'un triangle ABC (fig. 68). Cherchons d'abord un point  $O (\alpha, \beta)$ , qui soit à égale distance de  $AB$  et  $AC$ ; en conservant la notation précédente, l'équ. de  $AC$  est  $y = \frac{y'}{x'} x$ , donc les longueurs  $OE, OF$  des perpendiculaires sont (n° 374)*

$$OE = \frac{\alpha y' - \beta x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} = \frac{\alpha y' - \beta x'}{\pm b}, \quad OF = \beta.$$

On a  $AC = b$ , et l'on met  $\pm$ , parce que le point inconnu  $O (\alpha, \beta)$  peut être en-dessus ou en-dessous de  $AC$ .  $\alpha$  et  $\beta$  sont déterminés par  $OE = OF$ , ou  $\alpha y' = \beta (x' \pm b)$ , équ. unique; ce qui prouve qu'il y a une infinité de points  $O$ , à égale distance

de  $AB$  et  $AC$ , lesquels, étant sur la ligne dont l'équ. est  $y = \left(\frac{y'}{x' \pm c}\right)x$ , sont situés sur deux droites, qui passent par le sommet  $A$ , et font, avec la base  $AB$ , des angles dont les tang. sont  $\frac{y'}{x' \pm c}$ . Comme le produit de ces tang. se réduit à  $-1$ , à cause de  $x'^2 + y'^2 = c^2$ , ces deux droites sont perp. entre elles : il s'agit de trouver la position de l'une,  $AO$  (fig. 68).

Comme  $\text{tang } BAC = \frac{y'}{x'}$ , on a  $\cos A = \frac{x'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}} = \frac{x'}{c}$ ;

d'où  $\text{tang } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{c - x'}{c + x'}} = \frac{y'}{x' + c}$  (*M*, n° 359, et en multipliant haut et bas par  $c + x'$ ) : donc  $OAB = \frac{1}{2} BAC$ ; ce qu'on sait d'ailleurs (n° 210, I) Si l'on mène  $OA$  et sa perp., coupant par moitié l'angle  $BAC$  et son supplément, le centre cherché sera sur ces lignes. En traçant  $CO$ , qui divise par moitié l'angle  $C$ , et sa perpend., puis faisant la même chose pour  $B$ , les intersections de ces six droites, combinées deux à deux, donneront quatre points qui seront les centres des cercles tangens cherchés : l'un est inscrit au triangle, les trois autres sont tracés extérieurement.

Au lieu de faire les trois perpend.  $OD$ ,  $OE$ ,  $OF$  égales entre elles, on pourrait se proposer de trouver le point  $O$  par la condition que les rapports de ces longueurs fussent donnés.

V. Par le point  $M$  (fig. 219), tracer  $NQ$ , qui coupe l'angle  $NBx$ , et forme le triangle  $BNQ$  dont l'aire soit donnée.  $Bx$  et  $By$  étant les axes, les données sont  $\text{tang } NBx = a$  et le point  $M(a, \beta)$ ; l'inconnue est  $BQ = z$ . L'équ. de  $NQ$ , qui passe en  $Q(z, 0)$ , est  $y = A(x - z)$ ; cette droite passe aussi en  $M(a, \beta)$ ; d'où  $A = \frac{\beta}{a - z}$ . L'équ. de  $BN$  est  $y = ax$ . Éliminant  $x$  pour avoir l' $y$  du point commun  $N$ , il vient  $(A - a)y = Aaz$ ; d'où

$$y = \frac{Aaz}{A - a} = \frac{\beta az}{\beta - az + az}.$$

Or, menons  $AM$  parallèle à  $BN$ , et faisons  $AB = m$ . L'équ. de  $AM$ , qui passe en  $M(a, \beta)$ , est  $y - \beta = a(x - a)$  : pour le point  $A$ ,  $y = 0$  ; d'où  $am = aa - \beta$ . Introduisant ci-dessus  $a$  pour  $aa - \beta$ , il vient  $y = ND = \frac{\beta z}{z - m}$ .

Cela posé, quelle que soit l'aire donnée, on pourra toujours la transformer en un rectangle, dont la hauteur sera  $PM = \beta$  et dont  $k$  serait la base. On devra donc avoir  $k\beta = \frac{1}{2}xy$ , ou  $z^2 - 2kz + 2km = 0$  ; ce qui donne deux solutions faciles à construire (n° 330) : la seconde a lieu quand la droite  $NQ$  coupe le supplément de l'angle  $NBQ$ . (Voyez n° 334.)

On pourra s'exercer sur les problèmes suivans :

VI. Étant données les équ. de deux droites  $AB, AC$  (fig. 216) ; prendre des parties égales  $AB, AC$ , calculer la longueur  $BD$  de la moitié de la corde  $BC$ , et en conclure l'angle  $BAC$ . La formule doit s'accorder avec (2), n° 370.

VII. Dans la même circonstance, chercher l'équ. de la corde  $BC$ , et celle de sa perpend.  $AD$ , dont la direction doit s'accorder avec le problème I.

VIII. Les perpend.  $DO, FO, EO$  (fig. 220), élevées sur le milieu des côtés d'un triangle  $ABC$ , concourent en un même point  $O$ . En général, si  $D$  et  $F$  sont situés d'une manière quelconque sur les côtés  $AB$  et  $BC$ , mais divisent ces côtés proportionnellement (la droite  $DF$  est parallèle à  $AC$ ), toutes les perpend.  $DO, FO$  se coupent en des points  $O$  situés sur une même droite qui passe par le sommet  $B$ .

IX. Trouver les équ. des lignes  $CD, AF, BE$  (fig. 220), menées des milieux des côtés du triangle  $ABC$  aux angles opposés ; prouver qu'elles concourent en même point  $G$ , qui est aux  $\frac{2}{3}$  de chacune, à partir du sommet de l'angle.

Plus généralement, si sur deux côtés  $AB, BC$  d'un triangle, on prend des parties quelconques  $AD, CF$  proportionnelles à ces côtés, les droites  $CD$  et  $AF$  se coupent en un



point  $G$ , situé sur la ligne menée de l'angle  $B$  au milieu  $E$ , du côté opposé.

Consultez le *Recueil des propositions* de M. Puissant.

### Du Cercle.

377. La distance  $R$  d'un point  $M(x, y)$  à l'origine  $C$  (fig. 221) est  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ , les axes étant à angle droit ; ainsi l'équ. du cercle est

$$x^2 + y^2 = R^2 \dots (1),$$

puisque, pour tous ces points, la distance  $R$  est constante.

Le même raisonnement (équ. 7, p. 397) prouve que

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \dots (2),$$

est l'équ. d'un cercle dont le centre a pour coordonnées  $\alpha$  et  $\beta$ . Quand l'origine est à l'extrémité  $O$  du diamètre  $\alpha = R$ ,  $\beta = 0$ , et l'on a  $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ , ou plutôt

$$y^2 = 2Rx - x^2.$$

Si les  $x$  et  $y$  font un angle  $\gamma$ , le triangle  $CPM$  a l'angle  $P = 180^\circ - \gamma$ , et la distance constante  $CM = R$  de tous les points du cercle au centre  $C$ , pris pour origine, est donnée par l'équ.  $D$  (n° 355) : l'équ. est donc

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \gamma = R^2 \dots (3).$$

Il est bon de s'exercer à reconnaître la figure d'une courbe et ses propriétés d'après son équ. : bien que ces choses soient connues pour le cercle, nous allons, profitant d'un exemple aussi simple, montrer le parti qu'on peut tirer des équations des courbes pour atteindre à ce but.

378. Comme  $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ , à chaque abscisse (fig. 221) répondent deux ordonnées égales et de signes contraires, de sorte que la courbe est coupée par  $Ox$  en deux parties qui coïncident lorsqu'on plie la figure suivant  $Ox$ . La même chose a lieu pour  $Dy$ . En faisant  $x = 0$ , on a  $y = \pm R$ , et les points  $y$  et  $D$  de la courbe ; plus  $x$  croît, plus  $\sqrt{R^2 - x^2}$ , ou  $y$ , décroît jusqu'à  $x = R$ , d'où  $y = 0$  : ainsi, la courbe  $y$   $MA$

s'abaisse sur l'axe des  $x$  qu'elle rencontre en  $A$ . Elle ne s'étend pas au-delà de  $A$ , car  $y$  devient imaginaire. De ces notions résulte la figure de la courbe.

Toute droite  $OM$  menée par le point  $O(-R, 0)$  a pour équ.  $y = a(x + R)$ ; de même pour  $A(+R, 0)$ ,  $y = a'(x - R)$  est l'équ. de  $MA$ . Le point  $M$  de rencontre de ces lignes a pour coordonnées

$$x = \frac{a' + a}{a' - a} R, \quad y = \frac{2aa'R}{a' - a}.$$

Pour que ce point soit situé sur la circonf., il faut que l'équ.  $x^2 + y^2 = R^2$  soit satisfaite par ces valeurs. Ainsi  $aa'(1 + aa') = 0$  est l'équ. de condition qui exprime que les deux cordes se coupent sur la circonf. On en tire  $a = 0$ , ou  $a' = 0$ , ou enfin  $1 + aa' = 0$ : les deux 1<sup>res</sup> expriment que, lorsqu'une des cordes est couchée sur le diamètre, la condition est satisfaite, ce qui n'apprend rien: l'autre  $1 + aa' = 0$  indique que l'une des cordes ayant une direction quelconque, l'autre lui est perpend., le point d'intersection sera sur la circonférence.

Comme  $y^2 = R^2 - x^2 = (R + x) \times (R - x)$

et que  $R + x = OP$ ,  $R - x = AP$ ,

$PM$  est moyen proportionnel entre  $OP$  et  $AP$ .

La longueur de la corde  $AM$  est  $\sqrt{y^2 + (R - x)^2}$ ; ainsi  $AM^2 = 2R^2 - 2Rx = 2R(R - x)$ ;  $AM$  est donc moyen proportionnel entre  $AP$  et le diamètre  $AO$ .

379. Pour obtenir les intersections d'une droite  $MN$  et d'un cercle  $NKI$  (fig. 322), on élimine  $x$  et  $y$  entre les équ.  $y = ax + b$  et  $x^2 + y^2 = R^2$ , de ces lignes; il vient

$$x = \frac{ab \pm \sqrt{[R^2(1 + a^2) - b^2]}}{1 + a^2} = \frac{ad \pm \sqrt{R^2 - d^2}}{\sqrt{1 + a^2}},$$

en faisant  $d = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2}}$  = la distance de la droite au centre du cercle dont il s'agit (n° 374). Il se présente trois cas.

1°. Si le radical est imaginaire, ou  $d > R$ , la droite ne rencontre pas la circonférence.

2°. Si le radical est réel, ou  $d < R$ , le cercle est coupé en deux points; et comme on peut prendre l'axe des  $x$  parallèle à la sécante  $MN$ , ou  $a = 0$ , on trouve  $x = \pm \sqrt{R^2 - b^2}$ ; le signe  $\pm$  prouve que le rayon perpend. à une corde la coupe en deux parties égales.

3°. Enfin, si le radical est nul, on a  $d = R$ ; la droite coupe la circonf. en un seul point, ou plutôt elle est tangente. Soient  $x', y'$  les coordonnées du point  $T$  de contact, on trouve

$$x' = \frac{-ab}{1+a^2}, \quad y' = ax' + b;$$

d'où 
$$a = -\frac{x'}{y'}, \quad b = \frac{x'^2 + y'^2}{y'} = \frac{R^2}{y'}.$$

Or le rayon  $CT$  (fig. 322) mené au point de contact  $T(x', y')$  ayant pour équ.  $y = ax$ , on trouve  $a' = \frac{y'}{x'}$ ; d'où  $aa' = -1$ : ce qui signifie (n° 370) que ce rayon est perpend. à la tangente;  $y = ax + b$  devient

$$yy' + xx' = R^2 \dots (1);$$

c'est l'équation de la tang. au cercle en un point quelconque  $(x', y')$  de cette courbe.

Si par un point extérieur  $M(a, \beta)$ , on veut mener une tang.  $MT$ , il faut trouver les coordonnées  $x', y'$  du point  $T$  de contact: elles doivent satisfaire aux équ. du cercle, et  $a, \beta$ , à celle de la tangente; donc

$$x'^2 + y'^2 = R^2, \quad \beta y' + ax' = R^2 \dots (2)$$

L'élimination conduit à des équ. du 2° degré en  $x'$  et  $y'$ , en sorte qu'il y a deux points de contact  $T$  et  $T'$ , et par conséquent deux tang.  $MT, MT'$  menées par le point donné  $M$ . Mais, au lieu d'effectuer ce calcul, observons que nos deux équ. n'ont lieu ensemble, il est vrai, que pour les coordonnées constantes  $x', y'$  du point de contact, mais que, si l'on ne prend

que la seconde,  $x'$  et  $y'$  deviennent des variables; d'ailleurs,  $\beta y + \alpha x = R'$  est l'équ. de la droite  $TT'$  qui passe par les deux points de contact, puisque leurs coordonnées  $x'$  et  $y'$  y satisfont. Il est aisé de tracer cette droite (n° 368), et d'en tirer les points de contact et les tangentes.

$y=0$  donne l'abscisse du point  $B$ , où la corde  $TT'$  coupe l'axe des  $x$ ,  $CB = \frac{R^2}{a}$ ; comme cette valeur est indépendante de  $\beta$  ou  $PM$ , il s'ensuit que si le point  $M$  se meut le long de  $PM$ , les tang. changent de situation; la corde  $TT'$  tourne autour du point fixe  $B$ . (Voy. 413 et 464, IV.)

On peut aussi présenter le calcul de manière à retrouver le procédé géométrique (n° 212, II). Pour cela, retranchons nos équ. (2), et ne considérons que cette seule différence:  $x'$  et  $y'$  sont des variables, et les coordonnées du point  $T$  ou  $T'$  de contact doivent satisfaire à l'équ.  $y' - \beta y + x' - \alpha x = 0$ , qu'on peut écrire

$$(y - \frac{1}{2}\beta)^2 + (x - \frac{1}{2}\alpha)^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2).$$

La courbe à laquelle appartient cette équ. passe donc par les deux points de contact. Or, cette courbe est un cercle dont le centre est en  $m(\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\beta)$ , et le rayon  $= \sqrt{\frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2)}$ . Si donc on prend  $Cp = \frac{1}{2}CP$ ,  $pm = \frac{1}{2}PM$ ,  $m$  sera le centre, et  $Cm$  sera le rayon d'un cercle qui passera par les points de contact cherchés  $T$  et  $T'$ .

380. Soient deux cercles  $C$  et  $C'$  (fig. 57), l'origine en  $C$ ,  $CC' = a$  sur l'axe des  $x$ , leurs équations sont  $x^2 + y^2 = R^2$  pour  $C$ , et  $(x-a)^2 + y^2 = R'^2$  pour  $C'$ . En éliminant  $x$  et  $y$ , on a pour les points d'intersection

$$x = \frac{a^2 + R^2 - R'^2}{2a}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{[4a^2 R^2 - (a^2 + R^2 - R'^2)^2]}}{2a}.$$

L'abscisse étant simple et l'ordonnée double, la ligne  $CC'$ , qui joint les centres, est perpend. sur le milieu de la corde  $MM'$ .

Il est aisé de tirer de ces équ. les conditions relatives aux cas où les cercles se coupent ou se touchent (n° 202): en effet, le radical traité comme p. 337, devient

$$= (a+R+R')(a+R-R'), (R+R'-a)(R'+a-R).$$

Admettons que  $R$  soit  $=$  ou  $> R'$  ; les deux 1<sup>ers</sup> facteurs seront positifs, et il reste à analyser les cas que peuvent offrir  $R+R'-a$  et  $R'+a-R$ .

1°. Si les signes sont les mêmes, ils ne peuvent être  $-$ , car on ne peut avoir ensemble  $a > R+R'$  et  $< R-R'$  ; ainsi, dès que le radical est réel, les circonf. se coupent en deux points, et l'on a  $a < R+R'$ , et  $> R-R'$ .

2°. Si l'un de nos deux facteurs est nul,  $a = R+R'$ , ou  $a = R-R'$  ; d'où  $y=0$ ,  $x=R$ , les cercles n'ont donc qu'un point commun sur la ligne qui joint les centres : c'est le cas du contact.

3°. Enfin, si les signes sont contraires, savoir :

$$a > R+R' \text{ et } R-R', \text{ ou } a < R-R' \text{ et } R+R' ;$$

comme la 1<sup>re</sup> de ces deux conditions comprend la 2<sup>e</sup>, il s'ensuit que les cercles n'ont aucun point commun, quand

$$a > R+R', \text{ ou } < R-R'.$$

381. Voici quelques autres problèmes à résoudre.

I. Étant donnés une droite et un cercle, mener une tangente parallèle à cette droite.

II. Mener une tangente à deux cercles donnés.

III. Tracer une circonf. tangente à un cercle et à deux droites données (le centre est sur la ligne qui divise l'angle donné en deux parties égales).

### *Transformation de coordonnées.*

382. L'équ. d'une courbe est quelquefois si composée, qu'il est difficile d'en déduire les propriétés ; mais il se peut que cette complication tiende aux axes coordonnés auxquels la courbe est rapportée. On a vu, par ex., que le cercle a pour équations

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = R^2, \quad y^2 = 2Rx - x^2, \quad x^2 + y^2 = R^2.$$



celle-ci n'est plus simple que parce que l'origine est au centre. Il convient donc de savoir transformer l'équ. d'une courbe, de manière à la rapporter à d'autres axes, afin de simplifier les calculs.

Les axes coordonnés étant  $Ax, Ay$  (fig. 223), sous un angle  $A$  quelconque, supposons qu'on veuille prendre d'autres axes  $A'x', A'y'$  parallèles aux 1<sup>ers</sup>. Soient  $AB = a, BA' = b$  les coordonnées de la nouvelle origine,  $AP = x, PM = y$ , celles d'un point  $M$ ;  $A'C = x', CM = y'$  les nouvelles coordonnées. On a  $AP = BP + AB, PM = MC + CP$ , ou

$$x = x' + a, y = y' + b \dots (A).$$

Ces valeurs, substituées dans l'équ. en  $x$  et  $y$  d'une courbe, la traduiront en  $x'$  et  $y'$ , et l'origine sera transportée en  $A'$  ( $a, b$ ).  $a$  et  $b$  doivent d'ailleurs avoir des signes dépendans de la position de la nouvelle origine  $A'$  relativement à  $A$ ; en sorte que, si elle était située en  $D$ ,  $a$  serait positif et  $b$  négatif, et il faudrait faire  $x = x' + a$ , et  $y = y' - b$ , etc.

383. Supposons que les axes primitifs  $Ax, Ay$ , étant rectangulaires (fig. 224), on veuille, sans changer l'origine  $A$ , en prendre d'autres, tels que  $Ax', Ay'$ . Désignons par  $(xx')$  l'angle  $xAx'$  que forment les axes des  $x$  et des  $x'$ ; de même par  $(xy')$  l'angle  $xAy'$ . Pour un point quelconque  $M$ ,  $AP = x, PM = y$ .  $AL = x', ML = y'$ ; il s'agit d'exprimer  $x$  et  $y$ , en  $x', y'$  et les angles donnés  $(xx')$ ,  $(xy')$ , qui déterminent la position des nouveaux axes. On a  $x = AK + LI$ , ainsi l'abscisse  $x$  est la projection sur l'axe des  $x$  de la portion de polygone  $ALM$ ; de même  $y = LK + IM$ . Or, les triangles  $AKL, LIM$  donnent (n° 354, A)

$$AK = x' \cos (xx'), KL = x' \sin (xx'),$$

$$LI = y' \cos (xy'), MI = y' \sin (xy').$$

Donc

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos (xx') + y' \cos (xy') \\ y &= x' \sin (xx') + y' \sin (xy') \end{aligned} \right\} \dots (B).$$

Si les nouveaux axes sont aussi à angle droit (fig. 225),

$(xy')=90^\circ + (xx')$ ; d'où

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos (xx') - y' \sin (xx') \\ y &= x' \sin (xx') + y' \cos (xx') \end{aligned} \right\} \dots (C).$$

C'est ce que donnent directement des triangles  $AKL$ ,  $LIM$ ;

car  $AK=x' \cos (xx')$ ,  $KL=x' \sin (xx')$ ,  
 $LI=y' \sin (xx')$ ,  $IM=y' \cos (xx')$ ,

et de plus  $x=AK-IL$ ,  $y=LK+IM$ .

384. Supposons enfin (fig. 224) que les axes  $Ax$ ,  $Ay$  aient une inclinaison quelconque, ainsi que  $Ax'$ ,  $Ay'$ . Pour passer des 1<sup>res</sup> aux 2<sup>es</sup>, résolvons les triangles obliques  $ALK$ ,  $LMI$ ; il vient (n° 355),

$$\frac{AK}{AL} = \frac{\sin ALK}{\sin AKL}, \text{ d'où } AK = \frac{x' \sin (x'y)}{\sin (xy)}$$

$$KL = \frac{x' \sin (xx')}{\sin (xy)}, \quad LI = \frac{y' \sin (yy')}{\sin (xy)}, \quad IM = \frac{y' \sin (xy')}{\sin (xy)};$$

$$\text{d'où } \left. \begin{aligned} x &= \frac{x' \sin (x'y) + y' \sin (yy')}{\sin (xy)} \\ y &= \frac{x' \sin (xx') + y' \sin (xy')}{\sin (xy)} \end{aligned} \right\} \dots (D).$$

(Quand les axes primitifs  $Ax$ ,  $Ay$  sont obliques, et que les transformés  $Ax'$ ,  $Ay'$  sont rectangles (fig. 225), il suffit de poser ici  $(x'y)=90^\circ$ , ou  $(x'y)$  complément de  $(yy')$ ; d'où

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' \sin (x'y) - y' \cos (x'y)}{\sin (xy)} \\ y &= \frac{x' \sin (xx') + y' \cos (xx')}{\sin (xy)} \end{aligned} \right\} \dots (E).$$

Nous avons supposé partout que l'axe des  $x'$  est situé en dedans de celui des  $x$ , etc., ce qui pourrait ne pas exister dans un cas auquel on voudrait appliquer ces formules, il faudrait alors modifier les signes des  $\sin$ . et  $\cos$ . d'après la règle des indirectes (n° 339), en comparant la disposition des axes, dans

l'application qu'on veut faire, avec celle des fig. 224 et 225. Par ex., si l'axe des  $x'$  est au-dessous de  $Ax$ , on fera  $\sin (ex')$  négatif,  $\cos (x'x)$  positif. (\*)

385. Jusqu'ici nous n'avons déterminé la position d'un point sur un plan que par ses distances à deux axes; mais il y a bien des manières différentes de la fixer, ce qui fournit autant de systèmes coordonnés. (Voy. *Géométrie de position*, par Carnot, p. 423.)

Arrêtons-nous aux *coordonnées polaires*. La position d'un point  $M$  (fig. 227) est donnée par sa distance  $AM = r$  à un point fixe  $A$ , qu'on nomme *pôle*, et par l'angle  $MAP = t$  que fait cette ligne  $AM$  avec une ligne fixe donnée  $Ax$ ;  $AM$  est le *rayon vecteur* du point  $M$ .

L'équ. polaire d'une courbe  $MN$  est la relation entre  $r$  et  $\theta$ , pour chacun de ses points. Si le rayon  $AM$  tourne autour de  $A$ , et que sa longueur varie à mesure qu'il tourne, c.-à-d. avec  $\theta$ , de manière que l'équ. entre  $r$  et  $\theta$  soit toujours satisfaite, l'extrémité  $M$  du rayon vecteur décrira la courbe  $MN$ .

Le triangle rectangle  $AMP$ , où  $AP = x$ ,  $PM = y$ , donne

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Ainsi pour passer d'un système de coordonnées  $x$  et  $y$  aux polaires  $r$  et  $t$ , il faudra d'abord transformer l'équ. en coordonnées rectangulaires, si elles sont obliques; prendre pour origine le point  $A$ , qui doit être le pôle: enfin la droite  $Ax$ , à partir de laquelle on compte les arcs  $\theta$ , devra être l'axe des  $x$ . Ensuite on mettra  $r \cos t$  et  $r \sin t$  pour  $x$  et  $y$ .

Reciproquement, si l'on a l'équ. en  $r$  et en  $t$  d'une courbe, en éliminant ces variables à l'aide des relations précédentes, on la traduira en coordonnées rectangulaires  $x$  et  $y$ .

(1) Au reste, il est toujours plus court et moins sujet à erreur de tirer directement les formules de transformation de la figure même qu'on considère, en reproduisant sur cette figure les opérations ci-dessus, c.-à-d. en projetant les longueurs  $x'$  et  $y'$  sur chacun des axes  $x$  et  $y$  qu'on veut transformer, ces projections étant faites dans les directions de ces derniers axes.

Prenons pour ex. l'équ. (2) (n° 377), du cercle dont le centre  $C$  (fig. 226) a pour coordonnées  $\alpha$  et  $\beta$ , elle devient par nos valeurs de  $x$  et  $y$  :

$$r^2 - 2r(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0 \dots (1)$$

1°. Pour chaque rayon vecteur  $r$ , la distance de l'origine  $A$  à la courbe est double,  $AM$  et  $AN$ . Les valeurs de  $r$  sont imaginaires pour les inclinaisons  $\theta$  de la ligne  $AM$  qui ne rencontrent pas le cercle.

2°. Le produit des deux racines  $r''$ ,  $r'$  de  $r$  est (n° 137, 3°.)

$$r'' \cdot r' = AM \times AN = \alpha^2 + \beta^2 - R^2,$$

quantité indépendante de  $\theta$  ; donc, si d'un point fixe  $A$ , on mène des droites quelconques, le produit  $AM \times AN$  des deux rayons vecteurs est constant pour toutes les secantes.

Selon que le point  $A$  est intérieur ou extérieur au cercle, on retrouve les théorèmes n° 225 et 228.

3°. Le coefficient du 2<sup>e</sup> terme est la somme des deux racines  $r''$  et  $r'$  en signes contraires ; faisons  $AC = m$ , l'angle  $CAM = \varphi$  ; il vient  $\theta = \varphi + i$ ,  $\alpha = m \cos i$ ,  $\beta = m \sin i$ , et

$$r'' + r' = 2m (\cos i \cos \theta + \sin \theta \sin i) = 2m \cos (\theta - i) = 2m \cos \varphi :$$

donc  $AM + AN = 2m \cos \varphi$ , équ. facile à construire lorsque connaissant deux des quantités  $r'' + r'$ ,  $m$  et  $\varphi$ , on demande la 3<sup>e</sup>.

4°. Pour que  $AM$  soit tangente, il faut que les racines  $r''$  et  $r'$  soient égales, et l'équ. (1) un carré exact, ou (n° 138)

$$4 (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)^2 - 4 (\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = 0,$$

$$\text{d'où } R^2 = \alpha^2 \sin^2 \theta - 2\alpha\beta \sin \theta \cos \theta + \beta^2 \cos^2 \theta = (\alpha \sin i - \beta \cos i)^2$$

$$\pm R = m (\cos i \sin \theta - \sin i \cos \theta) = m \sin (\theta - i) = m \sin \varphi.$$

Dans le triangle rectangle  $ATC$  qui a  $AC = m$  pour hypoténuse et l'angle  $\varphi$ ,  $R$  est donc le côté  $TC$  opposé à cet angle  $A$  (n° 363), ce qui prouve que la tangente au cercle est perpendiculaire au

rayon mené au point de contact. D'ailleurs les racines  $r'$  et  $r''$  étant égales, on a

$$r^2 = a^2 + \beta^2 - R^2 = m^2 - R^2 = (m+R)(m-R)$$

ou  $r^2 = AB \times AI = AM \times AN$  : la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure.

5°. La différence des racines de l'équ. (1) est la corde  $MN = k$

$$k = \pm 2 \sqrt{[R^2 - (a \sin \theta - \beta \cos \theta)^2]} = 2 \sqrt{[R^2 - m^2 \sin^2 (\theta - i)]}$$

donc  $m \sin \phi = \pm \sqrt{[R^2 - \frac{1}{4} k^2]}$ . Lorsqu'on veut mener par un point  $A$  une corde  $MN$  qui ait une longueur donnée, on porte cette corde sur un arc  $mn$  (fig. 228) pris où l'on voudra sur le cercle, et la perpendiculaire  $Co$  sera la valeur de  $m \sin \phi = Co$  ;  $\phi$  est l'angle opposé à  $Co$  dans le triangle rectangle dont l'hypoténuse est  $AC$ . Donc tracez la circonsl. qui a  $Co$  pour rayon, et du point  $A$ , menez des tangentes à ce cercle, qui détermineront le triangle  $CFA$  pour lequel l'angle  $A = \phi$  : ainsi les tangentes  $AM$  à ce cercle seront les deux solutions du problème, qui ne seront possibles qu'autant que le point  $A$  sera extérieur à ce cercle.

6°. Sans rien ôter à la généralité, on peut prendre pour axe des  $x$  la droite  $AB$  (fig. 226) qui joint le pôle au centre, on  $\beta = 0$  : or si le pôle est un point  $I$  sur la circonsl.,  $R = a$  et l'équ. (1) se réduit à  $r^2 - 2r R \cos \theta = 0$ , d'où  $r = 2R \cos \theta$  ; c'est la longueur  $k$  d'une corde inclinée de  $\theta$  sur le diamètre. Imaginons (fig. 56) un 2° cercle tangent au même point  $A$ , le rayon étant  $R'$  ; sa corde sera  $k' = 2R' \cos \theta$ , d'où  $k : k' :: R : R'$  : les cordes menées par le point de contact  $A$  de deux circonférences tangentes, intérieures ou extérieures, sont donc entre elles comme les rayons.



## IV. SECTIONS CONIQUES.

## De l'Ellipse.

386. On donne ce nom à une courbe  $ABO$  (fig. 219), telle que, pour chaque point  $M$ , les rayons vecteurs ou distances  $MF = z$ ,  $MF' = z'$  à deux points fixes donnés  $F$  et  $F'$ , qu'on appelle *Foyers*, ont une somme constante,  $z + z' = AO = 2a$ . Pour trouver l'équ. de l'ellipse, prenons le milieu  $C$  de  $FF'$  pour origine des coordonnées,  $AO$  pour axe des  $x$ , la perpend.  $BC$  pour axe des  $y$ ; on est assuré d'avance, par sa génération, que la courbe doit être symétrique, par rapport à ces axes, et que l'équ. sera fort simple. On doit, en général, préférer le système de coordonnées, qui est propre à faciliter les calculs et à donner des équ. moins composées.

Soient  $FC = c$ ,  $x$  et  $y$  les coordonnées de  $M$ ; on a dans les triangles  $FMP$ ,  $F'MP$ ,  $z^2 = y^2 + FP^2$ ,  $z'^2 = y^2 + F'P^2$ , ou

$$z^2 = y^2 + (x - c)^2, \quad z'^2 = y^2 + (x + c)^2, \quad z + z' = 2a.$$

En soustrayant les deux 1<sup>res</sup>, il vient

$$z'^2 - z^2 = (z' + z)(z' - z) = 2a(z' - z) = 4cx.$$

Ainsi,  $FM = z = a - \frac{cx}{a}$ ,  $F'M = z' = a + \frac{cx}{a} \dots (1).$

Substituant dans la valeur de  $z'$  ou  $z''$  ci-dessus, on trouve

$$a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} = y^2 + x^2 + c^2 \dots (2).$$

Faisant  $x = 0$ , il vient pour l'ordonnée  $BC$  à l'origine. . . .  $y^2 = a^2 - c^2$ ; si l'on représente cette ordonnée par  $b$ , on a donc  $b^2 = a^2 - c^2$ ; éliminant  $c^2$ , on trouve enfin pour l'équ. de l'ellipse,

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \dots (3).$$

387. En résolvant, on a  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ .

Puisque chaque abscisse  $x$  donne deux ordonnées  $y$  égales et de signes contraires, l'ellipse est telle que  $ABUD$  (fig. 230) symétrique par rapport à l'axe  $AO$ , elle l'est aussi relativement à  $BD$ , puisque  $+x$  et  $-x$  donnent la même valeur de  $y$ . Ainsi, lorsqu'on plie la figure selon  $AO$  ou  $BD$ , les parties de la courbe se superposent et coïncident.

$y$  est imaginaire quand  $x > \pm a$ ,  $x$  l'est pour  $y > \pm b$  ; donc la courbe est fermée  $BC=b$  est la plus grande ordonnée,  $CO=a$  la plus grande abscisse ;  $AO$  est ce qu'on nomme le grand axe ;  $BD$  est le petit axe ;  $A$  et  $O$  sont les sommets,  $O$  le centre. Ainsi, l'ellipse est une corde fermée, telle, que la somme des rayons vecteurs menés des deux foyers à un même point quelconque est constamment égale au grand axe ; cet axe est la longueur de la droite, qui passant par les foyers, traverse la courbe de part en part ; les extrémités de cette ligne sont les sommets, le milieu est le centre.

388. Comparons deux ordonnées  $y, y'$  d'une même ellipse, qui ont  $x, x'$  pour abscisses (fig. 230), les équ.  $a'y = b'(a-x)$ ,  $a'y' = b'(a-x')$  donnent le quotient

$$\frac{y}{y'} = \frac{a-x}{a-x'} = \frac{(a+x)(a-x)}{(a+x')(a-x')}$$

or,  $CP=x$ ,  $AP=a+x$ ,  $PO=a-x$  ; ainsi les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des distances du pied de ces ordonnées aux deux sommets

En changeant  $x$  en  $y$  et  $y$  en  $x$ , l'équ. (3) se change en  $b'y + a'x = a'b'$ , ainsi elle conserve la même forme, qu'on prenne  $AO$  ou  $BD$  pour axe des  $x$ .

389. Le cercle  $ANO$  décrit du centre  $C$  avec le rayon  $a$  (fig. 230), a pour équ.  $Y = \sqrt{a^2 - x^2}$ , où  $Y = PN$  ; comparant cette ordonnée à  $PM$  (n° 387), on a  $\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$ . Ainsi le rapport des ordonnées du cercle et de l'ellipse, qui répondent à une même abscisse, est constant et égal à celui des axes ;  $y$  est donc toujours  $\frac{b}{a} Y$  : le cercle renferme l'ellipse. Celui qu'on décrit avec le rayon  $BC$  y est au contraire renfermé.

Cette propriété fournit une construction fort simple de l'ellipse. Après avoir tracé les axes données  $AO$ ,  $BD$ , et les circonsc. inscrite et circonscrite (dont les rayons sont  $b$  et  $a$ ), on mène un rayon quelconque  $CN$ , et par les points  $Q$  et  $N$ , où cette droite coupe les circonsc., on trace les parallèles aux axes,  $QM$ ,  $NP$ , leur section  $M$  est un point de l'ellipse, car on a

$$\frac{PM}{PN} = \frac{CQ}{CN}, \text{ ou } \frac{PM}{Y} = \frac{b}{a}; \text{ d'où } PM = y.$$

390. La définition de l'ellipse donne un autre procédé pour décrire cette courbe (fig. 229). Après avoir tracé les deux axes  $AO$ ,  $BC$ , du point  $B$  comme centre, et avec le rayon  $CO$ , décrivez un arc de cercle qui coupera  $AO$  en  $F$  et  $F'$ ; ce seront les foyers, à cause de l'équ.  $b^2 = a^2 - c^2$  (n° 386). Du centre  $F$  et avec un rayon égal à une portion quelconque de  $AO$ , telle que  $KO$ , tracez un arc vers  $M$ ; puis du centre  $F'$ , avec le reste  $AK$  du grand axe, tracez un 2<sup>e</sup> arc, qui coupera le 1<sup>er</sup> en  $M$ ; ce sera un point de la courbe, car  $FM + F'M = AO$ : on aura de la sorte quatre points de l'ellipse avec les deux mêmes rayons, en décrivant des arcs des deux côtés des axes. Le même procédé fera connaître autant de points qu'on voudra de la courbe.

Lorsque l'ellipse a de grandes dimensions, on fixe aux foyers  $F$  et  $F'$  les deux bouts d'un fil long de  $AO$ , puis on fait glisser sur ce fil, toujours tendu, un stylet  $M$  qui trace la courbe.

391. A mesure que les deux foyers s'éloignent l'un de l'autre, ou que  $b$  diminue par rapport à  $a$ , l'ellipse s'allonge et s'aplatit davantage; au contraire, si les foyers se rapprochent, elle s'arrondit; enfin, si ces points se confondent, ou  $a = b$ , ou  $a \dots y^2 + x^2 = a^2$ , et la courbe devient circulaire. On peut donc regarder le cercle comme une ellipse dont les axes sont égaux.

Les équ. (1) montrent que les rayons vecteurs de l'ellipse sont rationnels par rapport aux abscisses  $x$ . La distance  $FC = z$  est ce qu'on nomme l'Excentricité;  $z$  et  $z'$  deviennent maximum ou minimum pour  $x = \pm a$ , savoir,  $z = a \pm c$ : ainsi, de tous

les points de l'ellipse,  $O$  est le plus voisin, et  $A$  le plus éloigné du foyer  $F$ . L'extrémité  $B$  du petit axe est à la moyenne distance de  $F$ , car  $x = 0$ , donne  $z = z' = a = BF$ .

On nomme *Paramètre* la double ordonnée qui passe par le foyer; on l'obtient en faisant  $x = c$ , ou  $x' = a' - b'$ , dans l'équ. (3); et on trouve  $y = \pm \frac{b'}{a}$ ;  $p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}$  est donc le paramètre: c'est une troisième proportionnelle au grand et au petit axe.

Pour transporter l'origine au sommet  $A$ , il faut changer  $x$  en  $x - a$  dans l'équ. (3), et l'on trouve  $a'y^2 = b^2(2ax - x^2)$ .

392. Rapportons l'ellipse à des coordonnées polaires (n° 385) le pôle étant à l'un des foyers  $F$ ; changeons  $x$  en  $x' + c$  dans la valeur (1) de  $FM$ , et ensuite  $x'$  en  $z \cos \theta$ ,  $\theta$  étant l'angle  $MFO$ ; il vient

$$z = \frac{a^2 - c^2}{a + c \cos \theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}.$$

On désigne par  $e$  le rapport de l'excentricité au demi-grand axe,  $c = ae$ ; le pôle est en  $F$ , et les arcs  $\theta$  sont comptés, à partir du sommet voisin  $O$ , dans le sens  $OMB$ . Si l'origine est à l'autre foyer  $F'$ , et les arcs  $\theta$  comptés dans le même sens, il faut changer ici  $e$  en  $-e$ .

### De l'Hyperbole.

393. Cette courbe jouit de la propriété que la différence des rayons vecteurs  $F'M - FM$  (fig. 231) est une quantité constante  $AO = 2a = z' - z$ . En plaçant l'origine au milieu  $C$  de  $FF'$ , etc..., et reproduisant le calcul du n° 386, on a de même  $z' - z = 2a(z' + z) = 4ax$ ; ainsi

$$FM = z = \frac{cx}{a} - a, \quad F'M = z' = \frac{cx}{a} + a \dots (4).$$

Substituant, etc..., puis faisant  $c^2 = a^2 + b^2$ , il vient

$$a'y^2 - b'x^2 = -a'b^2.$$

On trouvera, comme au n° 387, que l'hyperbole est symétrique, par rapport aux axes  $FF'$  et  $Cy$ ; car on a

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

Plus  $x$  croît tant positivement que négativement, et plus  $y$  augmente; mais on ne peut prendre  $x < \pm a$ ;  $y$  est nul pour  $x = \pm a$ : donc la courbe ne s'étend pas entre les deux sommets  $A$  et  $O$ , partant de ces points, elle forme deux branches opposées par leurs convexités et indéfiniment étendues, ouvertes l'une à droite, l'autre à gauche. Le point  $C$  est le centre,  $CO = 2a$  le premier axe; l'ordonnée à l'origine est imaginaire,  $y = 0$  donne  $y = \pm b\sqrt{-1}$ . Si l'on rend cette quantité réelle en changeant de signe sous le radical, la longueur  $b$  qu'on obtient, ou l'ordonnée centrale rendue réelle, est ce qu'on nomme le demi second axe, qui n'est plus, comme pour l'ellipse, une des dimensions de la courbe.

394. Les ordonnées  $y$  et  $y'$  (fig. 232), qui répondent aux abscisses  $x$  et  $x'$ , donnent, comme n° 388,

$$\frac{y^2}{y'^2} = \frac{x^2 - a^2}{x'^2 - a^2} = \frac{(x + a)(x - a)}{(x' + a)(x' - a)} = \frac{OP \cdot AP}{OP' \cdot AP'}.$$

On a encore les carrés des ordonnées proportionnels aux produits des distances de leurs pieds aux deux sommets.

Quand  $a = b$ , on a  $y^2 = x^2 - a^2$ : l'hyperbole est dite équilatère.

En changeant  $x$  en  $y$ , et  $y$  en  $x$ , l'éq. devient  $b^2 y^2 - a^2 x^2 = a^2 b^2$ . La forme est la même, au signe près du 2<sup>e</sup> membre; les  $x$  sont comptées sur  $BD$  et les  $y$  sur  $CP$ ; l'hyperbole est dite rapportée au centre et au 2<sup>e</sup> axe (comme fig. 257)

Changeant  $x$  en  $x + a$ , l'origine vient au sommet  $A$ , et l'équ. de l'hyperbole est  $a^2 y^2 = b^2 (2ax + x^2)$ .

395. Si l'on décrit une ellipse  $ABOD$  (fig. 232) sur les mêmes axes, elle sera comprise entre les deux sommets et allongée dans le sens des  $x$  ou des  $y$ , suivant que  $a$  sera  $>$  ou  $<$   $b$ ; ce sera un cercle si l'hyperbole est équilatère. Ces deux courbes ont



des propriétés analogues, dont on peut voir les détails dans la *Géométrie de position* de Carnot, p. 133.

396. La définition de l'hyperbole donne un procédé pour décrire cette courbe. Après avoir tracé les axes  $FF'$ ,  $Cy$  (fig. 231), et marqué les foyers  $F, F'$ , on décrira vers  $M$  un arc de cercle de centre  $F$ , avec un rayon quelconque  $AG$ , puis du centre  $F'$  avec le rayon  $OG$  on décrira un 2<sup>e</sup> arc, le point  $M$  de section sera sur la courbe, puisqu'on a  $F'M - FM = AO$ . On aura, avec les mêmes rayons, quatre points de l'hyperbole, puis autant de points qu'on voudra en changeant de rayons.

Les équ. (1) montrent que les rayons vecteurs de l'hyperbole sont rationnels par rapport aux abscisses.

Le paramètre, ou la double ordonnée passant par les foyers, conserve la même valeur que pour l'ellipse  $p = \frac{2b^2}{a}$ .

En raisonnant comme n° 392, on obtient pour l'équ. polaire de l'hyperbole, le pôle étant en  $F$  (fig. 231), et faisant l'angle  $AFM = \theta$  et  $c = ae$ ,

$$z = \frac{c^2 - a^2}{a + c \cos \theta} = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta}.$$

397. En comparant les équ. de l'ellipse et de l'hyperbole, on observe que l'une se change en l'autre, lorsqu'on y remplace  $b$  par  $b\sqrt{-1}$ . Cet artifice de calcul servira à traduire les formules obtenues pour l'une de ces courbes en celles qui conviennent à l'autre.

### De la Parabole.

398. Étant donnés un point fixe ou foyer  $F$  (fig. 234) et une droite quelconque  $QQ'$ , la parabole est une courbe dont chaque point  $M$  est à la même distance de  $F$  que de  $QQ'$ , qu'on nomme *directrice*. Prenons pour axe des  $x$ ,  $DF$  perpend. sur  $QQ'$ , pour origine le milieu  $A$  de  $FD = p$ , et pour axe des  $y$  la parallèle  $AB$  à  $QQ'$ ;  $A$  est visiblement un point de la courbe. On a  $AP = x$ ,  $PM = y$ ,  $QM = DP$ , ou  $z = p + x$ , dans le

triangle  $FMP$ ,  $FM^2 = z^2 = y^2 + (x - \frac{1}{2}p)^2$ ; donc en égalant les valeurs de  $z$ , etc., on a  $y^2 = 2px$ , pour l'équ. de la parabole, courbe qui est symétrique par rapport à l'axe des  $x$  seulement.

Il résulte de la génération de cette courbe, que l'ellipse dont le grand axe devient infini se change en une parabole.

Deux points  $(x, x')$ ,  $(y, y')$  d'une parabole donnent

$$y^2 = 2px, y'^2 = 2px', \frac{y'}{y^2} = \frac{x'}{x^2}.$$

Les carrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses correspondantes.

Si la constante  $2p$ , qu'on nomme *paramètre*, est inconnue, et qu'on ait un point de la courbe, on voit que  $2p$  est 3<sup>e</sup> proportionnelle à l'abscisse et à l'ordonnée de ce point.

Pour tracer la parabole dont on a le paramètre  $AB = 2p$  (fig. 233), comme  $y$  est moyenne proportionnelle entre  $AB$  et  $x$ , on décrira un cercle  $BCP$  qui passe en  $B$ , et dont le centre soit en un point quelconque de  $AO$ ;  $AC$  sera l' $y$  qui répond à l'abscisse  $AP$ : ainsi les parallèles  $CM$ ,  $PM$  aux axes coordonnées, détermineront un point  $M$  de la parabole. On en obtiendra de même autant d'autres qu'on voudra.

Si l'on fait  $x = \frac{1}{2}p = AF$  (fig. 234), on a  $y = \pm p$ ; ainsi le paramètre  $2p$  est encore, dans la parabole, la double ordonnée passant par le foyer.

399. La génération de la courbe donne un moyen simple pour la tracer. On a vu que  $z = \frac{1}{2}p + x$ ; ainsi le *rayon vecteur est encore rationnel*. Prenez sur l'axe  $Ax$  (fig. 234), à partir du sommet  $A$ , des distances  $AD = AF = \frac{1}{2}p$ ,  $F$  sera le foyer, la perpend.  $QQ'$  à  $Ax$  sera la directrice; et il s'agit de trouver tous les points  $M$  qui sont à égale distance de l'un et de l'autre. Menéz une ordonnée indéfinie quelconque  $MM'$ , puis du foyer  $F$  pour centre, avec  $PD$  pour rayon, tracez un arc qui coupera cette droite  $MM'$  en deux points  $M$  et  $M'$ : ces points sont sur la courbe.

Pour avoir l'éq. polaire de la parabole, prenons le foyer  $F$  pour pôle, et portons-y l'origine, en faisant  $r = r' + \frac{1}{2}p$  dans  $r = \frac{1}{2}p + x$ ; enfin, posons  $FP$ , ou  $r' = -z \cos \theta$ , l'angle  $\theta$  et  $\angle AFM$  compté du sommet, il vient  $z = \frac{p}{1 + \cos \theta}$ .

### Des Sections d'un cône droit par un plan.

400 On demande l'équ. de la courbe  $AMO$  (fig. 235), intersection d'un cône droit  $IDB$  par un plan quelconque  $OAI$ .

Si par l'axe  $BK$  on fait passer un plan  $BDI$  perpend. au plan coupant (il le sera à la base, n° 272), l'intersection de ces plans sera la droite  $AO$ , projection de l'axe du cône sur le plan coupant; c'est ce qu'on nomme l'axe de la section conique. Par un point quelconque  $P$  de cet axe, menons un plan parallèle à la base  $DI$ , ses intersections, avec le cône et le plan coupant, seront le cercle  $PMG$  et la droite  $PM$ , laquelle étant perpend. (n° 273) sur  $FG$  et  $AO$ , est une ordonnée commune aux deux courbes.

Cela posé, soient  $AP = x$ ,  $PM = y$ ; cherchons une relation entre  $x$ ,  $y$ , et les données du problème, qui sont l'angle  $BAO = \alpha$ , l'angle  $DBI = \beta$  et  $AB = c$ . La propriété du cercle donne  $y^2 = FP \times PG$ ; trouvons  $FP$  et  $PG$ .

Dans les triangles  $AFP$ ,  $POG$  et  $ABO$ , on a (C, n° 35)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin F} = \frac{FP}{x}, \quad \frac{\sin O}{\sin G} \text{ ou } \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin F} = \frac{PG}{PO} = \frac{PG}{AO - x}$$

$$\frac{\sin O}{AB} \text{ ou } \frac{\sin (\alpha + \beta)}{c} = \frac{\sin \beta}{AO}; \text{ d'où } AO = \frac{c \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

Or, dans le triangle  $BHF$ , l'angle  $F$  est complément de  $\frac{1}{2}\beta$ ; donc

$$FP = \frac{x \sin \alpha}{\cos \frac{1}{2}\beta}, \quad PG = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}\beta} \left( \frac{c \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} - x \right),$$

et l'on a, pour l'équation demandée,

$$y^2 = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2}\beta} [cx \sin \beta - x^2 \sin (\alpha + \beta)] \dots (A.)$$

Pour obtenir toutes les sections du cône, il suffit de faire prendre au plan coupant toutes les positions possibles, c'est-à-dire de faire tourner la droite  $AO$  autour du point  $A$  dans le plan  $BID$ , et de changer aussi  $AB = c$ . Il se présente trois cas.

1°. Lorsque  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , le plan coupant est parallèle à la génératrice  $BI$  (fig. 236); et la courbe s'étend à l'infini; en faisant  $\sin(\alpha + \beta) = 0$ , notre équ. devient (à cause de  $G$ , n° 357)

$$y^2 = \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta} \cdot cx = 4cx \sin^2 \frac{1}{2} \beta, \dots (B)$$

c'est celle d'une parabole (\*).

2°. Tant que  $\alpha + \beta < 180^\circ$ , le plan coupant rencontre toutes les génératrices d'une même côté du sommet, la courbe est fermée : ( $A$ ) en est l'équation.

3°. Enfin, lorsque  $\alpha + \beta > 180^\circ$ , le plan coupant rencontre les deux nappes de la surface de part et d'autre du sommet; la courbe a donc deux branches étendues à l'infini  $M'AN'$ ,  $LO'Q$  (fig. 235), dont la courbure est opposée. Or,  $\alpha + \beta > 180^\circ$  change le sinus du signe, et l'on a

$$y^2 = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta} [cx \sin \beta + x^2 \sin(\alpha + \beta)] \dots (C).$$

Dans ces deux derniers cas, si l'on représente par  $2a$  la distance  $AO$  entre les sommets, et par  $K$  un coefficient constant, on a

$$2a = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad K = \frac{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\cos^2 \frac{1}{2} \beta} \dots (D).$$

Les équ.  $A$  et  $C$  deviennent  $y^2 = K(2ax \mp x^2)$ , qui sont celles de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées au sommet (n°s 391 et 394).

(\*) On aurait pu refaire les raisonnemens précédens;  $FP$  (fig. 236) conserve la valeur ci-dessus, en y faisant  $\sin \alpha = \sin \beta$ ; donc  $FP = \frac{x \sin \beta}{\cos \frac{1}{2} \beta}$  de plus,  $AL$  parallèle à  $FG$  donne le triangle  $ABL$ , dans lequel on a

$$\frac{\sin \beta}{\sin BAL}, \text{ ou } \frac{\sin \beta}{\cos \frac{1}{2} \beta} = \frac{AL}{BL} = \frac{PG}{c}, \text{ etc}$$

L'équ. générale des sections coniques, l'origine étant au sommet, est donc  $y^2 = mx + nx^2$ . Elle appartient

1°. A la parabole, lorsque  $n=0$ , ( $m=2p$ );

2°. A l'ellipse, quand  $n = -\frac{b^2}{a^2}$ , et  $m = \frac{2b^2}{a}$ ,

3°. Enfin à l'hyperbole, lorsque  $n = \frac{b^2}{a^2}$ ,  $m = \frac{2b^2}{a}$ .

401. Il n'y a rien à changer à tout ce qui vient d'être dit, lorsqu'on fait varier  $\beta$  et  $c$ , c.-à-d. les dimensions du cône et la distance  $AB$ . On ne peut faire  $\beta = 0$ , ou  $\beta = 180^\circ$ ; car il n'y aurait plus de cône :  $c = 0$  suppose que le plan coupant passe par le sommet. L'intersection est alors un point lorsque  $\alpha + \beta < 180^\circ$ ; une droite quand  $\alpha + \beta = 180^\circ$  (le plan est tangent au cône); enfin deux droites quand  $\alpha + \beta > 180^\circ$ . Le calcul comprend aussi ces trois cas; car en faisant  $c = 0$  dans (A), puis  $\sin(\alpha + \beta)$  positif, nul et négatif, on trouve

$$y^2 + Kx^2 = 0, \quad y = 0, \quad y^2 = Kx^2.$$

La 1<sup>re</sup> équ. ne peut être satisfaite qu'autant (n° 112) que  $x = 0$ , et  $y = 0$ , ainsi elle représente un point; la seconde est celle d'une droite; la troisième, enfin, donne  $y = \pm x \sqrt{K}$  qui représente deux droites.

Donc, quels que soient le cône et la position du plan coupant, l'équ. (A) est celle des six sections coniques;  $c$  étant  $= 0$ , on a les trois sections qui passent par le sommet, et lorsque  $c$  n'est point nul, cette équ. représente une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que le coefficient de  $x^2$  est négatif, positif ou nul.

402. Étant donnée l'équ. d'une ellipse, d'une hyperbole, ou d'une parabole rapportée à son sommet, ainsi qu'un cône droit quelconque, il est facile de placer cette courbe sur le cône, c.-à-d. de trouver la situation du plan coupant qui la reproduirait; car, dans les deux derniers cas, on connaît  $a$ ,  $b$  et  $\beta$ , et il s'agit de trouver  $c$  et l'angle  $\alpha$ , en recourant aux équ. D. Or



la 1<sup>re</sup> fait connaître  $c$ , quand on a tiré  $\alpha$  de la 2<sup>me</sup> : celle-ci devient par les équ. I et G, p. 371,

$$\begin{aligned} 2K \cos^2 \frac{1}{2} \beta &= 2 \sin^2 \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \\ &= (1 - \cos 2\alpha) \cos \beta + \sin 2\alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Cette équ. de la forme  $b = n \sin 2\alpha + l \cos 2\alpha$ , a été résolue p. 391.

Et si l'équ. donnée est celle d'une parabole  $y^2 = 2px$ , l'équ. II donne  $p = 2c \sin^2 \frac{1}{2} \beta$ , d'où l'on tire  $c$ , et par suite la position du plan coupant (fig. 236).

### Méthode des Tangentes.

403. Si par deux points  $M$  et  $Q$  (fig. 237) d'une courbe quelconque  $BMQ$ , on mène une sécante  $SMQ$ , et qu'on fasse varier la position de  $Q$  sur la courbe,  $M$  restant fixe, la sécante prendra diverses inclinaisons. Si l'on rapproche  $Q$  de  $M$  jusqu'à faire coïncider ces deux points, la sécante  $SQ$  deviendra  $TM$  : cette droite se nomme *Tangente* ; c'est une sécante dont on a fait coïncider les points d'intersection.

L'équ. de toute droite qui passe en un point  $M(x', y')$  est

$$y - y' = A(x - x') \dots (1).$$

Pour déterminer la tangente  $TM$ , il suffit d'assigner à  $A = \tan T$  la valeur qui convient à l'inclinaison de cette droite ; il faut pour cela exprimer en analyse les conditions qui lui servent de définition.

Designons par  $x' + h$  et  $y' + k$  les coordonnées du 2<sup>e</sup> point  $Q$  d'intersection de la sécante  $SM$ , ou  $MR = h$ ,  $QR = k$  ; la tang. de l'angle  $QMR$  est  $\frac{k}{h} = \tan S$ . En changeant  $x'$  et  $y'$  en  $x' + h$ , et  $y' + k$  dans l'équ. de la courbe, et réduisant, il sera facile d'en tirer  $\frac{k}{h}$ , qui est la valeur de  $\tan S$ . Or,  $\tan T$  est visiblement la limite de  $\tan S$ , lorsqu'on fait varier le point  $Q$  pour l'approcher de  $M$ , en sorte que si l'on pose  $\tan T$  ou

$A = \tan S + a$ ,  $a$  pourra décroître indéfiniment. Si donc la valeur  $\frac{k}{h}$  de  $\tan S$  a la forme  $p + \beta$ ,  $p$  étant une quantité invariable, et  $\beta$  une expression en  $h$  et  $k$  susceptible de devenir, avec ces variables, aussi petite qu'on veut, l'équ.  $A = p + \beta + a$  se partagera (n° 113) en deux autres, dont l'une,  $A = p$ , déterminera  $A$ .  $A$  est donc ce que devient  $p + \beta$ , lorsque  $\beta$  est nul, c.-à-d. que  $A$  est ce que devient le rapport  $k : h$ , quand on y pose  $k$  et  $h$  nuls.

Concluons de là qu'il faudra substituer  $y' + k$  et  $x' + h$  pour  $x'$  et  $y'$  dans l'équ. de la courbe, et en tirer le rapport  $k : h$ , puis y faire  $k$  et  $h$  nuls; on obtiendra ainsi la limite de ce rapport, ou  $A$ , et par suite l'équ. (1) de la tangente (Voy. p. 440).

La droite indéfinie  $MN$ , perpend. à la tang. au point  $M$  de contact, est la *Normale*; l'équ. est facile à déduire de celle de la tang., puisque ces droites passent par le point  $M (x', y')$ , et de plus sont perpend. L'équ. de la normale est (n° 371)

$$y - y' = -\frac{1}{A}(x - x') \dots (2).$$

Les longueurs  $TP$ ,  $PN$ , comprises entre les pieds  $T$ ,  $P$  et  $N$  de la tangente, de l'ordonnée et de la normale, sont la *sous-tangente* et la *sous-normale*. En faisant  $y = 0$  dans nos équ., on obtient pour  $x$  les abscisses  $AT$  et  $AN$  des points  $T$  et  $N$ .

$$\text{sous-tang. } TP \text{ ou } x - x' = \frac{y'}{A} \dots (3).$$

$$\text{sous-norm. } PN \text{ ou } x - x' = Ay' \dots (4).$$

Il pourrait arriver que la tangente et la normale n'eussent pas la même disposition que dans notre figure, et que la sous-tangente fût  $x - x'$ , et la sous-normale  $x' - x$ ; mais alors le signe négatif qui affecterait les valeurs (3) et (4) indiquerait cette circonstance (n° 339).

Les longueurs  $MT$  et  $MN$  sont appelées aussi, l'une *Tangente*, l'autre *Normale*.

404. Appliquons ces théorèmes à la *parabole* (fig. 234), dont

l'équ. est  $y^2 = 2px$ ; on a  $y'^2 = 2px'$ ,  $(y' + k)^2 = 2p(x' + h)$ , qu'on réduit à

$$2ky' + k^2 = 2ph; \quad \text{d'où } \frac{k}{h} = \tan S = \frac{2p}{2y' + k}.$$

Faisant  $k$  nul, on a  $A = \tan T = \frac{p}{y'}$ .

1°. Équ. de la *tangente*.....  $yy' = p(x + x')$ .

2°. Équ. de la *normale*.....  $(y - y')p + (x - x')y' = 0$ .

3°. Longueur de la *sous-tang.*  $TP = 2x'$ .

4°. Longueur de la *sous-norm.*  $PN = p$ .

Donc la *sous-tangente* est double de l'abscisse, le sommet  $A$  est au milieu de  $TP$ , le pied  $T$  de la tang. est à gauche du sommet, et la *sous-normale* est constante et égale au demi-paramètre, double de la distance focale  $AF$ .

La norm.  $MN = \sqrt{PM^2 + PN^2} = \sqrt{y'^2 + p^2} = \sqrt{p(2x' + p)}$ .

405. Cherchons l'angle  $TMF = V$  (fig. 233) que fait le rayon vecteur avec la tangente : ce rayon passe par les points  $M(x', y')$  et  $F(\frac{1}{2}p, 0)$ ; on a donc  $y - y' = A'(x - x')$ ,

d'où 
$$A' = \frac{-y'}{\frac{1}{2}p - x'}.$$

D'après la valeur de  $A$  pour la tangente  $TM$ , on a

$$\tan V = \frac{A' - A}{1 + AA'} = \frac{\frac{-y'}{\frac{1}{2}p - x'} - \frac{p}{y'}}{1 + \frac{-y'}{\frac{1}{2}p - x'} \cdot \frac{p}{y'}} = \frac{p}{y'}.$$

à cause de  $y'^2 = 2px'$ , et en supprimant le facteur commun  $\frac{1}{2}p + x'$ . Ainsi  $\tan V = A = \tan T$ , le triangle  $TMF$  est isocèle. Tous les rayons lumineux et sonores  $SM$ , qui sont parallèles à l'axe, se réfléchissent à leur rencontre  $M$  avec la courbe, et vont au foyer  $F$ . De plus, la tangente  $TM$  coupe l'angle  $QMF$  par moitié, et est perpend. sur le milieu de  $QF$ : enfin,  $FM = FT$ ; ce qui offre un nouveau moyen de mener la tang.  $TM$ .

406. Faisons varier le point de contact  $M(x', y')$ , et plaçons-le successivement en tous les lieux de la courbe, puis

observons les diverses positions qu'affecte la tang, lesquelles dépendent de son équ., c.-à-d. de l'inclinaison  $\text{tang } T = \frac{p}{y'}$ , et de l'ordonnée à l'origine,  $At = \frac{px'}{y'} = \frac{1}{2}y'$ . Il est aisé de voir

que, 1°. au sommet  $A$ ,  $x'$  et  $y'$  étant nuls, l'axe des  $y$  est tangent; 2°. à mesure que le point de contact  $M$  s'éloigne,  $x'$  et  $y'$  croissent, ainsi que  $At$ , qui est constamment la demi-ordonnée  $y'$ , tandis que l'angle  $T$  diminue.

La tangente prend toutes les inclinaisons; ainsi il y a toujours une tangente parallèle à une droite donnée: mais, plus l'angle  $T$  est petit, plus le contact  $M$  et le pied  $T$  s'éloignent du sommet. La parallèle à l'axe répond à une distance infinie. Étant

donc donnée une direction, ou  $A$ , on tire aisément  $y' = \frac{p}{A}$ ,

et le point de contact. Par exemple, si  $A$  est 1, on a  $y' = p$ ; d'où  $x' = \frac{1}{2}p$ ; le foyer  $F$  répond au point  $G$  pour lequel la tang. est inclinée de  $45^\circ$  sur l'axe, dans toute parabole.

407. L'équ.  $yy' = p(x + x')$  peut servir à mener une tang., sans connaître le point  $M$  de contact  $(x', y')$ , pourvu qu'on donne certaines conditions. Si l'on veut, par ex., qu'elle passe par un point donné  $I(a, \beta)$ , notre équ. devient  $\beta y' = p(a + x')$ ; éliminant avec  $y'^2 = 2px'$ , on aura deux valeurs de  $x'$  et  $y'$ , deux points  $M$  de contact, et deux tangentes.

Mais l'équ.  $\beta y = p(a + x)$  étant satisfaite par les coordonnées des deux points de contact, est l'équ. de la corde qui les joint.  $y=0$  donne l'abscisse  $x = -a$  du point de section avec l'axe, point commun à toutes les cordes semblables, quel que soit  $I$ , pourvu que son abscisse  $a$  demeure la même. Ainsi le point  $I$  décrivant une parallèle aux  $y$ , les deux tangentes, les points de contact, les cordes qui les unissent, varient; le point seul de section de ces cordes avec l'axe reste le même, et la corde tourne autour de ce point, qui est tantôt à droite, tantôt à gauche du sommet, selon que l'abscisse de  $I$  est à gauche ou à droite du sommet  $A$ .

$IM$  étant la tangente cherchée, qui doit être perpend. sur le milieu de  $QF$ ,  $I$  est à la même distance de  $F$  et de  $Q$ ; le cercle décrit du centre  $I$  avec le rayon  $IF$  passe par le point  $Q$  de la directrice, lequel devient ainsi connu.  $QM$  parallèle aux  $x$  donne ensuite  $M$ , ou bien on mène  $IM$  perpend. sur  $QF$ , et la tangente est tracée. Il ne faut pas craindre que le cercle ne coupe pas la directrice dès que  $I$  est extérieur à la courbe; car le problème est alors posable, et le point  $Q$  doit exister: on a un 1<sup>o</sup> point  $Q$  et une 2<sup>e</sup> tangente.

408. Appliquons les mêmes principes à l'*Ellipse*. Changeons  $x$  et  $y$  en  $x' + h$ , et  $y' + k$  dans l'équ. de cette courbe; il vient

$$a'y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2, \quad a^2(y' + k)^2 + b^2(x' + h)^2 = a^2b^2;$$

$$\text{d'où} \quad k(2y' + k)a^2 + h(2x' + h)b^2 = 0, \quad \frac{k}{h} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{2x' + h}{2y' + k}.$$

C'est la valeur de  $\tan S$ , lorsqu'on veut l'équ. de la sécante en deux points donnés. Pour la tang., on fera  $h$  et  $k$  nuls, et on trouve  $A = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$ . Il ne reste qu'à substituer dans les équations du n<sup>o</sup> 403, on a (fig. 238)

$$1^{\circ}. \text{Équ. de la tangente, } a'yy' + b^2xx' = a^2b^2;$$

$$2^{\circ}. \text{Équ. de la normale, } y - y' = \frac{a'y'}{b^2x'} (x - x');$$

$$3^{\circ}. \text{Pour la sous-tangente, } TP = \frac{a^2 - x'^2}{x'};$$

$$4^{\circ}. \text{Pour la sous-normale, } PN = \frac{b^2x'}{a^2}.$$

1<sup>o</sup>. La valeur de  $A$  ne change pas, lorsque  $x'$  et  $y'$  prennent des signes contraires; ainsi les tangentes en  $M$  et  $M'$  sont parallèles (fig. 239).

2<sup>o</sup>. En faisant  $y = 0$  dans l'équation de la tangente, on a  $CT = x = \frac{a^2}{x'}$ ;  $a > x'$  donne  $CT > a$ :  $CT$  est indépendant de



$b$  ; ainsi toutes les ellipses décrites avec le même axe  $AO$ , ont un même pied  $T$  pour la tang  $TM$ ,  $TQ$  ... l'abscisse  $x' = CN$  demeurant la même. Ainsi, décrivons un cercle  $AQO$  sur le diamètre  $AO$ , prolongeons l'ordonnée  $PM$  en  $Q$ , menons la tang  $TQ$ , et nous aurons le point  $T$ . C'est un moyen facile de tracer la tangente à l'ellipse.

3°.  $y = 0$  dans l'équ. de la norm. donne  $x = CN = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x'$

(fig. 238) ; ainsi  $N$  et  $M$  sont situés du même côté de  $Cy$

409. Par les points  $O$  et  $A (\pm a, 0)$  menez les droites quelconques  $ON$ ,  $AN$  (fig. 239) ; leurs équ. sont

$$y = \alpha (x - a), \quad y = \alpha' (x + a)$$

Le point  $N$  de rencontre a pour coordonnées ,

$$x = a \cdot \frac{\alpha + \alpha'}{\alpha - \alpha'}, \quad y = \frac{2a\alpha\alpha'}{\alpha - \alpha'}.$$

Ce point  $N$  n'est déterminé qu'autant qu'on fixe les tang.  $\alpha, \alpha'$  des directions de  $AN$  et  $ON$ , mais si elles sont arbitraires, on peut en disposer de manière que l'intersection  $N$  soit sur l'ellipse ; on dit alors que ces lignes sont des *cordes supplémentaires*. Dans ce cas, nos valeurs de  $x$  et  $y$  doivent satisfaire à l'équ.  $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ , ce qui donne  $a^2\alpha\alpha' + b^2\alpha\alpha' = 0$ , ou  $\alpha\alpha' (a^2\alpha\alpha' + b^2) = 0$ . On exprime donc que les cordes se coupent sur l'ellipse, en faisant  $\alpha$  ou  $\alpha'$  nul (ce qui n'apprend rien), ou  $\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$ . Ce signe — provient de ce que  $\alpha$  et  $\alpha'$

sont de signes contraires ; car, si  $NAO$  est aigu,  $NOx$  doit être obtus. Traçons un cercle sur le grand axe ; l'angle  $AN'O$  étant droit,  $ANO$  est obtus. Les cordes supplémentaires du petit axe forment entre elles un angle aigu ; ce qu'on démontre de même.

On prouve ces propriétés par l'analyse, ainsi qu'il suit. L'angle  $\theta = N$  des deux cordes supplémentaires est donné par

$$\tan \theta = \frac{\alpha - \alpha'}{1 + \alpha\alpha'} = \frac{a^2\alpha\alpha' + b^2}{a(a^2 - b^2)},$$

éliminant  $a'$ . Si  $a=b$ ,  $\tan \theta$  est  $\infty$ , ou  $\theta = 90^\circ$ ; le cercle a des cordes supplémentaires rectangulaires, et toutes le sont. Quand  $a > b$ ,  $a$  et  $\tan \theta$  ont même signe : donc les angles  $NO$ ,  $NOx$  sont obtus ensemble. Si  $a$  et  $b$  croissent proportionnellement, l'angle  $\theta$  ne varie pas : ainsi, les directions  $ON$ ,  $AN$  sont constantes, ou les ellipses dont les axes sont dans le même rapport ont les cordes supplémentaires parallèles.

Si  $\theta$  est donné,  $a$  résulte de l'équ. du 2<sup>e</sup> degré.

$$a^2 a' - (a^2 - b^2) a \tan \theta + b^2 = 0.$$

Il y a donc deux systèmes de cordes supplémentaires qui forment entre elles un angle donné  $\theta$ , et ces cordes sont aisées à construire : les deux valeurs de  $a$  ont même signe, à cause du dernier terme  $+ b^2$ . Les grandeurs de  $\theta$  sont égales, quand  $a = (a^2 - b^2) \tan^2 \theta = 4a'b'$ ; d'où  $\tan \theta = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$ ; puis  $a = \frac{b}{\tan \theta}$ . Cette solution sépare les racines réelles des imaginaires (n<sup>o</sup> 139, 2<sup>o</sup>.); ainsi les cordes supplémentaires qui concourent à l'extrémité  $B$  du petit axe se coupent sous le plus grand angle obtus. Si  $AN$  est couché sur  $AO$ , l'autre corde est à angle droit;  $AN$  tournant autour de  $A$ , l'angle  $N$  devient obtus, et s'accroît jusqu'à ce que les cordes passent en  $H$ . Passé ce terme,  $AN$  continuant de tourner, l'angle  $N$  diminue et reprend les mêmes grandeurs.

Pour obtenir graphiquement les cordes supplémentaires qui font un angle donné, il faut tracer sur  $AO$  un segment de cercle capable de cet angle, l'ellipse est coupée en deux points qui donnent les solutions cherchées.

410. Toute ligne  $CM$  menée par le centre  $C$  (fig. 239), a pour équ.  $y = Ax$ , si de plus on veut qu'elle passe par le point  $M(x', y')$ , il faut que  $y' = Ax'$ ; pour la tangente en  $M$ ,  $A = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$ , d'où  $AA' = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{b^2}{a^2}$ . Si donc on

mène une corde  $AN$ , parallèle à la ligne  $CM$ , qui va du centre au point de tangence, on a  $A' = a'$ , d'où  $A = a$ , et la tangente  $TM$  est parallèle à la corde supplémentaire  $NO$ , ce qui fournit encore un moyen très simple de mener une tangente à l'ellipse.

411. Faisons décrire la courbe au point de contact  $M(x', y')$  et suivons la tang. dans toutes les positions qu'elle affecte. En  $O$ ,  $x' = a$ ,  $y' = 0$ ; l'équ. de  $TM$  devient  $x = a$ , ainsi la tang. est parall. aux  $y$ . A mesure que le point de contact s'élève sur la courbe,  $x'$  décroît et  $y'$  croît; donc  $A = a - \frac{b \cdot x'}{a \cdot y'}$

décroît, et  $CT = \frac{a^2}{x'}$  croît; ainsi le point  $T$  s'éloigne sans cesse

et l'angle  $MTC$  diminue, jusqu'à ce qu'en  $B$  la tangente devienne parallèle au grand axe. La symétrie de la courbe dispense de poursuivre plus loin cet examen: donc, *il n'y a point d'inclinaison donnée qui ne puisse convenir à l'une des tangentes de l'ellipse.*

On obtient le point de l'ellipse où une droite doit la toucher, son inclinaison étant donnée, en cherchant  $x'$  et  $y'$ , lorsque  $A$  est connu; on a pour cela les équ.

$$a'y'^2 + b^2x'^2 = a'b^2, \quad Aa'y' + b^2x' = 0.$$

On peut également résoudre un grand nombre de problèmes relatifs à la tangente, et qu'on traiterait par une analyse semblable.

Cherchons les segmens  $OH$ ,  $AK$  (fig. 238) formés par une tangente quelconque  $KH$  sur les tangentes menées aux sommets. On a  $a'y'y' + b^2xx' = a'b^2$ ; faisant  $x = \pm a$ , les  $y$  sont nos deux segmens, savoir,

$$OH = b^2 \cdot \frac{a - x'}{ay'}, \quad AK = b^2 \cdot \frac{a + x'}{ay'}.$$

Le produit de ces deux quantités se réduit à  $b^4$ ; donc le produit des segmens  $OH$ ,  $AK$ , formés par une tangente quelconque  $KH$ , est constamment égal au carré du demi-petit-axe,

quelle que soit la direction de cette tangente  $KH$ . Nous verrons (p. 434) que les lignes  $AK$  et  $OH$  peuvent être deux tangentes parallèles quelconques, pourvu qu'au lieu de  $b^2$  on prenne le carré de la longueur  $Cy$ , qui leur est parallèle.

412. Cherchons l'inclinaison des rayons vecteurs sur la tang. (fig. 238). Soient  $CF = a$ , les angles  $FMT = V$ ,  $F'MT = V'$ . Toute droite qui passe en  $F'(a, 0)$ , a pour équ.  $y = A'(x - a)$ ;

d'où  $A' = \frac{y'}{x' - a}$ , pour le rayon vecteur  $FM$ , qui passe par le point donné  $M(x', y')$ , mais pour l'inclinaison de la tangente,

$$A = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}; a' = a - b^2 \text{ donne } \tan V = \frac{A - A'}{1 + AA'} = \frac{b^2}{a y'}.$$

En changeant  $a$  en  $-a$ , on a pour  $\tan V'$  une valeur égale avec un signe contraire, ou en conclut que les angles  $V$  et  $V'$  sont supplémentaires l'un de l'autre (n° 349). L'angle  $FMT$  est aigu et supplément de l'angle obtus  $F'MT$ , ou plutôt les angles aigus  $F'MI$  et  $FMT$ , sont égaux.

Ainsi, les rayons vecteurs de l'ellipse, menés au point de contact, sont également inclinés sur la tangente et sur la normale. Donc, tous les rayons lumineux ou sonores  $F'M$ , qui partent du foyer  $F'$ , doivent, à leur rencontre en  $M$  avec l'ellipse, se réfléchir à l'autre foyer  $F$ . En prolongeant  $F'M$ , la tang.  $TM$  divise en deux parties égales l'angle  $FMG$ , et la normale l'angle  $F'MF$ .

413. On peut se servir de cette propriété pour mener une tang. ou une normale en un point donné  $M$  de l'ellipse (fig. 238); car, prenant sur le prolongement de  $F'M$ ,  $MG = FM$ ,  $TM$  sera perpend. sur le milieu de  $FG$ .

Pour mener la tangente  $TM$  par un point extérieur donné  $I$ , cherchons le point  $M$  de contact. Supposons le problème résolu, alors  $I$  étant à égale distance de  $F$  et de  $G$ , le cercle  $FG$ , qui passe en  $F$ , et dont  $I$  est le centre, passe aussi en  $G$ ; mais  $F'G = F'M + MF = AO$ , donc le point  $G$  est aussi sur le cercle décrit du centre  $F'$  avec le rayon  $AO$ .

Une fois ces deux cercles tracés, le point  $G$  est connu; on

La tangente  $TM$  (fig. 231) fait avec l'axe des  $x$  un angle aigu : elle est parallèle à celle qu'on menerait au point  $M'$ .

On aura de même l'équ. de la normale.

2°  $CT = \frac{a^2}{x'}$ , les points  $M$  et  $T$  tombent du même côté de l'axe  $Cy$ ; comme  $x'$  est  $> a$ ,  $T$  est compris entre  $C$  et le sommet  $A$ .

$$\text{Sous-tang} = \frac{x'^2 - a^2}{x'},$$

$$\text{Sous-normale} = \frac{b^2 x'}{a^2}.$$

3°. Pour les deux cordes supplémentaires  $ON$  et  $AN$  (fig. 240), on a  $ax' = \frac{b^2}{a^2}$ ; les deux angles formés avec l'axe des  $x$  sont ensemble aigus ou obtus. L'équ. de  $AN$  est  $y = a(x - a)$ ; passant par le point  $N(x', y')$ ; on a pour la corde  $AN$ ,  $a = \frac{y'}{x' - a}$ ; donc  $a$  et  $y'$  sont de même signe, puisque  $x' > a$ . Ainsi les angles des cordes supplémentaires avec l'axe des  $x$  sont aigus quand  $N$  est placé comme dans la figure. Ils sont obtus pour la branche supérieure à gauche, etc. Pour la ligne  $CM$  et la tang  $TM$  en  $M$ , on a  $AA' = \frac{b^2}{a^2}$ ; on conclut donc que le procédé (n° 410) pour mener une tangente à l'ellipse, est applicable ici. On mène au point  $M$  de contact la ligne  $CM$ , puis la corde  $ON$  parallèle à  $CM$ , et sa corde supplémentaire  $NA$ ; celle-ci est parallèle à la tangente  $TM$ .

On trouve, comme (n° 409) pour l'angle  $\theta = ONA$  des cordes suppl.,  $\text{tang } \theta = \frac{a'^2 a^2 - b^2}{a(a'^2 + b^2)}$ ; or (n° 415)  $a > \frac{b}{a}$ , ou  $a'^2 a^2 > b^2$ ; ainsi  $\text{tang } \theta$  est positif et l'angle  $\theta$  est aigu. Si les axes varient dans le même rapport,  $\theta$  demeure constant.

Quand  $\theta$  est connu et qu'on cherche  $a$ , il faut résoudre l'équ. du 2° degré  $a'^2 a^2 - a(a'^2 + b^2) \text{ tang } \theta = b^2$ , dont les racines ne sont jamais imaginaires et ont des signes différents. L'angle  $\theta$



Or, plus  $x'$  croît et plus  $A$  et  $CT$  décroissent; en sorte que, d'une part, le pied  $T$  de la tangente approche sans cesse du centre  $C$  sans y atteindre, et de l'autre, l'angle  $T$  diminue en même temps. Mais cette diminution de  $T$  n'a pas lieu indéfiniment; car le radical approche de plus en plus de  $un$  et ne peut dépasser ce terme, qu'il n'atteint même qu'à  $x' = \infty$ ; alors  $A = \pm \frac{b}{a}$  et  $CT = 0$ . Du reste, il est inutile de continuer le mouvement du point  $M$  sur les autres parties de la courbe, à cause de la symétrie.

Pour construire ces expressions, portons au sommet  $A$  les ordonnées  $AD = AD' = b$ , traçons  $CD$  et  $CD'$ ; ces droites ont pour équ.  $y = \pm \frac{b}{a}x$ ; elles sont les limites de toutes les tangentes, et ne rencontrent la courbe qu'à l'infini: cette courbe est entièrement renfermée dans l'angle  $QCQ'$  et son opposé.

La tangente fait avec le 1<sup>er</sup> axe un angle compris entre  $DCA$  et un droit; on ne peut donc mener une tangente parallèle à une droite donnée  $CI$ , passant en  $C$ , qu'autant que  $CI$  est dans l'angle  $QCH$ .

416. Quand deux courbes s'étendent à l'infini, on dit que l'une est ASYMPTOTE de l'autre, si elle s'en approche de plus en plus, et si l'on peut s'éloigner assez pour que leur distance soit moindre que toute quantité donnée. L'équ. de l'hyperbole est

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \pm \frac{b}{a} x \left( 1 - \frac{a^2}{2x^2} - \frac{a^4}{8x^4} \dots \right),$$

en développant  $\sqrt{x^2 - a^2}$  (p. 199): le 1<sup>er</sup> terme excepté,  $x$  n'entre qu'au dénominateur; ainsi tous ces termes décroissent indéfiniment quand  $x$  augmente. L'équ.  $Y = \pm \frac{b}{a}x$  appartient donc à deux droites  $CQ, CQ'$  (fig. 241), dont l'ordonnée  $PQ > PM$  donne la différence  $MQ$  aussi petite qu'on veut. Ces droites, que nous savons être les limites des tangentes, sont donc aussi les asymptotes de l'hyperbole.

Toute droite  $MM'$  qui passe par le centre  $C$ , et est dans l'angle asymptotique, coupe la courbe en deux points opposés  $M$  et  $M'$ , dont les abscisses sont égales en signes contraires; il en est de même des ordonnées, et de  $CM$  et  $CM'$ .

Dans le 3<sup>e</sup> cas, la droite ne coupe pas la courbe. Si  $l=0$ , on a  $ak > b$ , la droite passe par le centre et est dans l'angle  $QCH$  (fig. 241), elle est parallèle à deux tangentes; tandis qu'au contraire toute ligne qui est dans l'angle  $QCQ'$  coupe la courbe et n'a aucune tangente parallèle.

418. Rapportons l'hyperbole aux asymptotes  $Cb'$ ,  $Cb$  (fig. 241) pour axes des  $x'$  et  $y'$ ; menons  $MP$  parallèle à  $Cb$ ;  $CP=x'$ ,  $PM=y'$ . L'angle  $xCb=a$  a pour tangente  $\frac{b}{a}$  (n° 415); d'où (n° 346), en faisant pour abréger,

$$2m=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\cos a = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{2m}, \quad \sin a = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{2m} :$$

les formules générales (B, n° 383) deviennent

$$2mx=a(y'+x'), \quad 2my=b(y'-x').$$

Au sommet  $A$ , où  $y=0$ , on a  $x'=y'$ ,  $CD=DA$ ;  $CBAD$  est donc un losange, ce qui suit aussi de ce que l'ang.  $DAC=DCA$ . Substituons ces valeurs d' $x$  et  $y$  dans  $a'y'-b^2x^2=-a^2b^2$ ; il vient  $x'y'=m^2$  pour l'équ. demandée. En faisant  $x'=y'$ , on a  $CD=m=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ . Si l'on compte les  $x$  et  $y$  positifs, selon  $Cb$  et  $CH'$ , l'équ. est  $xy=-m^2$ .

On nomme  $m^2$  la puissance de l'hyperbole; si la courbe est équilatère,  $CBAD$  est un carré  $=m^2=\frac{1}{2}a^2$ .

De  $xy=-m^2$  on tire que  $y$  décroît quand  $x$  augmente, et réciproquement, ce qui prouve que les axes sont en effet des asymptotes.

Nous avons trouvé que  $a=2m \cos a$ ,  $b=2m \sin a$ ; ce sont les axes de l'hyperbole qui sont ainsi connus, lorsqu'elle est rapportée à ses asymptotes. Les diagonales  $CA$ ,  $DB$ , du losange

$CDAB$ , résolvent d'ailleurs le problème; car  $2m \sin \alpha = b$ ,  $DL = CD \sin \alpha = m \sin \alpha$ , donnent  $BD = b$ .

419 Multiplions l'équ.  $xy = m^2$  par  $\sin 2\alpha$ ; il vient

$$xy \sin 2\alpha = 2m^2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

le 1<sup>er</sup> membre (p. 387, V) exprime l'aire du parallélogramme  $CPMQ$ , qui est par conséquent constante, quelque part qu'on prenne le point  $M$  sur la courbe; d'ailleurs le 2<sup>e</sup> membre  $= ab$ ; ainsi, l'aire  $CPMQ$  est la moitié du rectangle des demi-axes; ce qui suit aussi de ce que  $CA = a$ ,  $BD = b$  et  $CBAD = CQMP$ .

420. Une semblable transformation pourrait donner l'équ. de la tang.  $TM$  au point  $M(x', y')$ , rapportée aux asymptotes; mais on la trouve directement par ce calcul. Cette équ. est (n° 367),

$$y - y' = A(x - x'),$$

$A$  étant  $\frac{\sin STH'}{\sin TSC}$ ; changeons, comme n° 403,  $x'$  et  $y'$  en  $x' + h$  et  $y' + k$ , dans l'équ.  $x'y' = m^2$ ,

$$(x' + h)(y' + k) = m^2; \text{ d'où } \frac{k}{h} = -\frac{y'}{x'}.$$

Telle est la valeur de  $A$  pour la sécante  $MN$ , la limite se rapporte à la tangente; d'où  $A = -\frac{y'}{x'}$ ; donc enfin, l'équ. cherchée est

$$x'y + y'x = 2m^2.$$

Faisant  $y = 0$ , on trouve  $x = \frac{2m^2}{y'} = 2x'$ , abscisse  $CT$  du pied  $T$  de la tangente, et qui est double de  $CP$ ; prenant donc  $TP = CP$ , menant  $TM$ , on a la tangente. Comme triangle  $SMQ = MTP$ , le point  $M$  de contact est au milieu de  $ST$ .

Puisque  $CT = 2x'$  et  $CS = 2y'$ , l'aire  $CST = 2x'y'$  ou  $2m^2$  (p. 387), ou  $= ab$ , l'aire  $CST$  est donc constante quel que soit

le point  $M$  ; elle égale le rectangle des demi-axes ; les quatre triangles  $TMP$ ,  $CMP$ ,  $CMQ$ ,  $SMQ$ , sont équivalens.

421. L'équ. d'une sécante  $bb'$  est  $y = Kx + L$  ;  $y = 0$  donne le point  $b'$  de section par l'asymptote,  $Cb' = -L : K$ . Éliminant  $x$  et  $y$  avec  $xy = m^2$ , on a les points  $N, N'$  de section avec la courbe ; d'où  $Kx^2 + Lx = m^2$ . Or, (n° 137, 3°.)  $-L : K$  est la somme des racines  $= Ca' + aN = Cb'$ , ou  $= Ca' + a'b'$  ; donc  $aN = a'b'$ , et les triangles  $Nab$ ,  $N'a'b'$  sont égaux ; d'où  $bN = b'N'$ . Toute sécante a des portions égales comprises entre l'hyperbole et l'asymptote.

On tire de là un procédé facile pour décrire la courbe, lorsqu'on a un de ses points  $N$  et ses asymptotes. Par ce point menez une droite quelconque  $bb'$ , prenez  $b'N' = bN$ ,  $N'$  sera un 2° point de la courbe. En répétant cette construction, on obtient autant de points qu'on veut.

Les abscisses  $aN$ ,  $Ca'$ , de  $N$  et  $N'$ , étant  $x'$ ,  $x''$ , en résolvant les triangles  $abN$ ,  $b'N'O$ , on trouve

$$Nb = x' \cdot \frac{\sin a}{\sin b}, \quad N'b = Nb' = x'' \cdot \frac{\sin a}{\sin b} ;$$

multipliant ces équ. il vient

$$bN \times Nb' = x'x'' \cdot \frac{\sin^2 a}{\sin^2 b} = -\frac{m^2}{K} \cdot \frac{\sin^2 a}{\sin^2 b},$$

à cause du dernier terme de l'équ.  $Kx^2 + Lx = m^2$ . Or, ce produit est indépendant de  $L$ , et toute parallèle à notre sécante l'eût pareillement donné. Donc, deux sécantes ont même valeur pour le produit  $bN \times b'N'$ , que le carré de la demi-tangente  $SM$ , lorsque ces trois droites sont parallèles.

422. Le procédé du n° 403, pour trouver  $A$  dans l'équ. (1), s'applique à toute équ., quel que soit l'angle des coordonnées ; en suivant attentivement ce qu'on y prescrit : on voit qu'il faut changer  $x$  en  $x' + h$ , et  $y$  en  $y' + k$ , dans la proposée, ce qui donne deux sortes de termes ; 1°. ceux qui n'ont ni  $h$ , ni  $k$ , et qui, restant quand ces accroissemens sont nuls, recomposent

l'équ. de la courbe, et s'entre-détruisent; 2°. des termes dont  $h$  ou  $k$  sont facteurs, qui sont destinés à donner leur rapport  $k:h$ , auquel on substitue  $A$ , en y faisant  $h$  et  $k$  nuls.

Mais il est clair que les termes qui disparaissent de ce rapport sont ceux où  $h$  et  $k$  entraînent à une dimension supérieure à la 1<sup>re</sup>. Donc, si, supprimant les raisonnemens, on s'en tient au matériel du calcul, on voit qu'il faut 1°. changer  $x$  en  $x+h$ ,  $y$  en  $y+k$ , et développer, en ne conservant que les termes de 1<sup>re</sup> dimension en  $h$  et en  $k$ ; 2°. faire  $k=Ah$  et diviser tout par le facteur commun  $h$ ; 4°. enfin tirer la valeur de  $A$ . Quand nous serons plus avancés (V. n° 504), nous reconnaitrons que  $A$  est égal à moins la dérivée de l'équ. proposée par rapport à  $x$ , divisée par la dérivée par rapport à  $y$ . Substituant dans les équ. du n° 403, on a celles de la tangente et de la normale

Ainsi, pour  $y^2+2xy=2y+x$ , on trouve d'abord

$$2yk+2xk+2yh=2k+h,$$

puis

$$2yA+2xA+2y=2A+1;$$

d'où

$$A = \frac{-y+1}{y+x-1}.$$

Par ex., le point (1, 1) est sur la courbe, puisque ces coordonnées, mises pour  $x$  et  $y$ , satisfont à la proposée; on trouve  $A=-\frac{1}{2}$ , et l'équ. de la tang., en ce point de la courbe, est

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1), \text{ ou } 2y+x=3.$$

Prenons encore l'équ.  $y^2=mx+nx^2$ , qui appartient à nos trois courbes, suivant les valeurs qu'ont  $m$  et  $n$  (n° 400); on trouve

$$2yk=mh+2nhx, \quad 2Ay=m+2nx,$$

d'où

$$A = \frac{m+nx}{y}$$

423. Quand la tangente est parallèle aux  $x$ , il est clair que dès que la branche de courbe est entièrement au-dessous ou au-dessus de la tangente, l' $y$  du point de contact est  $>$  ou  $<$  que les  $y$  voisines. Ainsi l'équ.  $A=0$  doit donner l' $x$  qui



est un *maximum* ou un *minimum* ; et on la trouve en éliminant  $x$  et  $y$  entre  $A=0$  et la proposée.  $A=\infty$  donne les tangentes parallèles aux  $y$ , c.-à-d. les limites de la courbe dans le sens des  $x$ .

Soit, par ex., l'équ.  $y^2 - xy + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$ , pour laquelle on trouve  $A = \frac{y-x+1}{2y-x}$ ; posant  $y-x+1=0$ , et éliminant avec la proposée, on obtient  $x=3$  et  $1$ , et  $y=2$  et  $0$ , coordonnées des points où la tangente est parallèle aux  $x$ ;  $2$  est la plus grande ordonnée,  $0$  la plus petite; la courbe ne passe pas au-dessous de l'axe des  $x$ , qu'elle touche au point  $(1, 0)$ .  $2y-x=0$  donne  $x=2 \pm \sqrt{2}$ ,  $y=1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ , coordonnées des limites latérales (n° 454, fig. 261).

424. Étant données l'équ. d'une courbe du 2<sup>e</sup> degré, et celle  $y=ax+\beta$  d'une droite, pour trouver les points de section, il faut éliminer  $y$ , ce qui conduira à une équ. du 2<sup>e</sup> degré en  $x$ , de la forme  $ax^2+bx+c=0$ . Les abscisses des deux points d'intersection sont  $x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ , et suivant que ces

racines sont réelles ou imaginaires, la droite coupe ou ne coupe pas la courbe. Si  $b^2-4ac=0$ , les racines sont égales, et la droite est tangente; car si  $\alpha$  et  $\beta$  étaient arbitraires, en les faisant varier, la droite changerait de position, et les deux points d'intersection seraient d'autant plus rapprochés que  $b^2-4ac$  serait plus petit; ces points coïncident quand  $b^2-4ac=0$ , équ. qui exprime une relation entre  $\alpha$  et  $\beta$  quand la droite est tangente. L'une de ces constantes reste arbitraire, et on peut la déterminer par diverses conditions, ce qui donne lieu à un grand nombre de problèmes. L'abscisse du point de

contact est  $x = -\frac{b}{2a}$ . Quand cela arrive,  $\alpha$  et  $\beta$  étant donnés, on trouve que l'équ. en  $x$  est un carré exact; on reconnaît donc que la droite est tangente, et on a le point de contact. Ex :

$$3y=4x+2, \quad y^2-2xy+2x^2+4x-5y+4=0.$$

L'élimination de  $y$  donne  $x^2-2x+1=0=(x-1)^2$

ainsi la droite touche la courbe au point pour lequel  $x=1$ ,  $y=2$ .

Lorsque faisant  $y=0$ , dans une équ., on trouve  $(x-x')^2=0$ , on doit en conclure que la courbe touche l'axe des  $x$  au point  $(x', 0)$ . Voy. (fig. 261 et 251, n° 443 et 454.)

### *Du Centre et des Diamètres.*

425. Le Centre d'une courbe est un point  $C$  (fig. 243 et 245), qui jouit de la propriété de couper en deux parties égales toutes les cordes, telles que  $MM'$ , menées par ce point. Mettons l'origine en  $C$ ; menons  $PM$ ,  $P'M'$  parallèles à l'axe  $Cy$ ; les triangles  $CPM$ ,  $CP'M'$  sont égaux à cause de  $CM=CM'$ ; d'où  $CP=CP'$ ,  $PM=P'M'$ . Donc, lorsque l'origine est au centre de la courbe, les ordonnées et les abscisses sont deux à deux égales et de signes contraires. La réciproque a visiblement lieu.

L'angle  $yCx$  des coordonnées est ici quelconque.

Donc pour qu'une courbe ait le centre à l'origine, il est nécessaire et il suffit que son équ. ne soit point altérée lorsqu'on y change  $x$  en  $-x$ , et  $y$  en  $-y$ .

Appliquons ce précepte à l'équ. générale du 2<sup>e</sup> degré

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \dots (1).$$

Il est manifeste qu'afin que la courbe ait l'origine pour centre, il faut que son équ. ne contienne pas les termes  $Dy$  et  $Ex$ ; elle sera de la forme  $Ay^2+Bxy+Cx^2+F=0$ . C'est pour cela que, par anticipation, nous avons donné le nom de centre au milieu de l'axe de l'ellipse et de l'hyperbole; et il devient prouvé que toute corde qui passe par ce point y est coupée en deux parties égales.

Mais une courbe pourrait avoir un centre qui ne fût pas situé à l'origine; alors il faudrait qu'on pût l'y transporter; on changerait  $x$  en  $x'+a$ ,  $y$  en  $y'+b$ , et l'on déterminerait les coordonnées arbitraires  $a$  et  $b$  de la nouvelle origine, de manière à chasser les termes de 1<sup>er</sup> degré en  $x'$  et  $y'$ . Faisons ce

calcul pour l'équ. (1) : nous égalons ces termes à zéro, et il viendra

$$Bb + 2Ca + E = 0, Ba + 2Ab + D = 0 \dots (2);$$

d'où 
$$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC};$$

et la transformée est  $Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Q = 0$ ,  $Q$  désignant le terme tout constant. La courbe du 2<sup>e</sup> degré a donc un centre toutes les fois que ce calcul est possible, et elle n'en a qu'un seul; mais elle n'en a point dans le cas contraire, qui a lieu lorsque  $B^2 - 4AC = 0$ ; les équ. (2) sont alors contradictoires (n° 114, 2°). Cependant, si l'un des numérateurs de  $a$  ou  $b$  étant en même temps  $= 0$ , l'autre le serait aussi : il y aurait une infinité de centres, et les équ. (2) rentreraient l'une dans l'autre (n° 114, 3°).

En général, si  $a$  et  $b$  représentent des coordonnées variables, les équ. (2) appartiennent à deux droites, dont l'intersection donne le centre; elles sont parallèles lorsqu'il n'y a point de centre, et elles coïncident lorsqu'il y en a une infinité; les centres sont tous les points de cette droite. Ces cas particuliers s'éclairciront bientôt (n° 458).

Donc la parabole n'a point de centre, puisque  $B^2 - 4AC$  devient  $0 - 4 \times 0 = 0$ , pour l'équ.  $y^2 = 2px$ .

426. On dit qu'une ligne est *Diamètre* d'une courbe lorsqu'elle coupe en deux parties égales toutes les cordes parallèles menées dans une direction déterminée.

Lorsque deux droites sont réciproquement des diamètres l'une par rapport à l'autre, on les nomme *Diamètres conjugués*. Les axes de l'ellipse et de l'hyperbole sont, par ex., des diamètres conjugués.

Cherchons l'équation d'un diamètre quelconque d'une courbe du second degré. Soit  $y = ax + b$  l'équ. d'une droite; en éliminant  $y$  de l'équ. (1), on aura une équ. du 2<sup>e</sup> degré, que nous représenterons par  $x^2 + kx + l = 0$ , dont les racines, de la forme  $x = -\frac{1}{2}k \pm \sqrt{n}$ , sont les abscisses des points de section de la droite et de la courbe. Le terme  $-\frac{1}{2}k$  est visiblement l'abscisse

$x'$  du milieu de la corde : en faisant le calcul indiqué, on arrive à l'équ. propre à donner  $k$ , cette équ. est

$$2x'(Aa^2 + Ba + C) + 2Aab + Bb + Da + E = 0.$$

$a$  étant constant, si  $b$  varie, on obtient les abscisses  $x'$  du milieu d'une suite de cordes parallèles : mais si l'on élimine  $b$ , en faisant  $b = y' - ax'$ , on aura une équ. en  $x'$  et  $y'$  propre à toutes ces cordes ; ce sera donc l'équ. de la ligne qui les coupe toutes par moitié ; ainsi l'équ. générale d'un diamètre, ordonnée par rapport à  $a$  est

$$a(Bx' + 2Ay' + D) + 2Cx' + By' + E = 0 \dots (3)$$

il s'ensuit que 1°. les diamètres des courbes du 2° degré, ou les lignes qui coupent par moitié tout système de cordes parallèles, sont des droites, puisque l'équ. est du 1° degré, pour une direction donnée  $a$  des cordes, cette équ. est facile à construire.

2°. Chaque direction des cordes a son diamètre particulier.

3°. Tout diamètre passe par le centre, puisque les coordonnées  $x'$ ,  $y'$  de ce centre (équ. 2) satisfont à notre équ. (3).

Cependant si le centre n'existe pas (la parabole), alors  $B^2 - 4AC = 0$ ; éliminant  $C$ , l'équ. devient

$$y' = -\frac{B}{2A} x' - \frac{aD + E}{2Aa + B}.$$

Le coefficient de  $x$  étant indépendant de  $a$ , tous les diamètres de la parabole sont parallèles entre eux ; la direction en est connue. Comme l'axe est l'un de ces diamètres, et qu'il est perpendiculaire aux cordes, la condition (4) p. 395, se trouve ici exprimée par  $-\frac{Ba}{2A} + 1 = 0$ , d'où  $a = \frac{2A}{B}$ . Cette valeur de  $a$  substituée dans le dernier terme de l'équ. fait connaître la position absolue de l'axe, les coordonnées étant rectangulaires.

Le même calcul pour l'équ. générale (3) donne la condition  $Ba^2 + 2a(C - A) = B$  qui détermine  $a$  dans cette équ., lorsqu'elle appartient aux axes de l'ellipse et de l'hyperbole.



427. Pour que l'axe des  $x$  soit diamètre, les cordes étant parallèles à l'axe des  $y$ , il faut que chaque abscisse donne deux valeurs égales et de signes contraires pour  $y$ ; ainsi, en résolvant par rapport à  $y$  les équ. du 2<sup>e</sup> degré, qui jouissent de cette propriété, il faut qu'on ait  $y = \pm \sqrt{A}$ ,  $K$  contenant  $x$ . En faisant le calcul sur l'équ. (1), il est visible que cette condition n'a lieu qu'autant que cette équ. est privée des termes  $Axy$  et  $Dy$ .

De même, pour que l'axe des  $y$  soit diamètre par rapport à celui des  $x$ , il faut que l'équ. de la courbe ne contienne ni  $Bxy$ , ni  $Ex$ . Donc, pour que les deux axes des  $x$  et  $y$  soient diamètres conjugués, il faut que l'équ. soit privée à la fois des termes  $Axy$ ,  $Dy$  et  $Ex$ , c.-à-d. qu'elle ait forme

$$Ay^2 + Bx^2 = Q \dots (4).$$

Ainsi, l'origine est au centre, l'ellipse et l'hyperbole peuvent avoir des diamètres conjugués, mais la parabole n'en a point. Tout cela est indépendant de l'angle des coordonnées. Donc

1<sup>o</sup>. Soit  $BB'$  (fig. 243 et 245) un diamètre de l'ellipse ou de l'hyperbole; on a vu (n<sup>o</sup> 408 et 414) que les tangentes  $IG$  et  $HK$  en  $B$  et  $B'$  sont parallèles; de plus, elles le sont aussi au diamètre conjugué  $Cy$ , puisque les cordes qui lui sont parallèles sont coupées au milieu par  $BB'$ , et qu'à mesure que ces cordes s'approchent de  $B$  ou  $B'$ , les deux extrémités se rapprochent; enfin, les deux points de section se réunissent en  $B$ , et la double ordonnée devient nulle. Ainsi, pour que la courbe soit rapportée à ses diamètres conjugués, l'axe  $Cy$  des ordonnées doit être parallèle à la tangente menée au point  $B$  ou  $B'$ , où l'axe  $Cx$  des abscisses rencontre la courbe.

2<sup>o</sup>. Toute ligne  $CB$ , menée par le centre  $C$ , est un diamètre dont le conjugué est parallèle à la tangente en  $B$ ; cela résulte de ce que l'équ. de la courbe rapportée à ce système d'axes, a alors nécessairement la forme (4). Ainsi, dans l'ellipse et l'hyperbole, il y a une infinité de diamètres conjugués.



429. Soient pareillement  $Cx$  et  $Cy$  (fig. 245) les diamètres conjugués de l'hyperbole;  $CB=a'$  donne  $Ba'^2=Q$ , car  $y=0$  répond à  $x=a'$ . De plus  $Cy$  ne coupant pas la courbe, si l'on connaissait l'équ. rapportée aux diamètres  $Cx$ ,  $Cy$ , et qu'on voulût trouver le point où  $Cy$  rencontre la courbe,  $x=0$  donnerait une valeur imaginaire pour  $y$ ; mais (par les mêmes motifs qu'au n° 393), changeons le signe sous le radical, cette valeur deviendra réelle; représentons-la par  $b'$ ; alors  $x=0$  devra donner  $y'^2=-b'^2$ , d'où  $-Ab'^2=Q$ ,  $b'$  ou la demi-longueur du second diamètre étant l'ordonnée oblique qui répond au centre, mais rendue réelle. Les équations

$$Ba'^2=Q, -Ab'^2=Q, \text{ donnent } B=\frac{Q}{a'^2}, A=-\frac{Q}{b'^2},$$

et en substituant dans (4), on obtient pour l'équ. de l'hyperbole rapportée à ses diamètres conjugués

$$a'^2y'^2-b'^2x'^2=-a'b'^2... (6).$$

Si l'on prend  $CD=CD'=b'$ , les parallèles  $GH$ ,  $IK$  à  $Cx$  forment le parallélogramme  $GIKH$  inscrit dans l'hyperbole.

Les équ. (5) et (6) pouvant se déduire l'une de l'autre en mettant  $b'\sqrt{-1}$  pour  $b'$ , il en sera de même des résultats de calculs, qu'on est ainsi dispensé de faire pour l'hyperbole.

430. En changeant  $x$  en  $y$ , et  $y$  en  $x$ , l'équ. de l'ellipse conserve sa forme; toutes les constructions qu'on fera sur l'un des diamètres seront donc applicables à l'autre. Si l'on compte les  $x$  sur le 2<sup>e</sup> diamètre de l'hyperbole, l'équ. devient

$$b'^2y'^2-a'^2x'^2=a'b'^2$$

431. Puisque les équ. de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées aux axes et aux diamètres sont de même forme, il est inutile de reproduire ici les calculs déjà effectués pour les axes, et l'on peut en déduire que

1<sup>o</sup>. Les carrés des ordonnées  $PM$  (fig. 243 et 245) sont pro-

droite donnée  $BB'$ , menons les tangentes  $KM$ ,  $KN$ , puis le diamètre  $DD'$  parallèle à  $BB'$ , et son conjugué  $CA$ . L'analyse du n° 413 peut être reproduite ici, ainsi, l'équ. de la corde  $MN$ , qui joint les points de contact  $M$  et  $N$  est.....  
 $a^2\beta y + b^2\alpha x = a'b'^2$ , ce qui permet de construire cette corde, donne les points  $M$  et  $N$ , et enfin les deux tangentes. De plus si le point  $K$  se meut sur  $BB'$ , la corde  $MN$  et les tangentes varient, mais le point  $E$  reste fixe : on a, pour son abscisse,  $\alpha x = a'^2$ , elle est indépendante de  $b'$  et de  $\beta$ .

6°. La propriété démontrée à la fin du n° 411 subsiste visiblement, lorsque l'ellipse est rapportée à ses diamètres conjugués, ce qui justifie ce qu'on dit que  $OH$ ,  $AK$  (fig. 238) peuvent être deux tangentes parallèles quelconques. (Voy. p. 430.)

Toutes ces constructions ont également lieu pour l'hyperbole.

432. Cherchons maintenant les relations qui existent entre les demi-axes  $a$ ,  $b$ , et les demi-diamètres conjugués  $a'$ ,  $b'$ . Reprenons les équ. de la courbe rapportée aux axes et aux diamètres conjugués, et ramenons l'une d'elles à l'autre, à l'aide d'une transformation de coordonnées. Commençons par l'ellipse

La courbe est rapportée aux axes rectangles  $CA$ ,  $CM$  (fig. 243), et il s'agit de changer les  $x$  et  $y$  en coordonnées obliques  $x'$ ,  $y'$ , comptées sur les diamètres conjugués  $CB$ ,  $CD$ , on sait qu'il faut substituer pour  $x$  et  $y$ , les valeurs (*B*, n° 383) dans l'équ.

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

savoir  $x = x' \cos \alpha + y' \cos \beta$ ,  $y = x' \sin \alpha + y' \sin \beta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  étant les angles que font avec les  $x$  les nouveaux axes  $CB$ ,  $CD$  des  $x'$  et  $y'$ . On obtient

$$(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) x'^2 + (a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta) y'^2 + (a^2 \sin \alpha \sin \beta + b^2 \cos \alpha \cos \beta) 2x'y' = a^2b^2.$$

Mais on veut que les nouveaux axes soient des diamètres conjugués, c.-à-d. que la transformée soit  $a'^2y'^2 + b'^2x'^2 = a'b'^2$ , le

Multipliant l'équ. (2) par (3), on trouve

$$a^2 b^2 = a'^2 b'^2 [(a^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta) \\ + a^2 b^2 (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha)].$$

Retranchant de la parenthèse le carré de l'équ. (1), puis divisant par  $a^2 b^2$ , il vient

$$a^2 b^2 = a'^2 b'^2 (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta).$$

Ce dernier facteur est le carré de  $\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta$ , ou  $\sin (\beta - \alpha)$ ; donc

$$a' b' \sin (\beta - \alpha) = ab \dots (5).$$

Puisque  $a' b' \sin \theta$  est (n° 364, V, 2°.) la surface du parallélogramme  $CDBK$  (fig. 243), on voit que le parallélogramme  $CK$  circonscrit à l'ellipse a une aire constante et égale à l'aire du rectangle des axes, quelles que soient les directions des diamètres conjugués.

Ainsi les trois équ. données par la question, qui étaient 1, 2 et 3, reviennent à 1, 4 et 5, savoir

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 \dots (4),$$

$$ab = a' b' \sin (\beta - \alpha) \dots (5),$$

$$a^2 \tan \alpha \tan \beta + b^2 = 0 \dots (6).$$

Observez que  $\beta - \alpha$  est l'angle  $DCB = \theta$  que font les diamètres conjugués; ces lignes étant parallèles à deux cordes supplémentaires, l'équ. (6) résulte aussi de ce qu'on a vu n° 409. Au reste, en éliminant  $a$  et  $b$ , à l'aide des équ. (4) et (5), on trouve que (6) revient à

$$0 = a'^2 \sin \alpha \cos \alpha + b'^2 \sin \beta \cos \beta, 0 = a'^2 \sin 2\alpha + b'^2 \sin 2\beta \dots (7).$$

Posons  $a' = b'$ , pour obtenir les diamètres conjugués égaux. L'équ. (7) donne  $\sin 2\alpha = -\sin 2\beta$ ; ces diamètres sont donc également inclinés sur le grand axe, de part et d'autre du petit. L'équ. (6) devient  $-a^2 \tan^2 \alpha + b^2 = 0$ ;

$$\text{d'où} \quad \tan \alpha = \pm \frac{b}{a} = \frac{BC}{AC} \text{ (fig. 239).}$$

*le parallélogramme inscrit à l'hyperbole est constant et égal au rectangle des axes.*

Si  $a' = b'$ , on a  $a = b$ , et réciproquement : l'hyperbole équilatère a donc seule des diamètres conjugués égaux, et tous le sont deux à deux. On a encore  $\tan \alpha \tan \beta = 1$  : que  $CA$  (fig. 242) soit le 1<sup>er</sup> axe,  $CM$  et  $Cy'$  deux diamètres conjugués égaux, on a  $\tan MCA = \cot y'CA = \tan y'Cy$ , ou  $y'Cy = x'Cx$ ; et comme l'asymptote  $SC$  fait l'angle  $SCA$  de  $45^\circ$ , on a  $SCM = SCy'$  : ainsi, l'asymptote coupe par moitié les angles de tous les diamètres conjugués de l'hyperbole équilatère.

435. Les triangles  $QSM$ ,  $CMQ$  (fig. 242) sont équivalents (n° 420), et l'aire  $CPMQ = CMS = \frac{1}{2} ab$  : or (page 387)  $CMS = \frac{1}{2} SM \cdot CM \sin \theta$ ,  $\theta$  étant l'angle  $CMS$  des diamètres conjugués; ou  $ab = a' \times SM \sin \theta = a'b' \cdot \sin \theta$  (n° 434); donc  $SM = b'$ . Quel que soit le diamètre  $CM$ , la longueur et la direction de son conjugué est  $ST$ . Les diagonales  $HI$  et  $GK$  (fig. 245) du parallélogramme inscrit sont les asymptotes

Le calcul du n° 416 fait sur l'equ.  $a'y^2 - b'x^2 = -a'b'$  donne  $y = \pm \frac{b'}{a'} x$  pour equ. des asymptotes, quand les diamètres conjugués sont pris pour axes. Nous pouvons en déduire de nouveau divers théorèmes.

Faisons  $x = a' = CM$  (fig. 242); il vient  $y = b' = MS = MT$ ; ainsi  $M$  est le milieu de  $ST$  (n° 420), et les asymptotes sont déterminées par les extrémités  $S$ ,  $T$  des diamètres conjugués (n° 435).

Pour toute abscisse, il y a deux ordonnées égales et opposées, quand  $Cy'$  est parallèle à la tang  $ST$ ,  $Cx'$  coupe donc  $bb'$  et  $NN'$  par moitiés; d'où  $bN = b'N'$  : et puisque la direction  $ST$  est quelconque, toute corde jouit de la même propriété (n° 421).

436. Transformons l'equ. de l'ellipse  $a'y^2 + b'x^2 = a'b'$ , et prenons d'autres axes aussi rectangulaires quelconques, en posant (C, n° 383)

par  $\frac{p'}{y}$  qui est le rapport des sinus des angles que la tang. fait avec les axes. Si la tangente doit être menée par un point extérieur, la construction et les propriétés données n° 407 ont encore lieu.

3° La sous-tangente est encore double de l'abscisse, ainsi l'on mènera aisément la tangente en un point donne, connaissant un diamètre.

Si l'on a une parabole tracée  $MAM'$  (fig. 234), on pourra déterminer un diamètre, l'axe, le sommet, les tangentes, etc.; car, en menant deux cordes parallèles quelconques, et joignant leurs milieux, on aura un diamètre  $MS$ : traçant ensuite la corde  $MM'$  perpend. à  $MS$ , et  $AN$  parallèlement par le milieu  $P$ , on aura le sommet  $A$ ...

On remarquera que  $2p' = \frac{y'^2}{x'}$ ; ainsi le paramètre est une troisième proportionnelle à une abscisse et son ordonnée. On décrira donc facilement une parabole, connaissant la direction d'un diamètre  $MS$  sur  $M$ , et un point de la courbe: car les coordonnées  $x', y'$  de ce point font connaître le paramètre  $2p'$ , en sorte qu'on a l'équ.  $y'^2 = 2p'x'$ , et qu'on retombe sur ce qu'on a vu.

### *Discussion des Équations du second degré.*

439. Soit demandé de construire les courbes dont l'équ. est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0. \quad (a);$$

les coefficients  $A, B \dots$  sont donnés en grandeurs et en signes. Les coordonnées seront supposées rectangulaires, attendu que, sans changer le degré de l'équ., on peut toujours les ramener à cet état par une transformation (*E*, n° 384). Comme les courbes ont des formes et des propriétés très différentes, suivant qu'elles ont ou n'ont pas de centre, nous distinguerons les trois cas de  $B^2 - 4AC$  nul, négatif ou positif. Pour abréger, nous serons, par la suite,  $B^2 - 4AC = m$ .



$a = 0$ ,  $c = 1$ ; la  $2^e$  revient à  $b \tan \theta = p$ ,  $\theta$  étant l'angle des  $x$  et  $y'$ , elle détermine cet angle, ou la direction de l'axe  $y'$ :  $a$  et  $b$  sont arbitraires. Donc les parallèles QS à l'axe Ax sont les seuls diamètres, et le sont tous (fig. 234). L'équ. transformée est

$$x'^2 y'^2 - 2px' + b^2 - 2pa = 0.$$

Mais il suit de la définition (n° 426) que, si une ligne est diamètre relativement à une autre, toute parallèle à cette dernière peut être prise pour axe des  $y$ : plaçons l'origine au point  $M$ , où l'axe des  $x'$  coupe la courbe, nous aurons  $b^2 - 2pa = 0$ , d'où

$$y'^2 = \frac{2px'}{p'} = 2p'x',$$

en faisant  $\frac{p}{p'} = p'$ . Comme  $\tan \theta = \frac{p}{b}$ , la tangente  $MT$  à l'origine  $M$  est l'axe des  $y'$  (n° 404);  $2p'$  est ce qu'on nomme le Paramètre du diamètre  $MT'$ ; mais

$$\sin \theta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p + 2a}},$$

dont (n° 398)  $2p' = \frac{2p}{\sin^2 \theta} = 2(p + 2a) = 4MF$ .

Ainsi, le paramètre est le quadruple de la distance de l'origine au foyer. Réunissons les équ.

$$b \tan \theta = p, \quad p' = p + 2a, \quad b^2 = 2pa.$$

On voit que, lorsqu'on connaît deux des quantités  $p$ ,  $p'$ ,  $a$ ,  $b$ , et  $\theta$ , on peut trouver les trois autres (sauf les exceptions analytiques) et construire la courbe, elle a pour équ.  $y'^2 = 2p'x'$ .

438. De ce que les équ. aux axes et aux diamètres sont de même forme, on peut tirer les conclusions suivantes.

1°. La construction donnée pour l'ellipse (n° 431, 2°) s'applique à la parabole, lorsqu'on connaît un diamètre et son paramètre  $2p'$ .

2°. L'équ. de la tangente en un point quelconque  $(x', y')$  est  $yy' = p'(x + x')$ ; l'inclinaison sur le diamètre est donnée

$$\text{ou } d = \frac{D\sqrt{A} - E\sqrt{C}}{\sqrt{a}}, \quad e = \frac{D\sqrt{C} + E\sqrt{A}}{\sqrt{a}} \dots (5).$$

La condition  $B^2 = 4AC$  rend (n° 138) les trois 1<sup>ers</sup> termes de l'équ. (a) réductibles au carré d'un binôme, ou  $(ky + lx)^2$ ; alors  $A$  et  $C$  sont des carrés positifs, dont les racines  $k$  et  $l$  sont réelles. L'infini, ou l'imaginaire, ne peut donc jamais s'introduire dans ces résultats : ce qui prouve que, dans le cas de  $m = 0$ , on pourra toujours, par une transformation d'axes, réduire la proposée (a) à la forme (b).

Si  $A$  ou  $C$  était nul, comme  $B^2 = 4AC$ ,  $B$  le serait aussi; la proposée serait donc sous la forme (b), et il n'y aurait pas lieu à changer d'axes : et si l'on avait à la fois  $A$  et  $C$  nuls, l'équ. (a) serait privée de ses trois premiers termes, c.-à-d. serait au 1<sup>er</sup> degré.

Dans toute équ. proposée où  $m = 0$ , on fera donc le calcul ci-dessus, ou plutôt on posera de suite la transformée (b), après en avoir trouvé les coefficients à l'aide de nos équ., et construit le nouvel axe  $Ax'$  (fig. 248), d'après la valeur de  $\theta$ , savoir :

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{C}{A}}, \quad \sin 2\theta = -\frac{B}{A+C} \dots (6).$$

Le signe de  $\sin 2\theta$  est contraire à celui de  $B$ , ce qui apprend si l'angle  $2\theta$  est  $> 180^\circ$ , c.-à-d. si  $\theta$ , ou  $x'Ax$  étant  $>$  qu'un quadrans, l'axe  $Ax'$  est au-dessous de  $Ax$ . De là résulte le signe du radical qui entre dans les équ. (5),  $\sqrt{a}$  conservant toujours le signe  $+$ . Du reste, ces coefficients sont compliqués de l'irrationalité  $\sqrt{a}$ .

Soit, par ex.,  $2y^2 - 2xy + x^2 - y - 2x + 5 = 0$ , multipliant par 2, pour mettre en évidence le carré parfait, nous avons  $A = 1$ ,  $B = -1$ ,  $C = 1$ .....; d'où  $a = 5$ ,  $\tan \theta = 1$ ,  $\sin 2\theta = \frac{1}{5}$ . On prend les radicaux positifs, et l'on trouve  $d = 0$ ,  $e = -2\sqrt{5}$ ; d'où  $5y'^2 - 2x'\sqrt{5} + 10 = 0$ . Telle est l'équ. qu'il s'agit de construire, l'axe des  $x'$  étant tel. que l'angle  $x'Ax$  ait  $\frac{1}{2}$  pour tangente (on prendra  $AE$  quelconque et sa perpend.  $iE$ , moitié de  $AE$ , fig. 248).

441. Le calcul précédent réduit donc, en général, la proposée à la forme (b), qu'il s'agit maintenant de construire sur les axes rectangulaires  $Ax'$ ,  $Ay'$  (fig. 248). Transportons l'origine en un point  $(h, k)$ ; ces deux lettres désignent des arbitraires. En changeant  $y'$  et  $x'$ , en  $y' + k$  et  $x' + h$ , dans l'équ. (b), elle devient

$$ay'^2 + (2ak + d)y' + cx' + (ak^2 + dk + eh + F) = 0.$$

Pour déterminer  $h$  et  $k$ , chassons le terme en  $y'$  et le terme constant (la nouvelle origine sera un point de la courbe); posons donc

$$2ak + d = 0, \quad ak^2 + dk + eh + F = 0;$$

$$\text{d'où } k = -\frac{d}{2a}, \quad h = \frac{d' - 4aF}{4ae} = \frac{ak^2 - F}{e} \dots (6).$$

Telles sont les coordonnées de la nouvelle origine, qui est un des points de la courbe (\*): la transformée est  $ay'^2 + cx' = 0$ , qui, comparée à  $y'^2 = 2px'$ , est l'équ. d'une parabole rapportée à son axe (\*\*), et tournée dans un sens, ou dans le sens contraire, selon que  $a$  est positif ou négatif.

Soit l'équ.  $2y' + 5y - 4x = 7$ , on trouve  $k = -\frac{5}{2}$ ,  $h = -1$ ; on prendra  $AB = -1$ ,  $BC = -\frac{5}{2}$  (fig. 249); l'origine est portée de  $A$  en  $C$ , et l'équ. devient  $y'^2 = 2x'$ . La parabole a son sommet en  $C$ , et le paramètre est 2.

L'équ.  $y' - 2y + x = 0$ , donne  $y'^2 = -x$ ,  $AB = BC = 1$  (fig. 250), l'origine passe de  $A$  en  $C$ , et la parabole est ouverte dans le sens des  $x$  négatifs.

Reprenons enfin l'exemple de la p. 458, déjà réduit à

(\*) Dans les fig. suivantes,  $A$  désigne la 1<sup>re</sup> origine des coordonnées,  $C$  la nouvelle

(\*\*) Observez que si l'équ. (b) était la proposée, et que les axes n'y fussent pas rectangulaires, il ne serait pas nécessaire de les amener à cet état par une 1<sup>re</sup> transformation, et que les équ. (b) pourraient être appliquées pour transporter l'origine; la parabole serait seulement rapportée à l'un de ses diamètres, comme n<sup>o</sup> 437, on pourrait alors aussi aisément la construire que si elle l'était à son axe

$5y'^2 - 2x'\sqrt{5} + 10 = 0$ , les axes étant  $Ax'$ ,  $Ay'$  (fig. 248), nous trouvons  $k=0$ ,  $h=\sqrt{5}$ ; le sommet, ou la nouvelle origine est en  $M'$ , prenant  $AM'=\sqrt{5}$ ; l'équ. devient  $y'^2=2x'\sqrt{\frac{1}{5}}$ ; le paramètre est  $\sqrt{\frac{1}{5}}$ .

442. Il est un cas où notre calcul ne peut se faire, celui où  $c=0$ ; car  $h$  n'entre plus dans le calcul, et demeure arbitraire; en sorte qu'on a deux équ. pour déterminer la seule quantité  $k$ . Posant alors seulement  $2ak+d=0$ , nous avons, dans cette circonstance,

$$ay'^2 + ak^2 + dk + F = 0, \text{ ou } 4a^2y'^2 = d^2 - 4aF.$$

La nouvelle origine est l'un quelconque des points de la parallèle aux  $x$ , qui a pour équ.  $y'=k$ .

1°. Si  $d^2 - 4aF = 0$ , on a  $2ay' = \pm \sqrt{d^2 - 4aF}$ , équ. qui donne deux droites parallèles aux  $x'$ , et placées à égales distances de cet axe. Telle est, par ex., l'équ.  $y'^2 + 4y' + 3 = 0$ .

2°. Si  $d^2 - 4aF > 0$ , on a  $y' = 0$ , équ. de l'axe des  $x'$ , l'équ. (b) est donc celle d'une droite parallèle aux  $x'$ . L'équation  $y'^2 + 4y' + 4 = 0$  est dans ce cas.

3°. Si  $d^2 - 4aF < 0$ , la proposée ne représente rien, puisqu'on la ramène à  $y'^2 + n^2 = 0$ , qui est visiblement absurde. C'est ce qui arrive pour l'équ.  $y'^2 + 4y' + 5 = 0$ .

L'équ. (b) devient  $ay'^2 + dy' + F = 0$ , dans le cas de  $c=0$ ; on peut lui donner la forme

$$(2ay' + d)^2 - d^2 + 4aF = 0.$$

Ainsi, le 1<sup>er</sup> membre est plus grand ou plus petit qu'un carré, ou même est un carré exact, selon que  $4aF$  est  $>$ ,  $<$  ou  $= d^2$ . On peut aisément voir que l'équ. (a) offre la même particularité, et a, dans ce cas, la forme  $(ky + lx + c)^2 + Q = 0$ , qui est absurde si  $Q$  est positif, du 1<sup>er</sup> degré si  $Q=0$ , et enfin qui donne deux droites parallèles si  $Q$  est négatif (Voy. page 481).

443. Il est donc prouvé que si  $m=0$ , l'équ. du 2<sup>e</sup> degré est celle d'une parabole; mais que des cas particuliers donnent une droite, deux parallèles, ou même rien.

Quant à l'équ.  $cx' + dy' + ex + F = 0$ ,

comme elle revient à (b), où  $x$  est changé en  $y$ , et  $y$  en  $x$ , la courbe est la même, rapportée à l'axe des  $y$ : on peut au reste transporter l'origine comme ci-dessus. Par exemple, l'équ.  $x^2 + 3y = 2x - 1$ , en prenant  $AC = 1 = h$  (fig. 251), et portant l'origine de  $A$  en  $C$ , devient  $x'^2 + 3y' = 0$ . La parabole est ouverte du côté des  $y$  négatifs, et l'axe des  $y'$  est celui de la courbe.

On trouve que, 1°. l'équ.  $x^2 - 6x + 10 = 0$  ne représente rien; 2°.  $x^2 - 6x + 9 = 0$  est l'équ. d'une parallèle aux  $y$ ; elle revient à  $x' = \pm 3$ ; 3°. pour  $x^2 - 6x + 7 = 0$  on a deux parallèles aux  $y$ .

2° CAS.  $B' - 4AC = m$  négatif.

444. La courbe a un centre, auquel nous commencerons par transporter l'origine; car on ne peut plus ici réduire la proposée à la forme (b). Faisons donc le calcul du n° 425, et l'équ. (a) sera ramenée à la forme

$$Ay'^2 + Bxy' + Cx'^2 + Q = 0 \dots (f).$$

Cherchons à la dégager du terme  $xy$ , c.-à-d. à la transformer en

$$qy'^2 + px'^2 + Q = 0 \dots (g).$$

Substituons donc, dans cette dernière, les valeurs (c) de  $y'$  et  $x'$ , et comparons, terme à terme, le résultat à l'équ. (f), pour exprimer l'identité; il viendra

$$q \cos^2 \theta + p \sin^2 \theta = A \dots (1)$$

$$q \sin^2 \theta + p \cos^2 \theta = C \dots (2),$$

$$2 \sin \theta \cos \theta (p - q) = B \dots (3).$$

Ces trois équ. servent à déterminer les trois inconnues  $\theta$ ,  $p$  et  $q$ . La somme des deux 1<sup>res</sup> devient  $p + q = A + C$ ; formant ensuite  $B' - 4AC$ , ou  $m$ , en carrant la 3<sup>e</sup> et retranchant quatre fois le produit des deux autres, il vient

$$m = -4pq(\sin^4 \theta + 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) = -4pq(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2,$$

ou  $m = -4pq$ . Les inconnues  $p$  et  $q$ , ayant  $A + C$  pour



somme et  $-\frac{1}{2}m$  pour produit, sont les racines de l'équ. du 2<sup>e</sup> degré,

$$z^2 - (A + C)z + \frac{1}{2}m = 0 \dots (1);$$

d'où

$$p \text{ et } q = \frac{1}{2}(A + C) \pm \frac{1}{2}\sqrt{B^2 + (A - C)^2}.$$

Ces racines  $p$  et  $q$  sont visiblement réelles dans le cas actuel

La différence entre les équ. (1) et (2) est

$$(q - p)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = (q - p) \cos 2\theta = A - C;$$

en recourant à l'équ. (3), on trouve donc

$$\sin 2\theta = \frac{-B}{q - p}, \quad \cos 2\theta = \frac{A - C}{q - p}, \quad \tan 2\theta = \frac{-B}{A - C}.$$

Cette dernière valeur, facile à construire, donne  $2\theta$ , et, par suite, l'angle  $\theta$  d'inclinaison de l'axe des  $x'$  sur celui des  $x$ : le signe de  $\tan 2\theta$  apprendra si  $2\theta$  est  $>$  ou  $<$   $90^\circ$ , mais, dans tous les cas,  $\theta$  est  $<$   $90^\circ$ , et l'axe des  $x'$  tombe en-dessus de celui des  $x$ . D'ailleurs,  $\sin 2\theta$  est toujours positif, ainsi  $p - q$  doit être de même signe que  $B$ : donc  $q$  est la plus grande des deux racines de  $z$ , si  $B$  est négatif, et la plus petite, si  $B$  est positif. On saura ainsi distinguer entre elles les racines qu'il faut préférer pour  $q$  et  $p$ .

Soit, par ex., l'équ.  $5y^2 + 2xy + 5x^2 + 2y - 2x = \frac{1}{2}$ ; en transportant l'origine au centre (n° 425), point dont les coordonnées sont  $h = \frac{1}{4}$ ,  $k = -\frac{1}{4}$ , la proposée devient...  $5y'^2 + 2xy' + 5x'^2 = 2$ ; on a ensuite, pour l'équation (1),  $z^2 - 10z + 24 = 0$ ; d'où  $z = 5 \pm 1$ , ainsi,  $B$  étant positif,  $q = 4$ ,  $p = 6$ , puis  $4y'^2 + 6x'^2 = 2$ , équ. qui reste à construire, les axes des  $x'$  et  $y'$  étant déterminés par  $\tan 2\theta = \infty$ , d'où  $2\theta = 90^\circ$ , c.-à-d. que l'axe des  $x'$  fait un angle de  $45^\circ$  avec celui des  $x$  en-dessus duquel il est placé. Ces constructions sont sans difficulté.

445. Ce calcul ne peut présenter aucun cas d'exception. Il est à observer que  $m$  étant négatif dans le cas actuel, savoir,  $B^2 = 4AC - m$ , le radical des valeurs de  $z$  se réduit à

$\sqrt{(A+C)^2 - m}$ , qui est  $< A+C$ . Ces valeurs de  $p$  et  $q$  sont donc de même signe que  $A+C$ , en sorte qu'on peut regarder comme positifs  $p$  et  $q$  dans l'équ. (g), qu'il s'agit maintenant de discuter. Nous examinerons successivement trois cas, selon que  $Q$  est nul, positif ou négatif.

1°. Si  $Q=0$ , on a  $qy'^2 + px'^2 = 0$ , équ. qui ne peut subsister que si, à la fois,  $x'=0$ ,  $y'=0$ . On a donc un point, qui est l'origine des  $x'$  et  $y'$ . L'équ.  $y^2 - 4xy + 5x^2 + 2x + 1 = 0$  est dans ce cas, le point est  $(-1, -2)$ , ainsi qu'on le reconnaît par le calcul, qui transforme d'abord la proposée en  $y^2 - 4xy + 5x^2 = 0$ , puis donne  $z = 3 \pm 2\sqrt{2}$ ,  $\tan 2\theta = -1$ ,  $2\theta = 135^\circ$ , enfin  $(3+2\sqrt{2})y'^2 + (3-2\sqrt{2})x'^2 = 0$ .

2°. Si  $Q$  est positif, la proposée ne représente rien, puisque l'équ. (g) est absurde, trois quantités positives ne pouvant s'entre-détruire. C'est ce qui arrive dans l'ex. précédent, quand on met, au lieu du dernier terme 1, une valeur  $> 1$ .

3°. Si  $Q$  est négatif, la transformée (g) devient  $qy'^2 + px'^2 = Q$ . En faisant tour à tour  $x'$  et  $y'$  nuls, pour obtenir les points où la courbe coupe les nouveaux axes, on obtient

$$y = \sqrt{\frac{Q}{q}} = b, \quad x = \sqrt{\frac{Q}{p}} = a;$$

d'où  $q = \frac{Q}{b^2}$ ,  $p = \frac{Q}{a^2}$ , puis  $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$ . La courbe est donc UNE ELLIPSE, rapportée à son centre et à ses axes  $2a$  et  $2b$ .

Si, dans l'ex. précédent, on met  $-1$  au dernier terme, on trouve d'abord  $y^2 - 4xy + 5x^2 = 2$ , les mêmes valeurs de  $z$  et de  $\theta$ , puis l'équ.

$$(3+2\sqrt{2})y'^2 + (3-2\sqrt{2})x'^2 = 2,$$

qui appartient à une ellipse dont les axes sont  $\sqrt{8(3 \mp 2\sqrt{2})}$ .

446. Concluons de là que l'équ. générale du 2<sup>e</sup> degré appartient à l'ellipse, toutes les fois que  $m$  est négatif; mais qu'on trouve deux cas particuliers, qui donnent l'un rien, l'autre un point. Lorsque  $m < 0$ , les valeurs de  $z$  sont de même signe :

elles deviennent égales dans le cas du cercle, car  $\mu = q$ .  
*Voy. n° 454.*

3<sup>e</sup> CAS.  $B^2 - AC = m$  positif.

447. Tous les calculs du n° 444 conviennent encore ici, en sorte qu'il faut reproduire la même transformation et les mêmes valeurs de  $\theta$  et  $z$ ; seulement, comme  $B^2 = m + 4AC$ ,  $m$  étant positif, le radical est  $> A + C$ , et les deux racines de  $z$  sont de signes contraires, en sorte que, dans la transformée (g), on peut donner le signe  $+$  à  $q$ , et le  $-$  à  $p$ ; savoir :

$$qy'^2 - px'^2 + Q = 0 \dots (l)$$

Analysons les cas de  $Q$  nul, positif et négatif.

1<sup>o</sup>. Si  $Q = 0$ , on a  $qy'^2 = px'^2$ , d'où  $y' = \pm x' \sqrt{\frac{p}{q}}$ , il est évident qu'on obtient deux droites,  $CD$ ,  $CE$  (fig. 251), qui se croisent à la nouvelle origine  $C$ , l'axe des  $x'$  coupant par moitié l'angle  $DCE$  qu'elles font entre elles. L'ordonnée  $\pm \sqrt{\frac{p}{q}}$ , qui répond à  $x' = 1$ , sert à construire ces droites; elle est la tangente des angles  $DCx'$ ,  $ECx'$ .

Par ex., l'équ.  $y^2 - 6xy + x^2 + 2y - 6x + 1 = 0$ , en transportant l'origine au point  $(0, -1)$ , qui est le centre, devient  $y^2 - 6xy + x^2 = 0$ : on trouve  $z^2 - 2z = 8$ , d'où  $z = 1 \pm 3$ ; savoir,  $q = 4$ ,  $p = -2$  et  $y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 = 0$ ; d'où  $y' = \pm x' \sqrt{\frac{1}{2}}$ ; enfin,  $\theta = 45^\circ$ . Ces constructions n'offrent aucune difficulté (V. fig. 252).

2<sup>o</sup>. Si  $Q$  est positif, l'équ. (l) devient  $qy'^2 - px'^2 = -Q$ : posant  $x' = 0$ , on a  $y' = \sqrt{\frac{Q}{q}}$ .  $\sqrt{-1}$ ; on fait  $\sqrt{\frac{Q}{q}} = b$ , puis on pose  $y' = 0$ , et l'on a

$$x' = \sqrt{\frac{Q}{p}} = a, \quad \sqrt{\frac{Q}{q}} = b,$$

ce sont les demi-axes d'une HYPERBOLE, ainsi qu'il suit du

calcul de la substitution des valeurs  $p = \frac{Q}{a^2}, q = \frac{Q}{b^2}$ , qui donne  
 $a^2 y'^2 - b^2 x'^2 = -a^2 b^2$ . On a un exemple de ce cas en remplaçant  $+1$ , dans le dernier terme de l'équ. précédente, par 5, les valeurs de  $a, b$  sont les mêmes, et l'on a  $y'^2 - \frac{1}{5} x'^2 = -1$ ; les axes sont  $b = 1, a = \sqrt{5}$ .

3°. Si  $Q$  est négatif, on a  $qy'^2 - px'^2 = Q$ ; un calcul semblable, ou seulement le changement de  $x$  en  $y$ , et  $y$  en  $x$ , prouve qu'on a une hyperbole dont les axes sont l'inverse des précédens. Qu'on change  $+1$  en  $-3$ , dans le dernier terme de l'exemple ci-dessus, et l'on trouvera  $y'^2 - \frac{1}{3} x'^2 = 1$ ; les axes sont  $a = 1, b = \sqrt{3}$ , la courbe coupe le second des axes coordonnés (celui des  $y'$ ).

448. Faisons varier  $Q$  dans l'équ. (D).  $Q$  étant positif, on a l'hyperbole  $MAN, LOI$  (fig. 253); et il suit des valeurs des axes  $a$  et  $b$ , qu'en prenant  $AD = AD' = \sqrt{\frac{b^2}{Q}}$ , et l'abscisse  $CA = 1$  (ou  $AD = b$  et  $AC = a$ ), les droites  $CD$  et  $CD'$  sont les asymptotes de toutes les hyperboles, qu'on obtient à mesure que  $Q$  s'accroît; seulement le sommet  $A$  s'éloigne de plus en plus, et la courbe s'ouvre sans cesse davantage. Si  $Q = 0$ , on a les asymptotes mêmes,  $qy'^2 - px'^2 = 0$ . Enfin, si  $Q$  devient négatif, on obtient l'hyperbole  $M'A'N', I'O'L'$ , tracée entre les mêmes asymptotes, mais dans les autres angles, les sommets  $A', O'$  s'éloignant à mesure que  $Q$  augmente.

449. Ainsi l'équ. générale du 2<sup>e</sup> degré appartient à l'hyperbole, toutes les fois que  $m$  est positif; mais, dans un cas particulier, on trouve deux droites qui se croisent. Les valeurs de  $z$  sont alors de signes différens, et lorsque, abstraction faite de ce signe, elles sont égales,  $C = -A$ , l'hyperbole est équilatère. Comme  $B^2 - \frac{1}{4} AC$  est toujours positif dès que  $A$  et  $C$  ont des signes différens, on est alors dans le cas de l'hyperbole, quelles que soient les grandeurs de  $A, B, C, \dots$ . La même chose a lieu si  $A$  ou  $C$  est nul, c.-à-d. si la proposée est privée de l'un des car-

rés  $x^2$  et  $y^2$ , et même si ces carrés manquent l'un et l'autre. Dans ces divers cas, la marche des calculs est toujours la même ; mais comme dans le dernier elle devient très simple, nous l'exposerons ici. Soit proposée l'équ.

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0.$$

on transporte l'origine au centre, en faisant  $Bk + E = 0$ ,  $Bh + D = 0$ , d'où

$$k = -\frac{E}{B}, \quad h = -\frac{D}{B}, \quad x'y' = \frac{Q}{B},$$

en posant  $Q = DE - BF$ . Ces expressions ne sont sujettes à aucune exception. Ainsi l'équ. proposée est celle d'une hyperbole rapportée à des axes parallèles aux asymptotes. L'hyperbole est équilatère quand les  $xy$  sont rectangulaires (n° 416). Si  $CD'$  (fig. 253) est l'axe des  $x'$ ,  $CD$  celui des  $y'$ , la courbe est tracée dans les angles  $DCD'$ ,  $ECE'$ , si  $Q$  est positif, elle est  $MAN$ ,  $LOI$  ; enfin elle est  $MA'N'$ ,  $LO'L$  quand  $Q$  est négatif. Si  $Q = 0$ , l'équ. proposée appartient aux asymptotes mêmes.

Ainsi, pour l'équ.  $xy - 2x + y + m = 4$ , les axes étant  $Ax$ ,  $Ay$ , on a  $h = 2$ ,  $k = -1$  ; on fera  $AB = 1$  (fig. 254),  $BC = 2$  ;  $Cx'$ ,  $Cy'$  seront les asymptotes de l'hyperbole  $x'y' = 2 - m$ , qui sera  $MN$ ,  $OP$ , si  $m < 2$  ;  $M'N'$ ,  $O'P'$ , si  $m > 2$  ; enfin,  $m = 2$  donne les droites  $Cx'$ ,  $Cy'$ .

450. Il convient de remarquer que, dans les cas de  $m > 0$  ou  $< 0$ , si la proposée est privée du terme en  $xy$ , le calcul de la discussion est très simple, et se réduit à transporter l'origine au centre ; il n'est pas même nécessaire de rendre les coordonnées rectangulaires quand elles ne le sont pas, et l'équ. est alors rapportée aux diamètres conjugués, au lieu de l'être aux axes. En effet, soit la proposée

$$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 ;$$



le centre est au point  $\left(-\frac{E}{2C}, -\frac{D}{2A}\right)$ , c'est-à-dire qu'on a (\*)

$$2Ch + E = 0, 2Ak + D = 0, Ay' + Cx' + Q = 0,$$

en faisant  $Q = Ak^2 + Ch^2 + Dk + Eh + F = F - \frac{AE^2 + CD^2}{4AC}$ .

Voici divers exemples de ces calculs.

Les équ.  $2y^2 + 3x^2 - 3x - 2y + 2 = 0$ ,  $4y^2 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$  ne représentent rien; la 1<sup>re</sup> a pour centre  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , et se réduit à  $2y'^2 + 3x'^2 + \frac{1}{2} = 0$ ; la 2<sup>e</sup> a le centre au point  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ , et donne  $4y'^2 + 2x'^2 + \frac{1}{2} = 0$ .

L'équ.  $y^2 + 2x^2 - 2y + 4x + 3 = 0$  appartient au point  $(+1, -1)$ .

L'équ.  $\frac{3}{2}y^2 + 3x^2 - 12x + 3 = 0$  donne  $h = 2$ ,  $k = 0$ , puis  $\frac{3}{2}y'^2 + 3x'^2 = 9$ ; les demi-axes de l'ellipse sont  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = \sqrt{6}$ ; on prend  $AC = 2$  (fig. 255), et l'on trace l'ellipse  $DFEO$ , en formant  $DC = \sqrt{3}$ ,  $CO = \sqrt{6}$ . Si les coordonnées étaient obliques, ces longueurs seraient celles des demi-diamètres conjugués.

Pour  $y^2 + 2x^2 - 2y = 0$ , on a une ellipse tangente à l'axe des  $x$ , dont le centre est sur l'axe des  $y$  au point  $(0, 1)$ ; on a  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{2}$ .

L'équ.  $y^2 - 4x^2 + 4y + 12x - 5 = 0$  devient  $y' = \pm 2x'$ , en transportant l'origine de  $A$  en  $C$  (fig. 252),  $AB = \frac{3}{2}$ ,  $BC = -2$ ; on prend  $y' = 2$  et  $x' = \pm 1$ , et l'on trace  $CD$  et  $CE$ .

Pour  $2y^2 - 3x^2 - 2y - 3x + \frac{1}{2} = 0$ , le centre est au point  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , et l'on a  $2y'^2 - 3x'^2 = -\frac{1}{2}$ . On prendra  $AB = \frac{1}{2} = BC$  (fig. 256), et l'on décrira l'hyperbole, dont  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \sqrt{\frac{1}{2}}$  sont les axes ou les diamètres conjugués, selon que les coordonnées sont rectangles ou obliques.

L'équ.  $y^2 - 2x^2 - 2y + 9 = 0$  donne  $y' - 2x' + 8 = 0$ , hyperbole pour laquelle  $k = 1$ ,  $h = 0$ ,  $a = 2$ ,  $b = 2\sqrt{2}$ .

(\*) Les coordonnées du centre s'obtiennent aisément à l'aide du théorème (506), qui apprend à chasser le 2<sup>e</sup> terme d'un polynôme. Si l'on multiplie respectivement les équ. qui suivent par  $h$  et  $k$ , et qu'on ajoute, on trouve  $Ak^2 + Ch^2 = -\frac{1}{4}(Dk + Eh)$ , qui sert à réduire la valeur de  $Q$ , ainsi qu'on l'indique plus bas.

Enfin  $3y'^2 - 2x' + 2x' + 3y' = \frac{1}{2}$ , donne  $AB = h = \frac{1}{2}$  (fig. 257)  $BC = b = -\frac{1}{2}$ , d'où  $3y'^2 - 2x' = \frac{1}{2}$ , équ. qu'il est aisé de rapprocher de celle de la fig. 256, seulement la courbe est placée différemment.

451. Il résulte, de cette exposition, que l'équ. générale du 2<sup>e</sup> degré présente trois cas : le 1<sup>er</sup> ou  $m = 0$ , qui donne une parabole, outre les cas particuliers d'une droite, de deux parallèles, et de rien; le 2<sup>e</sup> ou  $m$  est négatif, qui donne une ellipse, outre les cas particuliers d'un point et de rien; le 3<sup>e</sup> enfin ou  $m$  est positif, qui répond à l'hyperbole, rapportée soit au 1<sup>er</sup> soit au 2<sup>e</sup> axe, outre un cas qui donne deux droites non parallèles. Comme les sections d'un cône par un plan sont précisément une parabole, une ellipse ou une hyperbole, et que lorsque la section se fait par le sommet, on a une droite, un point ou deux droites croisées, de nos huit cas, six sont des sections coniques : ce qui fait dire que toutes les équ. du second degré appartiennent aux sections d'un cône par un plan. Partout où un plan et un cône existent, il ne peut pas arriver qu'il n'y ait pas intersection, ou qu'on ait deux parallèles; d'où l'on voit que ce théorème souffre deux exceptions.

En faisant mouvoir le plan coupant parallèlement à lui-même lorsqu'il passe par le sommet, l'ellipse devient un point, la parabole une droite, l'hyperbole deux droites croisées; c'est ce qui a fait considérer le point comme une sorte d'ellipse dont les axes sont nuls; une droite, comme une sorte de parabole; deux droites croisées, comme une hyperbole (n<sup>o</sup> 400) : ces considérations n'intéressent en rien la théorie.

452. On obtient la grandeur et la direction des axes principaux par le procédé suivant. Supposons d'abord que les axes soient rectangulaires, et que l'origine soit au centre. L'équ. de la courbe proposée est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Q = 0 \dots (1)$$

Concevons que du centre  $A$ , avec un rayon  $r$ , on ait tracé un cercle (fig. 258 bis), l'équ. est  $x^2 + y^2 = r^2$ ; il y aura, en général, quatre points de section pour les obtenir, il suffira par l'origi-

gine, une droite  $AK$  à l'un de ces points, et soit  $y = Mx$  son équ.; en éliminant  $x$  et  $y$  entre ces équ. on trouve

$$(Ar^2 + Q) M^2 + Br^2 M + Cr^2 + Q = 0 \quad (2).$$

Si le rayon  $r$  est donné, cette équ. fera connaître deux valeurs de  $M$ , ce qui prouve qu'il n'y a que deux droites allant du centre aux quatre points d'intersection, c.-à-d. que ces points sont deux à deux sur un même diamètre. Ces lignes s'obtiennent en construisant les deux valeurs de  $M$ , qui est la tangente de leur angle d'inclinaison sur l'axe des  $x$ . Quand les racines sont imaginaires, le rayon  $r$  est trop grand ou trop petit pour que le cercle rencontre la courbe, et si les racines sont égales, les points de sections coïncident deux à deux, et le cercle est tangent à la courbe. La tangente commune à l'un et à l'autre en ce point, est perpendiculaire au rayon du cercle, propriété qui ne convient qu'aux axes principaux. Ainsi les valeurs de  $M$  qui répondent au cas des racines égales sont propres à ces axes. Alors on a (n° 138)

$$B^2 r^4 - 4(Ar^2 + Q)(Cr^2 + Q) = 0$$

ou  $(B^2 - 4AC) r^4 - 4Qr^2(A + C) = 4Q^2,$

puis  $(Ar^2 + Q) M^2 + Br^2 M + Cr^2 + Q = 0,$

en extrayant la racine de l'équ. (2) qui est un carré; on en tire

$$r^2 = -\frac{2QM}{2AM + B}, \quad M^2 - 2M = 1, \quad (3)$$

en posant, pour abréger,  $A - C = B_2$ ; donc  $M = 1 \pm \sqrt{1 + B_2}$ . Ainsi prenez sur l'axe  $Ax$ ,  $AD = a$ , élevez l'ordonnée  $DI = a$ ,  $AI$  sera  $\sqrt{1 + a^2}$ ; du centre  $I$ , tracez le cercle  $KA K'$ , avec le rayon  $AI$ , et les points de section  $K, K'$  donneront les directions  $AK, AK'$  des axes principaux. puisque les valeurs de  $M$  sont les tangentes des angles  $KAD, K'AD$ . Ces lignes sont à angle droit, d'après la construction, et en effet le produit des deux valeurs de  $M$  est  $-1$  (n° 137). On en tire ensuite

les deux valeurs de  $r$  qui sont les longueurs des axes :

$$r = 2Q \times \frac{A + C \pm \sqrt{B^2 - 4AC + (A + C)^2}}{B^2 - 4AC} \dots (4).$$

Si  $B^2 - 4AC = m$  est négatif, le radical est  $< A + C$ ; les deux valeurs de  $r^2$  sont, ou positives, et on a une *ellipse*; ou négatives, et on n'a rien, ou enfin nulles,  $Q = 0$ , et on a un *point* A. Quand  $m$  est positif, on a une *hyperbole*; les valeurs de  $r$  sont de signes contraires; on change le  $-$  en  $+$  pour avoir le 2<sup>e</sup> axe. Cependant lorsque  $Q = 0$ , on a les deux droites  $AK$ ,  $AK'$ . Ce calcul n'est plus possible quand  $B^2 - 4AC = 0$ .

Soit par ex. l'équ.  $y^2 - 2xy + 2x^2 = 2$ ; d'où  $a = \frac{1}{2}$ , etc.  $M = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ ;  $DI = \frac{1}{2}$ ,  $AI = \sqrt{\frac{1}{2}}$ , et le cercle  $KA K'$  donne les directions  $AK$ ,  $AK'$  des deux axes. Enfin  $r^2 = 3 \pm \sqrt{5}$  sont les longueurs de ces axes, rayons des deux cercles tangents à l'ellipse.

On pourra s'exercer encore au calcul sur l'équation . . . . .  $y^2 - 6xy + x^2 + 2y - 6x + 1 = 0$ , déjà traitée page 464.

Cette méthode s'applique pareillement au cas où les coordonnées font un angle  $\gamma$ . L'équ. du cercle est alors (n° 377)

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \gamma = r^2;$$

éliminant  $x$  et  $y$  à l'aide de l'équ.  $y = Mx$ , on a

$$(Ar^2 + Q)M^2 + (Br^2 + 2Q \cos \gamma)M + Cr^2 + Q = 0,$$

pour que cette équ. soit un carré, il faut que

$$(\frac{1}{2}Br^2 + Q \cos \gamma)^2 - (Ar^2 + Q)(Cr^2 + Q) = 0,$$

ou  $(B^2 - 4AC)r^4 - 4Qr^2(A + C - B \cos \gamma) + 4Q^2 \sin^2 \gamma \dots (5)$

puis  $(Ar^2 + Q)M + \frac{1}{2}Br^2 + Q \cos \gamma = 0 \dots (6)$

L'équ. (5) qu'on résout à la manière du 2<sup>e</sup> degré donne  $r^2$ ; on peut éliminer  $r^2$  entre les équ. (5) et (6). Enfin l'équ. (6) donne  $M$ , et on peut construire l'équ.  $y = Mx$ .

453. Souvent on a plutôt pour objet de connaître la nature et la forme de la courbe dont on a l'équ., que de la construire rigoureusement; le procédé suivant a l'avantage de donner avec rapidité ces circonstances, et n'a pas, comme le précédent, l'in-

convénient d'introduire des irrationnelles dans les coefficients.

Comme il suit de ce qui précède, que les lignes comprises dans l'équ. générale (a) p. 456 sont connues d'avance, il ne faut, pour les distinguer entre elles, que trouver un caractère propre à chacune : ce caractère est tiré des limites de la courbe, qui sont très différentes dans les cas de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole. Pour obtenir ces limites, résolvons l'équ. (a) par rapport à  $y$ ; nous aurons une expression de cette forme,

$$y = ax + \beta \pm \sqrt{(mx^2 + nx + p)} \dots (1);$$

$a, \beta, m, n$  et  $p$  sont des constantes connues. (Voy. p. 204.) Chaque valeur de  $x$  répond à deux points de la courbe, tant que le radical est réel; s'il est imaginaire, la courbe n'a aucun point correspondant à l'abscisse dont il s'agit; enfin, si le radical est nul, on n'a qu'un point de la courbe. Les limites sont donc relatives à l'étendue où le radical passe de l'état réel à l'imaginaire. Comme en prenant pour  $x$  des valeurs suffisamment grandes, positives ou négatives, le trinôme  $mx^2 + nx + p$  reçoit le signe (139, 9<sup>o</sup>.) du plus grand terme  $mx^2$ ; si  $m$  est négatif, pour ces valeurs, le radical devient imaginaire, de sorte que la courbe est alors limitée dans les deux sens. Elle serait illimitée, si  $m$  était positif; enfin,  $m$  nul réduirait le radical à  $\sqrt{(nx + p)}$ , et l'on voit que la courbe serait limitée seulement dans un sens, puisque le signe de  $nx$  change avec  $x$ .

La nature de nos courbes dépend donc du signe de  $m$ , ce qui nous force encore de distinguer trois cas dans notre analyse générale, suivant que  $m$ , ou  $B^2 - 4AC$ , est négatif, positif ou nul.

Mais, avant tout, remarquons que, pour construire les ordonnées  $PM, PM'$  (fig. 258 et 259), qui répondent à une abscisse  $AP = x'$ , il faut d'abord porter parallèlement à l'axe des  $y$  (dont la direction est donnée et quelconque)  $PN = ax' + \beta$ ; puis, pour ajouter et soustraire la partie radicale  $MN = M'N = \sqrt{(mx'^2 + nx' + p)}$ , on en portera la valeur, de part et d'autre de  $N$ , en  $M$  et en  $M'$ , et  $N$  est le milieu de  $MM'$ . Tous les points  $N$  qui satisfont à l'équ.

$$y = ax + \beta \dots (2)$$



coupent donc les cordes parallèles à  $Ay$  en deux parties égales; ainsi, on tracera la droite  $BN$ , qui est un *Diamètre* de la courbe (n° 426).

Aux points  $D$  et  $D'$  d'intersection de la courbe avec son diamètre, les équ. (1) et (2) ont lieu ensemble (n° 372), et ces points sont donnés par les racines de l'équ

$$mx^2 + nx + p = 0 \dots (3).$$

On voit de plus que les ordonnées  $ED$ ,  $E'D'$  correspondantes sont tangentes à la courbe, puisque, le radical étant nul, la proposée est le carré des  $y - ax - \beta = 0$ ; ainsi les points d'intersection sont réunis en un seul, aux points  $D$  et  $D'$  (n° 424).

1<sup>er</sup> Cas. *Courbes limitées en tous sens, ou négatif.*

454. 1°. Si les racines de l'équ. (3) sont réelles, en les désignant par  $a$  et  $b$ , et prenant  $AE = a$ ,  $AE' = b$  (fig. 258), on aura les tangentes et les points d'intersection cherchés  $D, D'$ : le radical de (1) prendra la forme  $\sqrt{[-m(x-a)(x-b)]}$ : il n'est réel qu'autant que les facteurs  $x-a$ ,  $x-b$  sont de signes contraires, de sorte que  $x$  est compris entre  $a$  et  $b$ . La courbe ne s'étend donc qu'entre les limites  $EF, E'F'$ , elle forme un contour fermé; c'est une *Ellipse*.

Remarquons que, pour obtenir  $E, E'$ , on a tiré de (3) des racines de la forme  $x = h \pm \sqrt{f}$ ; on a donc porté  $AK = h$ , puis  $KE' = KE = \sqrt{f}$ . Donc  $C$  est le milieu du diamètre  $DD'$ , ou le centre de l'ellipse (n° 427): ainsi l'on obtiendra le conjugué en cherchant l'ordonnée centrale  $CO'$ , à partir du diamètre, c.-à-d. la valeur que prend  $\sqrt{(mx^2 + nx + p)}$  lorsqu'on fait  $x = h$ . La courbe étant rapportée à ses diamètres conjugués, il sera facile de la décrire.

Par exemple;  $3y^2 - 6xy + 9x^2 - 2y - 6x + \frac{7}{3} = 0$  donne  $y = x + \frac{1}{3} \pm \sqrt{(-2x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{1}{3})}$ ; on prend  $AB = \frac{1}{3}$  (fig. 258); et l'on mène le diamètre  $BN$ , dont l'équ. est  $y = x + \frac{1}{3}$ ; lorsque l'angle  $yAx$  est droit,  $BN$  fait avec  $Ax$  un angle de

45°. En égalant le radical à zéro, on a  $x^2 - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}$ ; d'où  $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$ ; donc  $AK = \frac{1}{2}$ ,  $KE = KE' = \frac{1}{2}$  donnent le centre  $C$  et les points  $D, D'$  d'intersection de la courbe avec le diamètre  $BN$ . De plus,  $EF, E'F'$  sont tangentes et limites, puisque le radical peut être mis sous la forme  $\sqrt{-2(x-1)(x-\frac{1}{2})}$ ; d'où l'on voit que  $y$  n'est réel qu'autant que  $x$  est  $> \frac{1}{2}$  et  $< 1$ .

En faisant  $x = \frac{1}{2}$  sous le radical, il devient  $\sqrt{\frac{1}{2}} = CO'$ ; c'est l'un des demi-diamètres conjugués; l'autre est  $CD$ : il est donc facile de tracer la courbe (n° 431, 2°). On trouve  $y = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$  pour la plus grande et la plus petite ordonnée, n° 423.

Pareillement  $y^2 - xy + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$  donne l'ellipse  $DOD'O'$  (fig. 261);  $AK = 2$ ,  $EK = E'K = \sqrt{2}$ ,  $CK = 1$ ;  $C$  est le centre.  $y = 0$  donne  $x^2 - 2x + 1 = 0$ , carré de  $x - 1$ : donc, si l'on prend  $AI = 1$ , la courbe est tangente en  $I$  à  $Ax$ ;  $OO' = 2b' = \sqrt{2}$ : la plus grande et la plus petite ordonnée sont 2 et 0.

Il est inutile de dire que, dans les constructions, il faut surtout avoir égard aux signes; ainsi, pour

$$4y^2 + 8yx + 8x^2 + 12x + 8y + 1 = 0,$$

on a  $y = -x - 1 \pm \sqrt{-x^2 - x + \frac{1}{4}}$ ;

on construit le diamètre  $BD$  (fig. 262), dont l'équation est  $y = -x - 1$ ; de  $x^2 + x = \frac{1}{4}$ , on tire  $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$ , on prend  $AK = -\frac{1}{2}$ , et  $KE = KD' = 1$ , ce qui donne les limites tangentes  $ED, E'D'$  de l'ellipse:  $C$  en est le centre, et l'on trouve  $b' = 1$ .

2°. Si les racines de l'équation (3) sont égales,  $a$  étant leur valeur, le radical équivaut à  $\sqrt{-m(x-a)^2}$ , ainsi, (1) devient  $y = ax + \beta \pm (x-a)\sqrt{-m}$ : on ne peut donc rendre  $y$  réel qu'en prenant  $x = a$ , d'où  $y = aa + \beta$ .

Ainsi, on n'a qu'un point; ses coordonnées sont connues.

Il est aisé de voir qu'en effet la proposée équivaut ici à  $(y - ax - \beta)^2 + (x - a)^2 m = 0$ ; et comme la somme de deux quantités positives ne peut être nulle, à moins que chacune ne le soit en particulier, la proposée se partage d'elle-même en deux autres (n° 112). L'équ.  $y^2 - xy + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = 0$

donne le point dont les coordonnées sont  $x = 1$ , et  $y = 1$ .  
L'équ.  $x^2 + y^2 = 0$  donne l'origine.

3°. Si les racines de l'équation (3) sont imaginaires, pour aucune valeur de  $x$ , le trinôme  $-mx^2 + nx + p$  ne peut changer de signe (n° 139, 9°.); ce signe demeure toujours le même que celui de son plus grand terme  $-mx^2$ ; . . . . .  
 $\sqrt{-mx^2 + nx + p}$  étant sans cesse imaginaire, la proposée ne représente rien. En effet, cette équ. revient alors à  $(y - ax - \beta)^2 + (mx^2 - nx - p) = 0$ , dont les deux parties sont positives et ne peuvent s'entre-détruire; par conséquent il est absurde de supposer leur somme  $= 0$ , puisque la seconde ne peut être rendue nulle, comme on l'a fait précédemment.

C'est ce qui arrive pour  $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x + 4 = 0$ .

Pour que  $m$ , ou  $B^2 - 4AC$ , soit négatif, il faut que les trois 1<sup>ers</sup> termes de la proposée (3),  $Ay^2 + Bxy + Cx^2$  forment une quantité plus grande qu'un carré parfait. Dans le 1<sup>er</sup> exemple ci-dessus, page 472, ces termes sont

$$3(y^2 - 2xy + 3x^2) = 3[(y - x)^2 + 2x^2].$$

Cherchons dans quels cas l'équ. générale du 2<sup>e</sup> degré est celle d'un cercle, les coordonnées étant rectangles. Cette équ. est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0;$$

l'équ. la plus générale du cercle est  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ , ou

$$y^2 + x^2 - 2\beta y - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0.$$

La 1<sup>re</sup>, dégagée du coefficient  $A$  de  $y^2$  doit être comparable terme à terme à la 2<sup>e</sup>. On en tire d'abord  $A = C$ ,  $B = 0$ ; donc quand les  $x$  et  $y$  sont à angle droit, l'équ. du 2<sup>e</sup> degré est celle d'un cercle, lorsqu'elle est privée du terme en  $xy$  et que les coefficients de  $x^2$  et de  $y^2$  sont égaux. Mais de plus il faut que  $D = -2A\beta$ ,  $E = -2A\alpha$ ,  $F = A(\alpha^2 + \beta^2 - r^2)$ , d'où l'on tire

$$\alpha = -\frac{E}{2A}, \beta = -\frac{D}{2A}, r^2 = \frac{E^2 + D^2 - 4AF}{4A^2},$$

ce sont les coordonnées du centre et le rayon du cercle, qu'il est ainsi facile de construire. Remarquez cependant qu'il y a deux exceptions, savoir quand le numérateur de la valeur de  $r^2$  est nul ou négatif : dans le 1<sup>er</sup> cas, on a un point unique; dans le 2<sup>e</sup>, il n'y a pas de courbe.

On trouve par ex. que l'équ.  $2y^2 + 2x^2 - 4y - 4x + 1 = 0$  est celle d'un cercle dont le rayon est  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ , et le centre au point  $(1, 1)$ .

Lorsque les coordonnées sont obliques, on raisonne de même en partant de l'équ. (3) n° 377.

2<sup>e</sup> Cas. Courbes illimitées en tous sens, m positif.

455. Ici  $Ay^2 + Bxy + Cx^2$  est moindre qu'un carré.

1<sup>o</sup>. Quand les racines de l'équation (3) sont réelles,  $a = AE$ ,  $b = AE'$  (fig. 259) donnent, comme ci-dessus, les points  $D$  et  $D'$  d'intersection de la courbe et du diamètre  $BN$ , et les tangentes  $EF$ ,  $E'F'$ ; puis le radical prenant la forme.....  $\sqrt{m(x-a)(x-b)}$ , n'est réel qu'autant que  $x-a$  et  $x-b$  sont de même signe, c.-à-d. que  $x$  est  $>$  ou  $<$   $a$  et  $b$ ;  $x$  ne peut donc recevoir de valeurs entre  $a = AE$  et  $b = AE'$ , et la courbe s'étend à l'infini de part et d'autre des limites  $EF$ ,  $E'F'$ , ainsi, elle est une hyperbole.

Pour obtenir le diamètre conjugué de  $DD'$ , comme le centre  $C$  est au milieu de  $DD'$ , on fera  $x = AK = k$  sous le radical, on rendra le résultat réel (n° 429), et l'on aura ainsi  $b'$ . On tire ensuite la position des asymptotes (n° 435). Nous allons au reste donner bientôt (n° 457) un moyen plus facile de déterminer ces droites.

Soit par ex.,  $y^2 - 2xy - x^2 - 2y + 8x - 3 = 0$ ; on en tire  $y = x + 1 \pm \sqrt{2x^2 - 6x + 4}$ . On trace d'abord le diamètre  $BN$ , ( $y = x + 1$ );  $2x^2 - 6x + 4 = 0$  donne  $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ , et le radical devient  $\sqrt{2(x-1)(x-2)}$ ; on prend  $AK = \frac{3}{2}$ ,  $EK = E'K = \frac{1}{2}$ ; on a les limites  $EF$ ,  $E'F'$  tangentes en  $D$  et  $D'$ ; et comme  $x$  est  $> 2$  ou  $< 1$ , on obtient l'hyperbole  $MM'$ ,  $QQ'$  (fig. 259).



Pour trouver le diamètre conjugué de  $DD'$ , on fait  $x = AH = \frac{1}{2}$  dans  $\sqrt{(2x^2 - 6x + 4)}$ , et l'on rend réel ; on a  $b' = \sqrt{\frac{1}{2}}$ . En prenant  $D'F' = D'H = \sqrt{\frac{1}{2}}$ , on forme le parallélogramme inscrit, dont les diagonales  $GF'$ ,  $FH$  sont les asymptotes de notre courbe.

2°. Lorsque les facteurs de  $mx^2 + nx + p$  sont imaginaires, la courbe ne coupe pas son diamètre  $BN$  (fig. 263) : de plus, ce trinôme doit toujours conserver le même signe que  $+mx^2$ , quelque valeur qu'on attribue à  $x$  (n° 139, 9°.) ; donc chaque abscisse donne toujours des ordonnées réelles, la courbe s'étend à l'infini de part et d'autre, et elle est une hyperbole disposée comme on le voit fig. 263.

Quant aux diamètres conjugués, le centre est sur  $BN$  qui ne coupe pas la courbe ; or, si l'origine était au centre, les abscisses égales et de signe contraire (n° 425) répondraient à des ordonnées égales ; ainsi, le radical devrait être de la forme  $\sqrt{(mx'^2 + p)}$  ; si donc on veut transporter l'origine au centre, il faut faire  $x = x' + h$  ;  $h$  étant tel, que le 2° terme de  $mx^2 + nx + p$  disparaisse (n° 506) ;  $h$  est l'abscisse du centre ; on trouve  $h = -\frac{n}{2m}$ , la même valeur que ci-devant. Ainsi, on prend  $AK = h$ , l'ordonnée  $KC$  donne le centre  $C$  : faisant ensuite  $x = h$  dans  $\sqrt{(mx^2 + nx + p)}$ , il devient  $= DC = a'$ . Pour obtenir  $b'$ , il faut chercher les points de rencontre de  $BN$  avec la courbe ; en prenant la partie imaginaire des racines de  $mx^2 + nx + p = 0$ , et la rendant réelle, on a  $KO = KO'$  pour les abscisses des extrémités  $E, E'$ , du diamètre conjugué prises à partir de celle du centre.

Comme les parallèles  $FH, GI$  au diamètre  $BN$  sont tangentes à la courbe en  $D$  et  $D'$ , les ordonnées  $O'F, IH$  déterminent aussi le parallélogramme inscrit, et les asymptotes  $IF, GH$ .

Soit par exemple  $y^2 + 2xy - 2y - x = 0$ , on en tire  $y = -x + 1 \pm \sqrt{(x^2 - x + 1)}$ , le diamètre  $BN$  (fig. 263) a pour équat.  $y = -x + 1$ , comme  $x^2 - x + 1 = 0$  donne  $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ , la courbe ne coupe pas  $BN$ , de plus,



$x^2 - x + 1$  étant toujours positif,  $y$  est aussi toujours réel, ainsi, on a l'hyperbole de la figure 263.

Pour trouver les diamètres conjugués, on construit . . . . .  
 $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}$ ,  $AK = \frac{1}{2}$ ,  $KO = \frac{1}{2} \sqrt{3} = KO'$  donnent le centre  $C$ , et le 2<sup>e</sup> diamètre  $EE'$ ; de plus, en faisant  $x = \frac{1}{2}$  dans  $\sqrt{(x^2 - x + 1)}$ , on a  $a' = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ .

3°. Si les racines de l'équation (3) sont égales, le radical équivalent à  $\sqrt{m(x-a)^2}$ , et l'équation (1) devient . . . . .

$$y = ax + \beta \pm (x-a) \sqrt{m},$$

savoir  $y = x(a \pm \sqrt{m}) + \beta \mp a \sqrt{m};$

on a donc deux droites qui se coupent au point du diamètre pour lequel  $x = a$ , et qu'il est aisé de construire, puisqu'on a leurs équ., on obtient un 2<sup>e</sup> point de chacune, en posant  $x = 0$ , d'où  $y = \beta \pm a \sqrt{m}$ , c.-à-d. qu'il faut porter  $a \sqrt{m}$  sur l'axe des  $y$  au-dessus et au-dessous du point où cet axe coupe le diamètre. Les droites menées par ces points et par le 1<sup>er</sup>, qui leur est commun, sont celles dont il s'agit.

Il est clair qu'en transposant et carrant, on a

$$(y - ax - \beta)^2 - m(x-a)^2 = 0.$$

Ainsi, la proposée est décomposable en deux facteurs rationnels par rapport à  $x$  et  $y$ , et du premier degré, qu'on peut égaler à zéro indépendamment l'un de l'autre : c'est ce fait analytique qui explique l'existence de deux droites dans le cas présent.

Soit, par ex.,  $\{y^2 - 8xy + x^2 + 4y + 2x - 2 = 0;$  on trouve  $y = x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(3x^2 - 6x + 3)}$ , or,  $3x^2 - 6x + 3 = 0$  donne  $x = 1$ ; le diamètre (fig. 264)  $BN$ , ( $y = x - \frac{1}{2}$ ) est donc coupe en un seul point  $N$  pour lequel  $DA = 1$ ; et comme la proposée revient à  $y = x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} (x-1) \sqrt{3}$ , on a deux droites,  $x = 0$  donne  $y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}$ ; on prend  $BE = BF = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ , et l'on trace les lignes  $EN$ ,  $FN$ .

Soit proposée l'équ.  $y^2 - 2xy - 3x^2 - 4k^2 = 0$ , on en tire  $y = x \pm 2 \sqrt{(x^2 + k^2)}$ ;  $y = x$  donne le diamètre  $BN$  (fig. 265), et l'on voit qu'il n'est pas coupe par la courbe, et qu'on a l'hyperbole  $MO$   $MO'$ . Le centre est en  $C$ , on prend

$CO = CO' = 2k$ ;  $OO'$  est le 1<sup>er</sup> diamètre, puis  $CE = CE' = k$  donne le 2<sup>e</sup>,  $DD'$ , et les asymptotes  $HF$ ,  $IG$ . À mesure que  $k$  décroît, la courbe se rapprochera du centre et des asymptotes qui ne changeront pas;  $k = 0$  donne ces droites mêmes. Enfin, si  $k$  prend un signe contraire, l'hyperbole est  $GD'$ ,  $ID$  tracée dans l'autre angle entre les mêmes asymptotes, et s'en éloigne à mesure que  $k$  croît.

456. Quand  $A = 0$ , la proposée manque du terme en  $y^2$  et l'on ne peut plus opérer comme n<sup>o</sup> 453; mais si l'on change  $x$  en  $y$ , et  $y$  en  $x$ , ce qui ne produit qu'une inversion dans les axes, on pourra appliquer nos calculs; il suffira donc d'y changer  $C$  en  $A$ ,  $D$  en  $E$ :  $B^2 - 4AC$  se réduit à  $B^2$ ,  $m$  est positif, et l'on a encore une hyperbole. Au reste, pour discuter l'équ. privée du terme  $Ay^2$ , il est préférable de la résoudre par rapport à  $x$ , et d'opérer sur l'axe des  $x$  d'une manière analogue à ce qu'on a fait pour celui des  $y$ .

Par ex., pour l'équ.  $x^2 - 2xy + 2x - 3y + c = 0$  (fig. 266), on a  $x = y - 1 \pm \sqrt{y^2 + y - c + 1}$ ; la droite  $DD'$  ( $y = x + 1$ ) est diamètre, c.-à-d. coupe en deux parties égales toutes les cordes parallèles aux  $x$ . L'équation  $y^2 + y = c - 1$ , donne...  $y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{c - \frac{3}{4}}$ ; si donc  $c > \frac{3}{4}$ , on prendra  $AK = \frac{1}{2}$ ,  $KE = KE' = \sqrt{c - \frac{3}{4}}$ , et l'on aura en  $D$  et  $D'$  les points où l'hyperbole  $MD$ ,  $M'D'$  coupe le diamètre  $DD'$ . En faisant  $y = -\frac{1}{2}$  dans  $\sqrt{y^2 + y - c + 1}$ , et rendant réel, on a  $\sqrt{c - \frac{3}{4}}$  ce qui donne le conjugué de  $DD'$ , et les asymptotes  $F'G$  et  $FH$ , dont la seconde est parallèle aux  $y$ .

Si  $c = \frac{3}{4}$ , on a les asymptotes mêmes, et si  $c < \frac{3}{4}$ , on a encore une hyperbole entre les mêmes asymptotes, mais elle est tracée en  $HN$  et  $F'N'$  dans les deux autres angles.

457. Dans l'équ. générale (1) (p. 471), le radical affecte la quantité  $m\left(x^2 + \frac{nx}{m} + \frac{p}{m}\right)$ ; ajoutant et ôtant  $\frac{n^2}{4m}$ , pour compléter le carré (n<sup>o</sup> 138), on a

$$y = ax + \beta \pm \frac{1}{2\sqrt{m}} \sqrt{(2mx + n)^2 + 4mp - n^2};$$

Le radical est de la forme  $\sqrt{x' - l}$ ; en le développant par l'extraction (page 197), on verra, comme n° 416, qu'on a une suite de termes où  $z = 2mx + n$  est au dénominateur, et qui décroissent quand  $x$  croît, le seul 1<sup>er</sup> terme excepté. En négligeant donc  $l$ , on a les équ. des asymptotes de notre hyperbole

$$Y = \alpha x + \beta \pm \frac{2mx + n}{2\sqrt{m}} \dots (4);$$

Ainsi, après avoir résolu la proposée, complétez le carré sous le radical où vous négligerez les termes constans, et vous aurez les équations des asymptotes.

Il est facile de construire ces équ.; les droites se croisent au point  $\left(-\frac{n}{2m}, \beta - \frac{\alpha n}{2m}\right)$ , qui est le centre, et l'on a un 2<sup>e</sup> point, en faisant  $x = 0$ , ce qui donne les ordonnées à l'origine  $\beta \pm \frac{n}{2\sqrt{m}}$ ; on portera  $\frac{n}{2\sqrt{m}}$  sur l'axe des  $y$ , en dessus et en dessous du point de section de cet axe par le diamètre.

Dans le 1<sup>er</sup> ex., p. 475,  $y = x + 1 \pm \sqrt{2x^2 - 6x + 4}$ ; ajoutant et ôtant  $\frac{9}{2}$  sous le radical, il devient  $\sqrt{2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{2}}$ ; négligeant  $\frac{1}{2}$ , on a, pour équations des asymptotes (fig. 259),  $Y = x + 1 \pm (2x - 3)\sqrt{\frac{1}{2}}$ . Faisant  $x$  nul, on trouve  $Y = 1 \pm 3\sqrt{\frac{1}{2}}$ ; il faut porter  $3\sqrt{\frac{1}{2}}$  de  $B$  en  $i$  et  $i'$ ;  $Ci$  et  $Ci'$  sont les asymptotes.

Pour l'équ. page 477, on a  $y = x \pm 2\sqrt{x^2 + k^2}$ ; on néglige  $k^2$ , et il vient, pour équ. des asymptotes,  $Y = x \pm 2x$ .

La discussion de l'équ. devient très facile quand le terme en  $x^2$ , ou en  $y^2$  manque; par ex.  $Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$  donne, en résolvant, effectuant la division, et désignant par  $h, k, l$  des coefficients connus,

$$y = -\frac{Cx^2 + Ex + F}{Bx + D} = hx + k + \frac{l}{Bx + D}.$$

Or si l'on construit la droite  $FC$  (fig. 266) dont l'équ. est  $Bx + D = 0$ , cette ligne, parallèle aux  $y$ , est l'une des asymptotes de la courbe; car plus  $x$  décroît vers la limite  $-\frac{D}{B}$ , et plus

$y$  augmente, devenant infini à cette limite; ce qui montre que la courbe s'approche indéfiniment de la droite  $FC$ . D'un autre côté, en construisant la droite  $F'G$  qui a pour équ.  $y = kx + k$ , on voit que pour obtenir les points de la courbe qui répondent à une abscisse quelconque  $x$ , on a l'ordonnée en ajoutant à celle de la droite  $F'G$  la longueur  $\frac{l}{Bx + D}$ ; et comme plus  $x$  est grand, plus cette fraction est petite, devenant nulle pour  $x$  infini, il est clair que la courbe s'approche de plus en plus de la droite  $F'G$  qui est la 2<sup>e</sup> asymptote.

Lorsque c'est le terme en  $x^2$  qui manque, on résout l'équ. par rapport à  $x$ , et on trouve de même les deux asymptotes, dont l'une est parallèle aux  $x$ . Ainsi quand l'équ. de la courbe est privée du terme en  $x^2$  ou en  $y^2$ , l'une de ses asymptotes est parallèle à celui des axes coordonnés dont le carré manque. Cette théorie ne suppose pas que les coordonnées soient rectangulaires.

Soit l'équ.  $x^2 - 2xy + 2x - 3y + 1 = 0$ , on a (fig. 266)

$$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 3} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{2x + 3}$$

l'équ.  $2x + 3 = 0$  est construite en prenant  $AI = -\frac{3}{2}$ , et menant  $FH$  parallèle à  $Ay$ ; l'équ.  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ , appartient à la droite  $F'G$ ; ce sont les deux asymptotes. Le reste de la construction est facile (n<sup>o</sup> 421)

De même pour  $2y^2 + 3xy - 8y - 3x + 1 = 0$ ,

$$x = -\frac{2y^2 - 8y + 1}{3y - 3} = -\frac{2}{3}y + 2 + \frac{5}{3y - 3}$$

les droites  $GH$ ,  $FI$  (fig. 263), dont les équ. sont  $3y - 3 = 0$ ,  $x = -\frac{2}{3}y + 2$ , sont les asymptotes, la 1<sup>re</sup> parallèle aux  $x$

Si l'équ. est privée à la fois des deux termes en  $x$  et  $y$ ,  $xy + Dy + Ex + F = 0$ , on a

$$y = -\frac{Ex + F}{x + D} = -E + \frac{DE - F}{x + D}$$

les deux asymptotes sont parallèles aux axes, et ont pour équ.  $y = -E$ ,  $x = -D$ . On pourrait discuter l'équ. en transportant l'origine au centre, car l'hyperbole serait alors rapportée aux asymptotes prises pour axes (n° 425), l'équ. prenant la forme  $xy = m^2$ .

3<sup>e</sup> CAS *Courbes illimitées d'un seul côté,  $m = 0$*

458. Lorsque  $m = 0$ , ou  $B^2 - 4AC = 0$ , les trois 1<sup>ers</sup> termes de la proposée, ou  $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ , forment un carré (n° 138): le radical de l'équ. (1)<sup>p</sup> 471 se réduit à  $\sqrt{(nx+p)}$ . Après avoir tracé (fig. 248) le diamètre  $BN$   $y = ax + \beta$ , on trouve son point  $D$  d'intersection avec la courbe et sa tangente  $EF$ , en faisant  $nx + p = 0$ . Soit  $x = a =$  la racine  $AE$  de cette équ., le radical devient  $\sqrt{n(x-a)}$ , et n'est réel que quand  $n$  et  $x-a$  sont de même signe, donc  $x$  est  $> a$ , et la courbe est située comme  $M'DM$ , lorsque  $n$  est positif, si  $n$  est négatif,  $x$  est  $< a$ , et l'on a  $ODM$ . La courbe qui s'étend à l'infini d'un seul côté est donc *une parabole*.

On peut aisément en déduire le paramètre de ce diamètre, à l'aide d'un seul point de la courbe, et soumettre la courbe à une description rigoureuse (n° 438).

Soit l'équ.  $y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 - 2y - x + 5 = 0$ , on en tire  $y = \frac{1}{2}x + 1 \pm \sqrt{(2x-4)}$ ; on prend  $AE = 2$  (fig. 248,  $EF$  est limite,  $AB = 1$ ,  $DE = 2$ ; la courbe est située comme  $M'DM$ .

Pour  $y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 - 2y + 3x - 3 = 0$ , on obtient le même diamètre; et comme le radical est  $\sqrt{(-2x+4)}$ , on a la courbe  $ODM'$ .

Si  $m$  et  $n$  sont nuls à la fois, l'équ. devient  $y = ax + \beta \pm \sqrt{p}$ .

1<sup>er</sup>. Si  $p$  est positif, on a deux droites parallèles, qu'on trace en portant  $\sqrt{p}$  en  $BD$  et  $BD'$  sur l'axe des  $y$  (fig. 267), de part et d'autre du point  $B$  où le diamètre  $BN$  rencontre cet axe  $(y+x)' - 2y - 2x = 1$ , donne  $y = -x + 1 \pm \sqrt{2}$ ; on prend  $AB = AN = 1$ ,  $BN$  est le diamètre, puis .....  $BD = BD' = \sqrt{2} = BN$ , et l'on mène  $DE$ ,  $D'E'$  parallèles à  $BY$ .



2°. Si  $p$  est nul,  $y = ax + \beta$ , ou n'a qu'une droite : telle est l'équ.  $(y + x)^2 - 2y - 2x + 1 = 0$ , représentée par  $BN$  (fig. 267)

3°. Si  $p$  est négatif, l'imaginaire subsiste toujours, et il n'y a pas de ligne. Telle est l'équ.  $(y + x)^2 - 2y - 2x + 2 = 0$ .

En un mot,  $(y + x)^2 - 2y - 2x + 1 = k$  donne.....  
 $y = -x + 1 \pm \sqrt{k}$ , on prend  $AB = AN = 1$ , et l'on trace  $BN$ , puis  $BD = D'B = \sqrt{k}$ . Or, plus  $k$  diminue, plus les parallèles se rapprochent du diamètre  $BN$ , avec lequel elles se confondent enfin lorsque  $k = 0$ , si  $k$  est négatif, l'équ. ne représente plus rien.

Quelque point  $G$  qu'on prenne sur  $BN$  (fig. 267), il doit couper au milieu la partie  $IM$  d'une droite quelconque,  $BN$  est le lieu d'une infinité de centres (n° 425).

Quand  $m$  et  $n$  sont nuls ensemble, la proposée revient à  $(y - ax - \beta)^2 - p = 0$ . 1°. quand  $p$  est positif, elle est le produit de  $y - ax - \beta + \sqrt{p}$  par  $y - ax - \beta - \sqrt{p}$ , ou  $x$  a même coefficient, ou y satisfait donc en égalant à zéro l'un indépendamment de l'autre, 2°. si  $p$  est nul, la proposée est le carré de  $y - ax - \beta$ , nos deux facteurs sont égaux, 3°. enfin, si  $p$  est négatif, on veut rendre nulle la somme de deux quantités positives, dont l'une  $+p$  ne peut être zéro, et l'équ. est absurde. Telles sont les causes qui expliquent l'existence de nos trois cas particuliers.

459. Il résulte de toute cette analyse que,

I. Si  $m$ , ou  $B^2 - 4AC$ , est négatif,  $Ay^2 + Bxy + Cx^2$  est plus grand qu'un carré,  $C$  doit être positif, la courbe est fermée; elle est une ellipse, ou un cercle, ou un point, ou rien

II Si  $m$ , ou  $B^2 - 4AC$ , est positif,  $Ay^2 + Bxy + Cx^2$  est moindre qu'un carré; la courbe est formée de deux parties illimitées; elle est une hyperbole, ou deux droites qui se croisent. On est dans ce cas, si  $C$  est négatif, ou s'il manque  $x^2$  ou  $y^2$ ,  $xy$  restant.

III. Si  $m$ , ou  $B^2 - 4AC = 0$ ,  $Ay^2 + Bxy + Cx^2$  est un carré, la courbe s'étend à l'infini d'un seul côté, elle est une parabole, une droite, deux parallèles ou rien : quand  $xy$

manque, avec un des carrés  $x^2$  ou  $y^2$ , on tombe dans ce cas.

460. On peut composer à volonté une équ. du 2<sup>e</sup> degré, qui rentre dans celle qu'on voudra de ces circonstances. Il suffira de recourir à l'équ. (1) p. 471, et d'y déterminer arbitrairement les constantes  $\alpha, \beta, m, \dots$  ayant soin de composer le radical de sorte qu'il satisfasse aux conditions requises, ainsi  $m$  sera négatif pour une ellipse, et  $mx^2 + nx + p = 0$  aura ses racines réelles :  $m$  sera positif pour une hyperbole, et suivant que l'équ. précédente a ses racines réelles ou imaginaires, cette courbe coupera ou ne coupera pas son diamètre, etc. On peut enfin se donner des conditions qui déterminent toutes les constantes  $\alpha, \beta, \dots$ . Voici un ex. de ce calcul.

L'hyperbole ponctuée (fig. 265) a l'origine  $C$  au centre, le diamètre  $BN$  fait avec les  $x$  un angle de  $45^\circ$ ,  $CE = 1$  donne  $GH$  tangente et limite de la courbe, enfin, le diamètre conjugué est  $CO = \sqrt{2}$  : trouver l'équ. de cette hyperbole? Elle est visiblement  $y = x \pm \sqrt{m(x^2 - 1)}$ , et il reste à déterminer  $m$ . Mais  $x = 0$  donne le radical imaginaire, et changeant le  $-$  en  $+$ , il faut qu'il soit  $\sqrt{2}$ ; donc  $\sqrt{m} = \sqrt{2}$ , et ....  $y^2 - 2xy - x^2 = -2$  est l'équ. demandée.

Si l'on veut que l'équ. soit celle d'un point, une ou deux droites, ou rien, on peut opérer de même, mais il est plus simple de se conduire comme il suit.

$L$  et  $M$  étant de la forme  $ky + lx + g$ , on a

1<sup>o</sup>. Pour un point,  $L^2 + M^2 = 0$  (p. 473);

2<sup>o</sup>. Pour une droite,  $L^2 = 0$  (p. 482).

3<sup>o</sup>. Pour deux droites,  $LM = 0$  (p. 477); et si l'on veut que ces lignes soient parallèles, le rapport des constantes  $k$  et  $l$  doit être le même dans  $L$  et  $M$  (p. 481).

4<sup>o</sup>. Pour que l'équation ne représente rien,  $N$  doit être un nombre positif quelconque dans  $L^2 + M^2 + N = 0$  (p. 474).

461. Après avoir discuté l'équ. (1), les coordonnées étant rectangulaires, on peut se proposer de la construire exactement, sans recourir à la théorie (n<sup>o</sup> 439), mais en rapportant la courbe à un système de diamètres. Prenons pour axes des  $x'$  une paral-

lèle au diamètre  $y = ax + \beta$ , sans changer l'origine, ni l'axe des  $y$ . Comme  $\tan (xx') = a$ , on a  $\cos (xx') = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = k$ ,  $\sin (xx') = ak$ ,  $(xy') = 90^\circ$ , et les équ.  $B$  (n° 383) deviennent  $x = kx'$ ,  $y = akx' + y'$ , la transformée de (1) est

$$y' = \beta \pm \sqrt{mk^2x'^2 + nkx' + p}.$$

1°. Si la courbe a un centre, portons-y l'origine, et l'équ. étant ainsi rapportée à des diamètres conjugués, recevra la forme (n° 427)  $y = \sqrt{Q + Cx^2}$  : il suffit donc de chasser les termes  $\beta$  et  $nkx'$ . Posons  $y' = y'' + \beta$ ,  $x' = x'' - \frac{n}{2km}$  ; ces 2<sup>es</sup> termes sont les  $x'$  et  $y'$  du centre, et l'on trouve

$$y''^2 - mk^2x''^2 = p - \frac{n^2}{4m}.$$

Telle est l'équ. de la courbe proposée, réduite à ses diamètres conjugués. Rien n'est donc plus facile que de construire cette ligne (n° 431, 2°.).

Pour l'équation  $y = x + 1 \pm \sqrt{-2x' + 6x - 4}$ , on a  $a = 1$ ,  $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $m = -2 \dots$ , et l'on obtient, pour transformée  $y''^2 + x''^2 = \frac{1}{2}$  ; ainsi, après avoir tracé le diamètre  $BN$ ,  $y = x + 1$  (fig. 258), porte l'origine au centre  $C$ , comme on l'a vu (n° 454), il restera à décrire une ellipse, dont les demi-diamètres  $CO$ ,  $CD$ , sont égaux à  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ .

2°. S'il n'y a pas de centre,  $m = 0$ , et le radical devient  $\sqrt{nkx' + p}$  : chassant les termes constans  $\beta$  et  $p$ , l'origine sera portée au point où la courbe est coupée par son diamètre ; savoir,

$$y' = y'' + \beta, \quad x' = x'' - \frac{p}{nk}; \quad \text{d'où } y''^2 = nkx''.$$

Après avoir décrit le diamètre  $y = ax + \beta$ , l'origine sera prise au point où il coupe la parabole, l'axe des  $y''$  étant parallèle aux  $y$ , et l'axe des  $x''$  le diamètre, la courbe sera facile à tracer (n° 438).

Pour  $y = \frac{1}{2}x + 1 \pm \sqrt{2x - 4}$ , on a (fig. 248)  $a = \frac{1}{2}$ ,  $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ,  $DN$  et  $DF$  étant les axes, on a l'équ.  $y''^2 = 4x'' \sqrt{\frac{1}{2}}$ , qui est celle de la parabole  $MDM'$ , et comme p. 481, on a  $AB = 1$ ,  $AE = DE = 2$ .

## V. PROBLÈMES D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE.

*De la Génération des Courbes.*

462. I. Quelle est la courbe qui résulte de l'intersection continue de deux droites  $AM$ ,  $BM$  (fig. 268) qui tournent autour de  $A$  et  $B$ , et sont toujours à angle droit en  $M$ ? Prenons les *Génératrices* dans une de leurs positions  $AM$ ,  $MB$  : l'origine étant au milieu  $C$  de  $AB$ , et  $AC = r$ ; les lignes  $AM$  et  $MB$  qui passent, l'une en  $A(-r, 0)$ , et l'autre en  $B(r, 0)$ , ont pour équ.

$$y = a(x + r), \quad y = a'(x - r) \dots \dots (1),$$

de plus on a  $aa' + 1 = 0$ .  $\dots \dots \dots (2)$ ,

puisque ces droites sont perpend. : les valeurs de  $a$  et  $a'$ , qui ne satisfont pas à cette condition, répondent à des droites  $AN$  et  $BN$ , qui ne sont pas génératrices. Si l'on met  $-\frac{1}{a}$  pour  $a'$ , les équ. (1), qui sont celles de toutes les droites passant en  $A$  et  $B$ , appartiendront à deux génératrices, dont les directions dépendront de la valeur de  $a$  qu'on voudra prendre : la coexistence de ces équ. fera que  $x$  et  $y$  seront les coordonnées  $CP$ ,  $PM$ , du point de section de ces droites. En éliminant  $a$  de ces équations,  $x$  et  $y$  seront donc les coordonnées du point d'intersection de deux génératrices quelconques, puisqu'elles ne sont distinguées entre elles que par  $a$ , qui n'y entrera plus.

Ainsi, l'élimination de  $a$  et  $a'$  entre les équ. 1 et 2, donne l'équ. de la courbe cherchée  $a = \frac{y}{x+r}$ ,  $a' = \frac{y}{x-r}$  changeant (2) en  $y^2 + x^2 = r^2$  : on a un cercle dont le diamètre est  $AB$ .

II Si les deux génératrices  $AM$ ,  $MB$  (fig. 269) étaient assujetties à former un angle donné  $AMB$ , dont la tangente fût  $t$ , l'équation 2) serait remplacée par  $t = \frac{a' - a}{1 + aa'}$  : on aurait

$(x^2 + y^2 - r^2)z = 2xy$  En discutant (n° 450) cette équ., où  $AC = CB = r$ , on verra que la courbe est un cercle dont le rayon est  $OB = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{t^2}}$ ,  $CO = \frac{r}{t}$  donne le centre  $O$ .

En général, au lieu de supposer la courbe décrite par un point qui se meut d'une manière déterminée, on peut la considérer comme engendrée par l'intersection continuelle de deux lignes (droites ou courbes) données, mais variables dans leurs positions ou leurs formes, suivant une loi connue. On prendra ces génératrices dans l'une des positions convenables, et l'on aura leurs équ., telles que  $M = 0$ ,  $N = 0$  : de plus, le changement que ces deux lignes éprouvent tient à celui de deux constantes qui y entrent, mais sont assujetties, dans leurs variations, à une condition donnée  $P = 0$ . En faisant de nouveau le raisonnement ci-dessus, on prouvera que, si l'on élimine ces deux constantes entre ces trois équ., on aura pour résultat l'équ. de la courbe engendrée.

S'il y avait trois constantes variables, outre  $P = 0$ , on devrait avoir une autre équation de condition  $Q = 0$ , il faudrait éliminer ces trois constantes entre les quatre équ.  $M = 0$ ,  $N = 0$ ,  $P = 0$ ,  $Q = 0$ . Et ainsi de suite . . . , de manière à avoir toujours une équ. de plus qu'il n'y a de quantités à éliminer.

S'il y avait moins d'équ. qu'il n'en faut, l'équ. finale serait encore celle de la courbe cherchée; mais il y aurait un ou plusieurs *paramètres* variables : le problème serait indéterminé, et l'on y satisferait par une série de courbes. Lorsqu'il y a autant d'équ. que de constantes, il en résulte des valeurs de  $x$  et  $y$  en nombre fini — on n'a plus que divers points; et s'il y a plus d'équ. encore, le problème est absurde. Tout ceci sera éclairci par des exemples.

III. Étant données les droites  $DN$ ,  $Dx$  (fig. 270) et un point fixe  $A$  sur l'une, cherchons la courbe dont chaque point  $M$  est tel, que la distance  $MA$  est égale à la perpend.  $PN$  sur  $Dx$ . Concevons cette courbe comme engendrée par l'intersection continuelle d'une droite mobile  $PN$ , perpend. à  $Dx$ , par un cercle  $KL$ , dont le centre est fixe en  $A$ ; le rayon et la droite variant



d'ailleurs, de sorte que la condition donnée  $AM = PN$  soit toujours remplie.

L'origine étant en  $A$ ,  $AM = x$ ,  $AP = \beta$ ,  $AD = p$ ,  $t = \tan NDA$ ; les équ. du cercle  $LK$  et de la droite  $PN$  sont

$$x^2 + y^2 = x^2, \quad x = \beta, \dots (1).$$

L'équation de la droite  $DN$ , qui passe en  $D (-p, 0)$ , est  $y = t(x + p)$ ; l'équation de condition  $MA = NP$  devient  $x = t(\beta + p)$ . Lorsque l'on fait varier la droite et le cercle,  $x$  et  $\beta$  changent seuls; il faut donc les éliminer à l'aide des équ. (1), ce qui donne

$$y^2 + x^2(1 - t^2) - 2tpx - t^2p^2 = 0.$$

1°. Si  $t = 1$ , l'angle donné  $E'DA = 45^\circ$ , et l'équ. devient  $y^2 = 2px + p^2$ , qui est celle d'une *parabole*  $F'S$ , dont l'origine est au foyer  $A$ , le sommet en  $S$ ,  $2AS = AE' = p$ .

2°. Si  $t < 1$ , l'angle  $NDA$  est  $< 45^\circ$ , on a une *ellipse* dont le centre  $C$  et les axes  $a$  et  $b$  sont tels, que

$$AB = \frac{pt^2}{1 - t^2}, \quad a = \frac{pt}{1 - t^2}, \quad b = \frac{pt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Si  $DN$  est parallèle à  $DA$ , on a un *cercle* — ce qui résulte aussi de ce que, par la génération,  $PN$  est constant.

3°. Enfin, si  $t > 1$ , ou  $E'DA$ , change en  $IDA$ ,  $> 45^\circ$ , on a une *hyperbole*.

Cette propriété pourrait donner un moyen facile de tracer nos trois courbes; elles touchent toutes la droite donnée  $DE$ ,  $DE'$ , ... en son point de section avec  $AE'$  (n° 424).

IV. Imaginons que la ligne  $AB$  (fig. 771) d'une longueur donnée se meuve dans l'angle  $B'CA$ , de manière que ses extrémités  $A$  et  $B$  restent toujours sur les côtés de cet angle: trouver la courbe décrite par un point  $M$  donné sur cette ligne  $AB$ ? Soient  $b = AM$ ,  $a = MB$ ,  $AC$ ,  $CB$  les axes coordonnés quelconques, et  $c$  le cosinus de l'angle  $ACB$  qu'ils forment entre eux, la courbe peut être considérée comme produite par la section continue des deux droites mobiles  $AB$ ,  $PM$ , dont les

equ. sont  $y = az + \beta$ ,  $x = \gamma$ , d'où  $PM = a\gamma + \beta$ ,  $CP = \gamma$ . Il s'agit de trouver l'equ. de condition entre  $a$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Or, le triangle  $PMB$  donne (D. n° 355), en faisant  $PB = z$ ,  $a' = z' + PM' - 2cz.PM$ , d'ailleurs les parallèles  $AC$ ,  $PM$  donnent  $bz = a \times CP$  : donc on a

$$bz = a\gamma, \quad a' = z' + (a\gamma + \beta)' - 2cz(a\gamma + \beta.)$$

Il reste à éliminer  $z$ ,  $a$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Mettons  $y$  pour  $a\gamma + \beta$ , nous aurons  $bz = ax$ ,  $a' = z' + y' - 2cyz$ , enfin, chassant  $z$ ,  $a'b' = b'y' + a'x' - 2abcxy$  est l'equ. demandée, qui appartient à une ellipse (n° 454) dont  $C$  est le centre

Lorsque l'angle  $ACB$  est droit, tout le calcul se simplifie beaucoup on a l'equ  $b'y' + a'x' = a'b'$ , qui est celle de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes  $2a$ ,  $2b$ . Il en résulte un nouveau moyen très facile de tracer une ellipse. Après avoir décrit deux lignes indéfinies  $Cy$ ,  $Cx$ , à angle droit, on portera, sur une règle  $M'B$ , des parties égales aux demi-axes  $AM = b$ ,  $BM = a$ , puis on présentera cette règle sur l'angle droit  $yCx$ , de manière que les points  $A$  et  $B$  soient sur les côtes de cet angle. Dans cette position, et toutes celles de même nature, le point  $M$  sera l'un de ceux de l'ellipse; on marquera ces divers points, et l'on tracera la courbe qui les joint.

Si le point décrivant est situé en  $M'$  sur le prolongement de  $AB$ , la même analyse conduit au même résultat, au signe près du terme  $-2abcxy$ . Ainsi, en prenant  $BM' = a$ ,  $AM' = b$ ,  $AB$  est la différence des demi-axes, au lieu d'en être la somme, et la construction demeure la même.

V. Si, du foyer  $F$  d'une ellipse (fig. 238), on abaisse une perpendic. sur chaque tangente, quelle est la courbe qui passe par tous les points  $I$  de rencontre de ces tangentes et de leurs perpendiculaires?  $a'yy' + b'xx' = a'b'$  est l'equ. de la tangente au point  $(x, y')$  (n° 408). La droite, qui passe par le foyer  $(-a, 0)$ , a pour équ.  $y = \beta(x + a)$ , pour qu'elle soit perpendic. à la tangente, il faut (n° 370) que  $\beta$  satisfasse à l'équation  $b'x'\beta - a'y' = 0$  : les équ. des generatrices sont donc

$$a'yy' + b'xx' = a'b', \quad b'x'y = a'y'(x + a).$$

Lorsque le point de tangence varie, ces lignes changent de position avec  $x'$  et  $y'$ , l'equ. de condition est celle qui exprime que ce point est sur l'ellipse,  $a'y'^2 + b'x'^2 = a'b'$ . Il reste à éliminer  $x'$  et  $y'$  entre nos trois equ. On tire des 1<sup>re</sup>  $x'$  et  $y'$ , et l'on substitue dans la 3<sup>e</sup>, on trouve

$$b'y^2 + a'(x+a)^2 = [y^2 + x(x+a)]^2.$$

En développant, on a

$$y^4 + y^2 [2x(x+a) - b^2] + (x+a)^2 (x^2 - a^2) = 0;$$

or,  $-b^2 = a' - a'$  (n° 386) : le second terme devient donc  $y^2 [(x+a)^2 + x^2 - a^2]$ ; de sorte qu'en réunissant les termes affectés de  $x^2 - a^2$ , on a

$$(y^2 + x^2 - a^2) [y^2 + (x+a)^2] = 0.$$

Le second facteur est visiblement étranger à la question, puisqu'il donne le foyer; l'autre donne le *cercle circonscrit à l'ellipse*; c'est la courbe cherchée.

1<sup>o</sup>.  $b$  n'entrant pas ici, le cercle inscrit dans l'hyperbole résout la question proposée pour cette courbe (n° 397).

2<sup>o</sup>. Ce cercle est commun à toutes les ellipses décrites sur le grand axe, et même au cercle qui se reproduit ainsi lui-même.

3<sup>o</sup>. Comme  $y^2 + x^2 = a^2$  est indépendant de  $a$ , on trouve le même cercle en opérant sur l'un et l'autre foyer.

VI. Pour résoudre le même problème pour la parabole (fig. 234), on verra aisément qu'il faut éliminer  $x'$  et  $y'$  entre

$$xy = p(x+x'), \quad py = -y'(x-p), \quad y'^2 = 2px'.$$

Il vient  $0 = (-2xy^2 + 2x^2 - px)(p - 2x)$ , ou en réduisant,  $x [4y^2 + (2x-p)^2] = 0$ . Le 2<sup>e</sup> facteur donne le foyer; il faut le supprimer: le 1<sup>er</sup>,  $x=0$ , donne l'axe des  $y$ ; c'est le lieu des pieds des perpend. (i, fig. 234, p. 426).

VII. La parabole  $NAK$  (fig. 272) étant donnée, trouver le lieu de tous les points  $M$ , tels qu'en menant les deux tangentes  $NM$  et  $AM$ , l'angle qu'elles formeront soit toujours égal à un angle donné  $M$ .

Les tang. à la parabole aux points  $(x', y')$ ,  $(x'', y'')$ , ont pour équ. (n° 404) fig. 272,

$$yy' = p(x + x'), \quad yy'' = p(x + x'').$$

L'angle  $KMN$ , que forment entre elles ces droites (n° 370),

a pour tang,  $t = \frac{p(y'' - y')}{y'y'' + p^2}$ . Lorsqu'on change les points  $K$  et  $N$

de contact, cet angle doit rester le même,  $t$  est constant, mais  $x', y', x'', y''$ , varient; il faut les éliminer, et l'on a pour cela, outre les trois équations précédentes,  $y'^2 = 2px', y''^2 = 2px''$ .  $x'$  et  $x''$  tirées de celles-ci, changent les deux premières en

$$y'^2 - 2yy' + 2px = 0, \quad y''^2 - 2yy'' + 2px = 0$$

Ainsi, des deux racines de la 1<sup>re</sup> de ces équ., l'une est  $y'$ , et

l'autre  $y''$ , donc  $y'y'' = 2px$ , d'où  $t = \frac{y'' - y'}{2x + p}$ ; de plus, ,

$y' = y \pm \sqrt{y^2 - 2px}$  donne  $y'' - y' = 2$  fois le radical; ainsi, l'équ. cherchée est

$$y' - t^2x' - px(2 + t^2) - \frac{1}{2}t^2p^2 = 0$$

c'est celle d'une hyperbole; et comme  $t$  a'entre qu'au carré, l'une des branches est décrite par le sommet  $M'$  de l'angle obtus  $K'M'N$ , et l'autre par celui  $M$  de son supplément  $NMA$ . On trouvera aisément le centre  $C$  et les axes de la courbe.

Si l'angle donné  $M$  était droit, ou  $t = \infty$ , on aurait (n° 398)  $2x + p = 0$ ; en sorte que si de chaque point de la directrice on mène deux tangentes à la parabole, elles font toujours entre elles un angle droit.

VIII. Il arrive souvent que l'équ. même de la courbe est donnée, ou presque exprimée dans sa définition, plutôt que par sa génération: ceci mérite à peine de nous arrêter. En voici un exemple: Quelle est la courbe dont chaque ordonnée est la moyenne proportionnelle entre celles de deux droites données, correspondant à la même abscisse? Il est clair que  $y = ax + b$ ,  $y' = a'x + b'$  étant les équ. des droites données, celle de la courbe est

$$y^2 = (ax + b)(a'x + b'), \quad \text{ou} \quad y^2 - aa'x^2 - x(a'b + ab') = bb'.$$



1°. Si l'une des droites est parallèle aux  $x$ ,  $a' = 0$  donne  $y' = ab'x + bb'$ , qui appartient à une parabole qu'on décrit aisément. Quand  $a = 0$ ,  $y' = bb'$  donne deux droites parallèles, une droite ou rien, suivant les grandeurs et les signes de  $b$  et  $b'$ . Lorsqu'on fait abstraction du signe des ordonnées des droites, outre notre parabole, on en a encore une deuxième égale et opposée, et qui a même sommet.

2°. Si  $a$  et  $a'$  sont de signes contraires, on a une ellipse ; lorsque  $aa' = -1$ , les lignes données sont perpend., et l'on a un cercle (on a aussi un point, ou rien)

3°. Enfin, si  $a$  et  $a'$  sont de même signe, on a une hyperbole : quand  $a = a'$ , l'une des asymptotes est parallèle aux droites données, d'où l'on peut conclure l'autre (n° 450 et 457). On peut aussi avoir deux droites qui se croisent.

Dans ces deux derniers cas, en faisant abstraction des signes des ordonnées, on a à la fois l'ellipse et l'hyperbole décrites sur les mêmes axes, comme fig. 247

On pourrait varier beaucoup ces problèmes. M. Puissant en a mis plusieurs dans son *Recueil de diverses propositions de Géométrie*. En voici quelques autres :

IX. Deux angles de  $45^\circ$ ,  $BAC$ ,  $BDC$  (fig. 272) étant donnés de position, les faire tourner autour de leurs sommets fixes  $A$  et  $D$ , de sorte que deux côtes  $AB$ ,  $BD$  se coupent toujours sur  $BE$  parallèle à  $AD$ . Quelle est la courbe décrite par le point  $C$  d'intersection des deux autres côtes  $AC$ ,  $DC$ ?

On peut prendre les angles mobiles quelconques, ainsi que la droite  $BE$ .

X. Soit un point  $M$  (fig. 274) tel, que ses distances  $AM$ ,  $BM$ , à deux points fixes  $A$  et  $B$ , soient entre elles dans un rapport donné ; quelle est la courbe dont tous les points jouissent de cette propriété?

En quel lieu de cette courbe  $AM$  sera-t-elle tangente? Comment déterminer le point  $M$ , tels que les distances  $MA$ ,  $MB$ ,  $MD$  à trois points fixes  $A$ ,  $B$  et  $D$  aient entre elles des rapports connus?



XI. Un cercle et une droite étant données, trouver le lieu de tous les centres des cercles tangens à l'un et à l'autre.

Le même problème pour deux cercles donnés.

XII. Les côtés d'un angle droit glissent sur une ellipse ou une hyperbole, à laquelle ils demeurent sans cesse tangens; quelle est la courbe décrite par le sommet (fig. 272) ?

On peut prendre aussi l'angle quelconque, comme au problème VII.

XIII. Deux droites  $AF$ ,  $CD$  (fig. 220) tournent autour des extrémités  $A$  et  $C$  de la base d'un triangle donné  $ABC$ ; trouver le lieu  $BE$  de tous leurs points  $G$  d'intersection, en supposant que  $D$  et  $F$  sont, dans leur mouvement, à la même distance de la base (Voy. n° 376, VIII.)

### *Problèmes qui passent le second degré.*

463. Nous avons construit, page 350, les racines des équ. du 2<sup>e</sup> degré. L'exemple suivant montre ce qu'il faut faire lorsqu'on est conduit par la résolution d'un problème déterminé à une équ. où l'inconnue est élevée au-delà du 2<sup>e</sup> degré. Soit

$$x^4 - pqx^2 + p^2rx + p^2m = 0.$$

Si l'on fait  $x^2 = py$ , on a  $y^2 - qy + rx + m = 0$ , la proposée provenant de l'élimination de  $y$  entre celles-ci, si l'on construit les sections coniques qui s'y rapportent, les abscisses des points d'intersection seront les racines cherchées : ce sont ici deux paraboles. La proposée aura ses quatre racines réelles, quand les deux courbes se couperont en quatre points. il n'y aura que deux points d'intersection s'il n'y a que deux racines réelles : elles seront toutes quatre imaginaires, s'il n'y a aucun point commun entre les courbes. Au cas qu'il y eût quelques racines égales, les deux courbes se toucheraient, etc.

Mais comme l'une des deux courbes est arbitraire, il convient toujours de préférer le cercle comme plus aisé à décrire. Après avoir tracé les deux axes rectangulaires  $Ax$ ,  $Ay$  (fig. 275), on décrira l'hyperbole  $xy = pm$  entre ses asymptotes, éliminant

$pm$ , la proposée devient l'équ. d'un cercle facile à décrire,

$$x^2 + y^2 + \frac{pry}{m} = pq.$$

Prenez  $AC = \frac{pr}{2m}$ ; du centre  $C$ , avec le rayon  $\sqrt{pq + \frac{p^2r^2}{4m^2}}$ ,

tracez un cercle; l'hyperbole sera coupée en des points  $M, M', N, N'$ , dont les abscisses  $AP, AP', AQ, AQ'$ , seront les 4 racines  $x$  cherchées, deux sont positives dans la fig., les deux autres négatives. Il pourrait n'y avoir aucun point d'intersection, ou seulement deux.

De même, pour  $x^4 - p^2x^2 + p^2qx + p^2r = 0$ , on prendra  $x^2 = py$ ; d'où  $y^2 - py + qx + pr = 0$ ; ajoutant  $x^2 - py = 0$ , il vient

$$y^2 + x^2 - 2py + qx + pr = 0, \quad x^2 = py,$$

équ. d'un cercle et d'une parabole faciles à décrire.

Pour  $x^4 \pm a^2x - a^2q = 0$ , multipliez par  $x$ , faites  $x^2 = ay$ ; d'où  $y^2 \pm ay - qx = 0$ ; ajoutez la précédente, il vient

$$y^2 + x^2 = qx, \quad \text{ou} \quad y^2 + x^2 = 2ay + qx,$$

suitant que la proposée contient  $+a^2$  ou  $-a^2$ . On construit le cercle que cette équ. représente; les abscisses des points communs avec la parabole,  $x^2 = ay$ , sont les racines cherchées;  $x = 0$  répond à la racine introduite.

Pour  $x^4 - 3a^2x = 2a^3$ , le même calcul donne

$$x^2 = ay, \quad y^2 + x^2 = 4ay + 2ax.$$

Soit décrite la parabole  $MA$  (fig. 276) dont le paramètre est  $a$ , et le cercle  $CAM$ , dont le centre est  $C(a, 2a)$ , et le rayon  $AC = a\sqrt{5}$ , le point  $M$  d'intersection a pour abscisse  $x = AP$ ; c'est la seule racine réelle.

On peut, par cette construction, obtenir la valeur de  $\sqrt[3]{a}$ .

Étant données deux droites  $a$  et  $b$ , trouver entre elles deux moyennes proportionnelles  $x$  et  $y$ ,  $\div a : x : y : b$ . Puisque  $x^2 = ay$ ,  $y^2 = bx$ , en construisant deux paraboles, dont  $a$  et  $b$  soient les paramètres, qui aient l'origine pour sommet com

mun, et dont les axes respectifs soient ceux des  $y$  et des  $x$ , on aura, pour abscisse  $x$  et l'ordonnée  $y$  de leur point commun, les lignes demandées.

Mais les constructions sont plus simples en employant le cercle au lieu de l'une des deux paraboles. Ajoutons nos équ., il vient  $x^2 + y^2 - ay - bx = 0$ , et l'on retombe sur la fig. 276, où  $BC = \frac{1}{2}a$ ,  $AB = \frac{1}{2}b$ .

Lorsque  $b = 2a$ , on a  $x^3 = 2a^3$ ; ce qui résout le célèbre problème de la duplication du cube. Si l'on fait  $b = \frac{m}{n}a$ , comme on a  $x^3 = \frac{m}{n}a^3$ : on peut donc aussi former un cube  $x^3$ , qui soit à un cube donné  $a^3$ , ::  $m : n$ .

En général, ces constructions peuvent être variées de bien des manières; car, puisqu'elles dependent de deux courbes dont on a les équ., en multipliant ces équ. par des indéterminées et les ajoutant; on obtient différentes courbes propres à la résolution du problème.

464. Au reste, il peut arriver qu'une question proposée comme déterminée ne le soit pas (voy. n° 376, II), ou même qu'on puisse en faciliter la solution, lorsqu'elle est déterminée, en la faisant dépendre d'une autre question qui ne le soit pas. L'analyse indique d'elle-même ces modifications, c'est ce qui va être éclairci par les questions suivantes.

I. Étant données deux points  $A$  et  $B$  (fig. 277), trouver un 3<sup>e</sup> point  $M$ , tel, qu'en menant  $AM$  et  $MB$ , l'angle  $MAB$  soit la moitié de  $MBA$ . Faisons  $AB = m$ ; les équ. de  $AM$ ,  $MB$  sont  $y = ax$ ,  $y = -a'(x - m)$ , l'origine étant en  $A$ : or,  $a$  et  $a'$  sont des tang. d'angles doubles l'un de l'autre; donc...  $a' = \frac{2a}{1 - a^2}$  (L, 359). Éliminons  $a$  et  $a'$  entre ces trois équ., et faisons abstraction de  $y = 0$ , qui n'apprend rien; il vient

$$y^2 - 3x^2 + 2mx = 0.$$

On voit que la question est indéterminée, et qu'on y satisfait en prenant pour  $M$  chaque point de l'hyperbole que nous allons

construire. Faisons  $AC = CD = \frac{1}{3}m = \frac{1}{3}AB$ ;  $C$  sera le centre,  $A$  et  $D$  les sommets, les asymptotes  $CG$ ,  $CH$ , sont avec  $AB$  un angle égal aux deux tiers d'un droit,  $\sqrt{3}$  en étant la tangente (n° 352); cette courbe  $MD$  sera celle dont il s'agit.

Si l'on veut partager un arc de cercle  $AEB$ , ou un angle  $AKB$ , en trois parties égales, on prendra le tiers  $AC$  de sa corde  $AB$ , construisant l'hyperbole ci-dessus, l'intersection avec l'arc donnera (n° 212) le tiers  $EB$  de l'arc, ou le tiers  $EKB$  de l'angle.

Pour résoudre le problème de la trisection de l'angle, nous l'avons d'abord présenté sous une forme indéterminée, et même plus générale, puisque nous aurions pu de même trouver le point d'un arc d'ellipse  $AEB$ , ou de toute autre courbe, qui remplit une condition analogue

II. Mener une droite  $DD'$ ,  $y = ax + b$  (fig. 278), de manière que la somme des perpend.  $MD$ ,  $M'D'$ , abaissées de deux points données  $M$  et  $M'$ , soit égale à une longueur connue  $= m$ . Il s'agit de déterminer  $a$  et  $b$  par la condition  $MD + M'D' = m$ .

La distance du point  $M(x', y')$  à cette ligne (n° 374) est  $\frac{ax' - y' + b}{\sqrt{1+a^2}}$ , en raisonnant de même pour  $M'(x'', y'')$ , on a

$$(ax' - y' + b) + (ax'' - y'' + b) = m\sqrt{1+a^2} \dots \dots \dots (1).$$

Cette équ. ne pouvant faire connaître que  $a$  ou  $b$ , le problème est indéterminé : si l'on met  $y = ax$  pour  $b$  dans (1), on a

$$y = \frac{1}{2}(y' + y'') = a[x = \frac{1}{2}(x' + x'')] + \frac{1}{2}m\sqrt{1+a^2};$$

c'est l'équ. de la droite cherchée. Transportons l'origine au milieu de  $MM'$ , en  $C[\frac{1}{2}(x' + x''), \frac{1}{2}(y' + y'')]$ , on a

$$y = ax + \frac{1}{2}m\sqrt{1+a^2} \dots \dots \dots (2).$$

La direction de la droite est restée arbitraire; seulement on voit que lorsqu'on a choisi  $a$  à volonté, l'ordonnée à l'origine est  $\frac{1}{2}m\sqrt{1+a^2}$ ; ainsi (n° 374) la distance  $FC = \frac{1}{2}m$ , ce qui fournit cette construction. Du centre  $C$  des moyennes distances aux axes, on décrira un cercle avec le rayon  $\frac{1}{2}m$ ; toute tangente à ce cercle satisfera seule à la condition exigée. C'est ce que rend évidente la propriété connue du trapèze  $MDM'D'$  (n° 219, 4°.).

Si l'on eût donné trois points, il aurait suffi d'ajouter  $ax'' - y'' + b$  au 1<sup>er</sup> membre de (1); en général pour  $n$  points, il faudrait remplacer  $m$  dans (2) par  $\frac{m}{n}$ . Donc la somme des perpendiculaires menées de  $n$  points sur la droite  $DD'$  est  $=m$  quand  $DD'$  est tangent au cercle  $FC$  décrit du centre de moyennes distances avec un rayon  $FC =$  la  $n^{\text{e}}$  partie de  $m$ .

III. Étant données deux droites  $AP$ ,  $AD$  (fig. 279), cherchons un point  $M$ , tel que les perpend.  $MP$ ,  $MD$  soient entre elles dans un rapport donné  $= n : m$ . Prenons  $AP$  pour axe des  $x$ ,  $A$  pour origine;  $AP = x'$ ,  $PM = y'$ , enfin  $y = ax$  pour l'équ. de  $AD$ . La perp. (n° 374)  $MD = \frac{y' - ax'}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{my'}{n}$  par condition; d'où

$$y' = \frac{aux'}{n - m\sqrt{1 + a^2}}.$$

Donc, tous les points d'une droite  $AM$  passant en  $A$ , satisfont à la question. Prenons des parties  $AC = m$ ,  $AB = n$  sur les perpend. aux droites données, et menons des parallèles  $BM$ ,  $CM$ , à ces droites;  $M$  sera l'un des points de la ligne cherchée, puisqu'il satisfait à la condition: cette ligne est donc  $AM$ .

Si l'on voulait obtenir sur la courbe  $MN$  les points  $M$  et  $N$ , qui jouissent de la propriété assignée, il faudrait construire la droite  $AM$ , et prendre ses points d'intersection  $M$  et  $N$  avec la courbe.

Le point  $M$  pourra être situé au-dessous de  $AD$ , alors  $\sqrt{1 + a^2}$  ayant un signe contraire, il faudra prendre  $AC = m$  en sens opposé de  $AC$ , et la section de  $BM$  avec  $C'I$ .

IV. D'un point  $K$  (fig. 280) menons deux tang.  $KM$ ,  $KN$  à l'ellipse donnée  $CMN$ , et la corde  $MN$  qui joint les points de contact. Si l'on fait parcourir au point  $K$  une droite quelconque  $AB$  donnée, les points  $M$ ,  $N$  varieront ainsi que  $MN$ ; on demande la courbe qui est le lieu des intersections successives de ces cordes  $MN$ .

Menons, par le centre  $C$ ,  $CD$  parallèle à  $AB$ , et  $CA$  diamètre



conjugué de  $Cy$  ; prenons ces lignes pour axes. En partant de l'équ. de la tang. à l'ellipse, et exprimant qu'elle passe par un point donné  $K(x, y)$ , on a prouvé (413) qu'il y a deux tang., et que la corde  $MN$ , qui joint les points de contact, a pour équ.  $a^2y + b^2x = a^2b^2$ . Si l'on place le point  $K$  en  $B$ , l'équ. de la nouvelle corde  $m$  sera la même en changeant  $\beta$  en  $\beta'$ . Le point de section de ces cordes se trouve en éliminant  $x$  et  $y$  entre leurs équations. En les retranchant, il vient  $a^2y(\beta - \beta') = 0$ , ou  $y = 0$ . Il est donc prouvé que le point de section est sur l'axe des  $x$ , et cela, quels que soient  $\beta, \beta'$ , d'où résulte que toutes ces cordes se coupent en un seul point. La même propriété a lieu pour l'hyperbole et la parabole (voy. n° 407, 413).

Les principes exposés précédemment suffisent quelquefois pour discuter les équ. de degrés supérieurs en  $x$  et  $y$ . Par ex

$$y^2 - x^2 + (a - b)x + abx = 0,$$

d'où

$$y = \pm \sqrt{x(x - a)(x + b)};$$

la courbe (fig. 288) est symétrique des deux côtés de l'axe des  $y$ , qu'elle coupe aux trois points  $A, C$  et  $B$ , pour lesquels  $x = 0, a$  et  $-b$ . On ne peut prendre  $x$  positif  $< a$ , mais  $x$  peut croître indéfiniment au-delà, ainsi la courbe s'ouvre à l'infini et ne s'étend pas entre  $A$  et  $C$ . Dans le sens des  $x$  négatifs, elle forme une feuille entre  $A$  et  $B$ , et ne dépasse pas  $B$ .

Si  $a = 0$ ,  $y = \pm x \sqrt{x + b}$ , l'espace  $AC$  est nul, et la double branche infinie a son point  $C$  soude en  $A$ . Si  $b = 0$ , ...  $y = \pm x \sqrt{x - a}$ , la feuille  $AB$  se réduit à un point  $A$ , isolé de la branche infinie  $CM$ .

Soit encore l'équ.  $y^2 - x^2y^2 = 1$ , d'où  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$x = \pm \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y}$  : la courbe est symétrique par rapport aux

$x$  et aux  $y$ , et si l'on plie la fig. selon l'un ou l'autre de ces axes, les parties coïncident;  $x$  est  $< 1$ , et comme  $x = \pm 1$  donne  $y = \infty$ , deux parallèles aux  $y$  menées des deux côtés de cet axe à la distance 1, sont asymptotes de la courbe qui est entièrement renfermée entre elles. Enfin  $x < \pm 1$ , ainsi la courbe est com-

posée de deux branches infinies et opposées, séparées par un intervalle, comme dans la fig. 263, excepté qu'elles sont renfermées entre deux parallèles aux  $y$ , et  $> \pm 1$ .

Enfin l'équ.  $x^2y^2 + y^4 - y^2 - x^2 - xy^2 + x = 0$ ,  
équivalant à  $(x^2 + y^2 - 1)(y^2 - x) = 0$ ,

en égalant chaque facteur séparément à zéro, on trouve que la courbe est formée du système d'un cercle  $BCP$  (fig. 233) dont le rayon est 1 et le centre à l'origine  $C$ ; et d'une parabole  $MAM$ . Les choses se passent ici comme au n° 460, 3°.

### *De quelques autres Courbes.*

466. Lorsqu'on donne divers points  $F, G, M, Z, \dots$  (fig. 201), il y a une infinité de courbes qui les unissent, cependant, parmi celles qu'on peut choisir, il en est une qu'on préfère, comme étant plus simple que les autres; c'est celle dont l'équation est  $y = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}$ , et qu'on nomme *Parabole*, par analogie avec la courbe que nous connaissons sous ce nom. Après avoir tracé deux axes  $Ax, Ay$ , et marqué les coordonnées  $AD, DF, AC, CG, \dots$  des points connus, on comprendra dans l'équ. autant de termes qu'il y a de ces points, et il s'agira d'en déterminer les coefficients  $A, B, \dots$  par les conditions données, savoir, que 1°.  $x = AD = a$  donne  $y = DF = a$ , d'où  $a = A + Ba + Ca^2 + \dots$ ; 2°. de même  $x = \beta$ , donne  $y = b$ ;  $b = A + B\beta + C\beta^2 + \dots$ , et ainsi des autres points. Il faudra ensuite éliminer les inconnues  $A, B, C, \dots$ , afin d'en obtenir les valeurs.

Le calcul peut être présenté d'une manière simple et générale; car, puisque  $x = a$  doit donner  $y = a$ , la valeur de  $y$  est de la forme de  $y = Aa + K$ ,  $A$  et  $K$  étant composés de manière que  $x = a$  rende  $A = 1$ ; et  $K = 0$ : ainsi (n° 500),  $K = (x - a) K'$ . De plus, quand  $x = \beta$ , on a  $y = b$ ; donc on a en général  $y = Bb + L$ ,  $L$  étant  $= (x - \beta) L'$ ; de sorte que, pour allier ces deux conditions,

$$y = \frac{x - \beta}{a - \beta} A'a + \frac{x - a}{\beta - a} B'b + (x - a)(x - \beta) M'.$$

$A$  et  $B$  étant  $= 1$ , lorsqu'on fait respectivement  $x = a$ , ou  $= \beta$   
En continuant le même raisonnement, on verra que

$$y = Aa + Bb + Cc + \text{etc.},$$

ou

$$A = \frac{(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \dots}{(a - \beta)(a - \gamma)(a - \delta) \dots};$$

$$B = \frac{(x - a)(x - \gamma)(x - \delta) \dots}{(\beta - a)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) \dots},$$

en prenant pour chaque coefficient une fraction ayant autant de facteurs moins 1, qu'il y a de points donnés.

On obtient ainsi l'équ. approchée d'une courbe donnée, mais tracée au hasard; il suffit d'y distinguer un nombre suffisant de points, pris surtout aux lieux où la courbe offre des sinuosités marquées, et d'en mesurer les coordonnées  $a, \alpha, \beta, b, \dots$

On pourra ainsi trouver, entre des points isolés  $F, G, M, Z, \dots$ , d'autres points assujettis à la même loi; et de même, entre plusieurs quantités liées par de certains rapports, obtenir une loi qui puisse servir à faire connaître, par approximation, quelque circonstance intermédiaire. C'est en cela que consiste la *méthode de l'Interpolation*, dont l'application est si fréquente aux phénomènes naturels. (Voy. n° 637 et 947.)

Les mêmes raisonnemens servent à faire passer une courbe de nature connue par une série de points donnés: l'équ. de cette courbe doit alors renfermer autant de constantes arbitraires qu'il y a de ces points, sans quoi le problème serait absurde ou indéterminé. Ainsi l'équ. la plus générale du cercle étant  $(y - k)^2 + (x - h)^2 = r^2$ , on ne peut exiger que cette courbe passe par plus de trois points connus  $(a, \alpha), (\beta, b), (\gamma, c)$ , et l'on aurait, pour déterminer les constantes  $k, h$  et  $r$ , les conditions

$$(a - k)^2 + (\alpha - h)^2 = r^2,$$

$$(b - k)^2 + (\beta - h)^2 = r^2,$$

$$(c - k)^2 + (\gamma - h)^2 = r^2.$$

Si le rayon  $r$  était connu, on ne pourrait plus se donner que deux points, et ainsi de suite.

En général on peut faire passer une section conique par cinq points, puisqu'il y a cinq arbitraires dans l'équ. générale du 2<sup>e</sup> degré, dégagée du coefficient du 1<sup>er</sup> terme.

467. Quelle est la courbe  $DM$ ,  $QE$  (fig. 281) engendrée par l'intersection continuelle de la ligne  $BM$ , qui tourne autour de  $B$ , et d'un cercle  $MEQ$ , dont le centre  $C$  glisse le long de  $AC$ , de manière que ce centre soit toujours sur  $BM$ ? Prenons  $Ax$  et  $BD$  pour axes. Soient  $AC = a$ ,  $AB = b$ ,  $CM = AD = a$ , les équ. du cercle, et de la droite  $BM$  qui passe en  $B(0, -b)$  et  $C(a, 0)$ , sont

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2, \quad ay = b(x-a);$$

éliminant  $a$ , il vient  $x^2 y^2 = (a^2 - y^2)(y + b)^2$ .

Telle est l'équ. de la courbe proposée, que Nicomède a nommée *Conchyoïde*. Il suit de sa génération qu'elle est formée de deux branches, l'une au-dessus, l'autre en-dessous de  $Ax$ , étendues à l'infini, et dont  $Ax$  est l'asymptote; que la plus grande largeur est en  $DD'$ , lorsque la droite mobile  $BM$  est perpend. à  $Ax$ . Si  $AB < a$ , alors il y a en  $D'$  un nœud; ce nœud s'évanouit, et ne laisse qu'un point de rebroussement, lorsque  $AB = a$ . (Voy. fig. 282.)

468. Le cercle  $AFB$  (fig. 283) et sa tang.  $BD$  sont fixes, la droite  $AD$  tourne en  $A$ , et  $AM$  est toujours pris  $= FD$ : quelle est la courbe des points  $M$ ? Elle résulte de la section continuelle de  $AD$ ; par un 2<sup>e</sup> cercle, dont le centre est en  $A$ , et dont le rayon  $R$  variable est sans cesse  $= FD$ . Les équ. de nos deux cercles, l'origine étant en  $A$ , sont  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $y^2 = 2ax - x^2$ ; celle de  $AD$  est  $y = Ax$ ;  $A$  et  $R$  varient, et l'on a  $AM = FD$ , ou  $AP = EB$ . Or, on trouve (n<sup>os</sup> 372, 354)

$$AE = \frac{2a}{1+A^2}, \quad EB = \frac{2aA^2}{1+A^2}, \quad AP = R \cos MAP = \frac{R}{\sqrt{1+A^2}},$$

donc  $R\sqrt{1+A^2} = 2aA^2$ , c'est l'équ. de condution.

Éliminant  $R$  et  $A$ , à l'aide de  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $y = Ax$ , on a l'équ. cherchée

$$x^3 + xy^2 = 2ay^2; \quad \text{d'où } y^2 = \frac{x^3}{2a-x}.$$



Il résulte de cette équ. que, 1°.  $x$  ne peut être  $> 2a$ , ni négatif : ainsi la courbe est renfermée entre  $Ay$  et  $BD$  ; 2°. elle est symétrique de part et d'autre de  $AB$  ; 3°. elle passe par l'origine  $A$  (où elle a un rebroussement) ; 4°.  $x = a$  donne  $y = \pm a$  : les points  $H$  et  $H'$ , où la courbe coupe la circonsc. directrice, partagent celle-ci en ses quatre quadrans ; 5°.  $x = 2a$  donne  $y = \infty$  :  $BD$  est asymptote. Cette courbe est nommée *Cissoïde de Dioclès*.

469. La courbe  $OBM$  (fig. 284), dont les abscisses  $AE, AP \dots$  sont les logarithmes des ordonnées correspondantes  $EF, MP \dots$  est nommée *Logarithmique* : son équ. est  $x = \log y$ , ou  $y = a^x$ ,  $a$  étant la *base* (n° 145). Il est facile de voir que, 1°. la courbe n'a qu'une seule branche, qui est infinie à droite et à gauche ; 2°. l'ordonnée  $AB$  à l'origine est  $= 1$  ; 3°. soit  $AE = 1 = AB$ , on a  $EF = a =$  la base ; 4°. si  $a$  est  $> 1$ , la partie  $BM$  de la courbe qui est dans la région des  $x$  positifs, s'écarte sans cesse de  $Ax$  (le contraire a lieu lorsque  $a < 1$ ), l'autre partie  $FO$  s'approche de  $AQ$  ;  $QAx$  est l'asymptote. 5°. Si l'on prend des abscisses successives en progression par différence, les ordonnées correspondantes formeront une progression par quotient.

Les différentes espèces de logarithmiques sont distinguées entre elles par la base  $a$ .

470. Formons la courbe des sinus (fig. 289) : l'équation est  $y = \sin x$ . Chaque abscisse  $x$  est le développement d'un arc de cercle dont l'ordonnée  $y$  est le sinus, le rayon étant  $r$ . Si l'arc est  $0, \pi r, 2\pi r \dots$ , le sinus est nul : à partir de l'origine  $A$ , et de part et d'autre, on prend  $AB = BC = AB' = \dots = \pi r$ , les points  $A, B, B', C, C' \dots$  sont ceux où la courbe coupe l'axe des  $x$ . L'arc croissant depuis zéro jusqu'à  $\frac{1}{2} \pi r = AE$ , le sinus croît aussi jusqu'à  $EF = r$ , mais  $x$  continuant de croître,  $y$  diminue, la portion  $AFB$  de courbe est symétrique par rapport à  $FE$ . Lorsque  $x$  passe  $AB = \pi r$ , le sinus devient négatif, et comme il reprend les mêmes valeurs, on a une autre partie de courbe  $BDC$  égale à la première. Le cours se continue ainsi à l'infini. Ces courbes ne diffèrent entre elles que par le rayon  $r$ .



471. Un point  $M$  (fig. 285) se meut le long de  $CM$ , en même temps que  $CM$  tourne en  $C$ ; quand ce rayon mobile était couché sur  $CA$ ,  $M$  était en  $A$ ; et l'on exige que  $AC$  soit toujours à  $AP$ , comme le quadrans  $ac$  est à l'arc décrit  $ab$ . On demande quelle est la courbe  $AMDB$  décrite par  $A$ ? Elle est produite par l'intersection continuelle du rayon  $CM$  et de  $PM$  perpend. à  $CA$ .  $C$  étant l'origine, soient  $AC = a$ ,  $ab = t$ ,  $CP = s$ , les équ. de  $CM$  et  $PM$  sont  $y = x \tan t$ ,  $x = s$ . Mais la condition

imposée  $\frac{AC}{AP} = \frac{ac}{ab}$  donne  $\frac{a}{a-s} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{t}$ ; éliminons  $a$  et  $t$ , il vient

$$y = x \tan \left[ \frac{\frac{1}{2}\pi(a-x)}{a} \right], \text{ ou } y = x \cot \left( \frac{\pi x}{2a} \right).$$

Il est aisé de voir, 1°. que la courbe est symétrique de part et d'autre de  $Cy$ ; 2°. que  $\pm x > a$  rend  $y$  négatif; 3°. que  $\pm x = a$  donne les asymptotes  $QN$ ,  $Q'N'$ ;  $x = 0$  donne  $y = 0 \times \infty$ , expression singulière de l'ordonnée  $CD$ , et dont nous rechercherons plus tard la valeur (n° 756). *Dinostrate*, inventeur de cette courbe, lui a donné le nom de *Quadratrice*, à cause de l'utilité qu'il lui supposait pour la quadrature du cercle.

472. Si un cercle  $GM$  (fig. 290) roule sur une droite  $AB$ , le point  $M$ , qui originairement était en contact en  $A$ , aura décrit l'arc  $AM$ ; et le nouveau point de tangence avec  $AB$  sera en  $D$ , de sorte que  $AD$  sera le développement de l'arc de cercle  $MD$ . En continuant le mouvement du cercle, le point  $M$  tracera la courbe  $AMFB$ , qu'on nomme *Cycloïde*, *Roulette* ou *Trochoïde*.

Après une révolution complète, le point  $M$  se retrouvera au contact en  $B$ , qui sera un point de la courbe,  $AB$  étant la circonférence du cercle générateur: en  $E$ , milieu de  $AB$ , le diamètre  $FE = 2r$  de ce cercle, est la plus grande ordonnée; la courbe est symétrique de part et d'autre de l'axe  $FE$ . La cycloïde continue son cours à l'infini, en formant en  $A, B \dots$  des rebroussements.

Prenons l'origine en  $A$ ,  $AP = x$ ,  $PM = y$ ; comme . . . . .  
 $AP = AD - PD$ , on a  $x = MD - z$ , en faisant  $PD = z$ ;  $z$  est  
 l'ordonnée  $QM$  du cercle  $CM$ , l'abscisse  $y$  étant  $DQ$ ; d'où  
 $z^2 = 2xy - y^2$ . Or,  $MD$  est un arc qui, dans le cercle dont le  
 rayon est  $r$ , a  $z$  pour sinus; ce qu'on exprime ainsi :

$$MD = \text{arc}(\sin = z),$$

$$\text{donc on a} \quad x = \text{arc}(\sin = z) - z$$

$$\text{ou} \quad z = \sin(x + z); \quad z^2 = 2xy - y^2.$$

Si l'origine est en  $F$ ,  $FS = x$ ,  $SH = y$ ,  $FK = u$ , on a

$$FS = AE - AP = AE - (AD - PD)$$

$$= \text{demi-circ. } FKE - \text{arc } MD + MQ = FK + KN,$$

$$\text{ou } x = \text{arc}(\sin = z) + z, \quad z = \sin(x - z), \quad \text{ou } x = u + \sin u.$$

Les travaux de Fermat, Descartes, Roberval, Pascal, Huyghens. . . . , ont rendu cette courbe célèbre, elle jouit de propriétés géométriques et mécaniques très singulières, mais ce n'est pas ici le lieu de nous en occuper. V. le second vol.

Si l'on eût cherché la courbe décrite par un point du plan circulaire différent de ceux de la circonférence, on aurait eu une autre espèce de cycloïde. On aurait aussi pu donner au cercle mobile un mouvement de translation dans l'un ou l'autre sens, outre celui dont nous venons de parler, ce qui aurait allongé ou accourci la cycloïde. Enfin on aurait pu faire rouler la circonférence sur une autre courbe : on aurait eu ce qu'on nomme les *Épicycloïdes*. Mais nous ne pouvons qu'indiquer ces objets.

473. On nomme *Spirale* une courbe qui est coupée en une infinité de points par toute ligne passant par un point fixe ou pôle. Les spirales forment un genre de courbes dont la génération nécessite, pour ainsi dire, les coordonnées polaires. Telle est celle de *Conon*, qui porte le nom de *Spirale d'Archimède*, parce que ce célèbre géomètre en a le premier reconnu les propriétés. La droite  $AI$  (fig. 286) tourne autour de  $A$ ,

pendant qu'un point mobile  $M$  glisse le long de  $Al$ . Cherchons l'équ. de la courbe  $AMNC$ , qu'il trace, en supposant que  $Al$  est placé en  $AC$ , quand le mobile est en  $A$ , qu'après une révolution, lorsque  $Al$  se retrouve en  $AC$ , le mobile  $M$  est en  $C$ ; qu'enfin les espaces  $AM = r$  qu'il parcourt sont proportionnels aux angles  $IAC = \theta$  que décrit  $Al$ .

La valeur angulaire  $2\pi$  devant répondre à  $AC = a$ , on a

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{\theta}{AM} = \frac{\theta}{r}; \text{ donc, } 2\pi r = a\theta$$

est l'équ. cherchée. La courbe passe en  $A$ , en  $C$ ... les révolutions successives de  $Al$  donnent  $\theta = 2\pi, = 4\pi, = \dots$ ; d'où  $r = a, = 2a, \dots$ , de sorte que, chaque fois, le rayon vecteur augmente de  $a$ . Comme, pour un nombre quelconque  $k$  de révolutions, l'équ.

$$r = \frac{a\theta}{2\pi} \text{ devient } r = ak + \frac{a\theta}{2\pi},$$

$k$  étant un entier quelconque, tous les rayons vecteurs s'accroissent aussi de  $a$ .

474. Soient menées les perpend.  $AC, CD$  (fig. 287<sup>r</sup>, et décrit du centre  $C$  des arcs, tels que  $PM$ , égaux en longueur à une ligne donnée  $CD = a$ ; les extrémités  $M$  de ces arcs déterminent une courbe  $NM$ , dont on trouve aisément l'équ., car on a  $\frac{Ch}{gh} = \frac{CM}{PM}$ ; or,  $PM = a, Ch = 1$ ; donc  $r\theta = a$ . L'analogie de cette équ. avec  $xy = m$  a fait donner à cette courbe le nom de *Spirale hyperbolique*: on voit d'ailleurs que  $DE$ , parallèle à  $AC$ , est asymptote. Puisque  $r = \frac{a}{\theta}$ ,  $r$  n'est nul que quand  $\theta = \infty$ , et comme  $\theta = 2\pi, = 4\pi, \dots$  donnent des valeurs de  $r$  de plus en plus petites, la courbe fait autour du pôle des circonvolutions, et n'y parvient qu'après une infinité de tours.

On a donné de même le nom de *Spirale logarithmique* à la courbe dont l'équ. est  $\theta = \log r$ , ou  $r = a^{\theta}$  croissant,  $r$  letr

aussi, et le cours de la spirale s'étend à l'infini; mais  $\theta$  étant négatif et croissant,  $r$  décroît, de sorte que ce n'est qu'après un nombre infini de tours que la courbe atteint le pôle. Elle participe, comme on voit, des deux précédentes.

La *Spirale parabolique* a pour équ.  $r = a \pm \sqrt{p\theta}$ , de sorte que  $r - a$  est moyenne proportionnelle entre  $p$  et  $\theta$ : on reconnaîtra aisément la forme de cette courbe.

FIN DU PREMIER VOLUME.

TABLE de Cordes pour le rayon 1000 (page 368).

D	0'	20'	40'	Diff pour 1'	D	0'	20'	40'	Diff pour 1'	D	0'	20'	40'	Diff pour 1'
0°	0	6	12	0,2	42°	717	722	728	0,25	84°	1338	1353	1367	0,20
1	18	23	29	0,31	43	733	738	744	0,25	85	1351	1366	1380	0,20
2	35	41	47	0,31	44	749	755	760	0,25	86	1364	1379	1393	0,20
3	52	58	64	0,31	45	765	771	776	0,25	87	1377	1392	1406	0,20
4	70	76	81	0,31	46	782	788	793	0,25	88	1390	1405	1419	0,20
5	87	93	99	0,31	47	798	803	808	0,25	89	1402	1417	1431	0,20
6	105	111	116	0,31	48	814	819	824	0,25	90	1414	1429	1443	0,20
7	122	128	134	0,31	49	829	835	840	0,25	91	1426	1441	1455	0,20
8	140	145	151	0,31	50	845	851	856	0,25	92	1439	1454	1468	0,20
9	157	163	169	0,31	51	861	866	871	0,25	93	1451	1466	1480	0,20
10	174	180	186	0,31	52	877	882	887	0,25	94	1463	1478	1492	0,20
11	192	198	203	0,31	53	892	898	903	0,25	95	1475	1490	1504	0,20
12	209	215	221	0,31	54	908	913	918	0,25	96	1487	1502	1516	0,20
13	226	232	238	0,31	55	924	929	934	0,25	97	1499	1514	1528	0,20
14	243	249	255	0,31	56	939	945	950	0,25	98	1511	1526	1540	0,20
15	260	266	271	0,31	57	955	960	965	0,25	99	1523	1538	1552	0,20
16	278	284	289	0,31	58	970	976	980	0,25	100	1535	1550	1564	0,20
17	295	301	307	0,31	59	985	990	995	0,25	101	1547	1562	1576	0,20
18	313	319	324	0,31	60	1000	1005	1010	0,25	102	1559	1574	1588	0,20
19	330	336	342	0,31	61	1015	1020	1025	0,25	103	1571	1586	1600	0,20
20	347	353	359	0,31	62	1030	1035	1040	0,25	104	1583	1598	1612	0,20
21	365	371	376	0,31	63	1045	1050	1055	0,25	105	1595	1610	1624	0,20
22	382	388	393	0,31	64	1060	1065	1070	0,25	106	1607	1622	1636	0,20
23	399	405	410	0,31	65	1075	1080	1085	0,25	107	1619	1634	1648	0,20
24	416	422	427	0,31	66	1090	1095	1100	0,25	108	1631	1646	1660	0,20
25	433	439	444	0,31	67	1105	1110	1115	0,25	109	1643	1658	1672	0,20
26	450	456	461	0,31	68	1120	1125	1130	0,25	110	1655	1670	1684	0,20
27	467	473	478	0,31	69	1135	1140	1145	0,25	111	1667	1682	1696	0,20
28	484	490	495	0,31	70	1150	1155	1160	0,25	112	1679	1694	1708	0,20
29	501	506	512	0,31	71	1165	1170	1175	0,25	113	1691	1706	1720	0,20
30	518	523	529	0,31	72	1180	1185	1190	0,25	114	1703	1718	1732	0,20
31	535	540	546	0,31	73	1195	1200	1205	0,25	115	1715	1730	1744	0,20
32	552	557	562	0,31	74	1210	1215	1220	0,25	116	1727	1742	1756	0,20
33	568	573	579	0,31	75	1225	1230	1235	0,25	117	1739	1754	1768	0,20
34	585	590	596	0,31	76	1240	1245	1250	0,25	118	1751	1766	1780	0,20
35	601	607	613	0,31	77	1255	1260	1265	0,25	119	1763	1778	1792	0,20
36	618	624	629	0,31	78	1270	1275	1280	0,25	120	1775	1790	1804	0,20
37	635	640	646	0,31	79	1285	1290	1295	0,25	121	1787	1802	1816	0,20
38	651	657	662	0,31	80	1300	1305	1310	0,25	122	1799	1814	1828	0,20
39	668	673	679	0,31	81	1315	1320	1325	0,25	123	1811	1826	1840	0,20
40	684	690	695	0,31	82	1330	1335	1340	0,25	124	1823	1838	1852	0,20
41	700	706	711	0,31	83	1345	1350	1355	0,25	125	1835	1850	1864	0,20

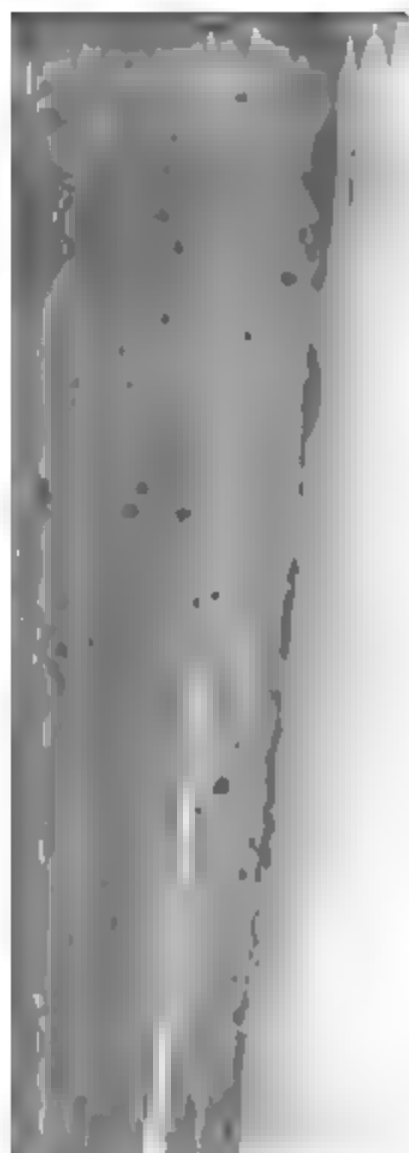
Diff. 1 pour 2'  
2 pour 6'  
3 pour 10'  
4 pour 14'

Diff. 1 pour 3'  
2 pour 6'  
3 pour 9'  
4 pour 15'

Diff. 1 pour 3'  
2 pour 10'  
3 pour 15'











847 100



